3.1. A square in plan (in the plane $x^{2'}x^{3'}$) smooth spherical panel, hingedly supported along the contour and loaded with a uniform normal pressure of intensity q, is investigated. The research results are presented using dimensionless parameters $\overline{q} = a^4 q/(Eh^4)$, $\overline{u}^{1'} = u^{1'}/h$. The curvature of the panel is determined by the parameter $K = 2a^2/(Rh) = 32$. Accepted: a = 60h is a panel size in plan, R = 225h is radius, h = 1 cm is thickness, $E = 2.1 \cdot 10^6$ kg/cm², v = 0.3. The SFEM with a grid of 30×30 FE is adopted for calculation. As research has shown, such a grid ensures the convergence of solutions.

3.1.1. The SW LIRA an almost complete coincidence of the "load-deflection" curves (" $\overline{q} - \overline{u}^{1'}$ ") has provided by all three approaches in the center of the panel to the upper critical point (Fig. 7 (a)). Both variants of the method of successive loads (1. SL and 2. SL) demonstrate the coincidence of the results in the pre-critical region and a slight difference between them in terms of the value of the upper critical load \overline{q}_{cr}^{up} (Table 1). At this point (in the figure, the point is marked '*') the solution of the problem ends. The Newton-Raphson method (3. N-R) allows you to switch to the closed stable branch of the solution, but with a significant error (Fig. 7 (c)).





All three algorithms of SW SCAD implement the transition to a new stable equilibrium branch (Fig. 7 (b), (c)). The calculation by the method of successive loads (1. SL) makes a transition to a closed stable branch with a large error in the value of the upper critical load \bar{q}_{cr}^{up} . According to the algorithms based on the application of the Newton-Kantorovich (2. N-K) and Newton-Raphson (3. N-R) methods, the problem of transition to a closed stable branch is solved quite precisely, the value of the upper critical load \bar{q}_{cr}^{up} is the same (Table 1).

Tabla	1
rame	
	-

SW	Algorithm	$ar{q}_{ m cr}^{ m up}$	Δ, %	$\overline{u}_{\rm cr}^{1'{\rm up}}$	Δ, %
FEMS	Newton-Kantorovich method (FEMS)	193.7	0	0.9125	0
LIRA	1. Sequential loading method (SL)		0.20	0.8796	-3.60
	2. Sequential loading method with automatic step selection (SLA)		4.70	0.8580	-5.97
	3. Newton-Raphson method (N–R)	196.4	1.40	0.9013	-1.23
SCAD	1. Sequential loading method (SL)	-	-	-	-
	2. Newton-Kantorovich method (N–K)	190.2	-1.80	0.7729	-15.30
	3. Newton-Raphson method (N–R)	190.2	-1.80	0.7730	-15.29

In the pre-critical region for both SWs, we have an almost complete coincidence of the curves with the diagram obtained on the basis of the use of FEMS. The equilibrium shapes of the deformed panels in the subcritical and supercritical regions have a simple appearance and match well. (Fig. 7 (d)) shows the modes of deformation of the middle surface of the shells in the area of the critical load and at the point of transition to a stable closed branch. Deformation of the panel is characterized by a deflection in its central area.

In further research, when performing calculations, we will use method 2. Successive loads with automatic step selection (SLA) for SW LIRA-SOFT, and method 2. Newton-Kantorovich (N-K) for SW SCAD, as the most accurate and efficient.

3.1.2 The influence of the combined effect of preliminary uniform heating with subsequent pressure loading on the loss of panel stability is considered (Fig. 8). Heating (cooling) is performed on $T = \pm 20^{\circ}$ C.



A uniform temperature increase of 20 degrees leads to an almost identical corresponding increase in the upper critical load $\bar{q}_{cr}^{up} = 175,0$; 193,7; 212,2 and a uniform decrease of the lower one $\bar{q}_{cr}^{lw} = 32,82$; 29,78; 26,53 (Fig. 8).

A comparison of the results obtained by the FEMS with the calculations made by SW LIRA showed a fairly good match between them. The corresponding diagrams almost completely coincide in the pre-critical region. We have a slight run-up in terms of values \bar{q}_{cr}^{up} ra $\bar{u}_{cr}^{l'up}$ at the upper critical point (Table 2).

	Calculation method					
Loading (preheating)	FEMS		SW LIRA			
	$ar{q}_{ m cr}^{ m up}$	$\overline{u}_{\rm cr}^{1'{\rm up}}$	$ar{q}_{ m cr}^{ m up}$	Δ , %	$\overline{u}_{\rm cr}^{1'{\rm up}}$	$\Delta, \%$
$T = -20^{\circ} \mathrm{C}$	175,0	-0,9613	185,9	6,23	-1,0000	4,03
$T = 0^{\circ} C$	193,7	-0,9125	202,8	4,70	-0,8580	-5,97
$T = +20^{\circ} \text{ C}$	212,2	-0,7984	228,4	7,63	-0,7509	-5,95

Table 2

3.1.3. Modal analysis of the shell shows the following. The first four forms of natural oscillations of the panel, obtained by the method based on the use of MFES and by SW LIRA-SAPR, are given for the initial unloaded state $\bar{q}^{i=0}$ (Fig. 9). The difference in frequencies is within 1%. The forms of natural oscillations are identical. When calculating according to the FEMS ($T = 0^{\circ}$ C) it was obtained that at all loads the first frequencies are multiples, $\omega_1 = \omega_2$.



Fig. 9. Natural modes ($\omega_k^{i=0}$, Hz) of the unloaded shell, $\overline{q}^{i=0}$

The conducted modal analysis makes it possible to investigate the influence of the prestressed state of the shell on the frequencies and forms of natural oscillations of the deforming structure (Fig. 10). In the figure, the resulting dependence is presented as a "load-lower frequency" ω_1 " (" $\bar{q} - \omega$ ") diagram. Modal analysis is performed until the zero (negative) value of the fundamental tone appears. This approach corresponds to the dynamic criterion of the loss of shell stability [24] and allows determining the stability of the panel simultaneously according to static and dynamic criteria. There are no branching points of the solutions in the pre-critical region on the " $\bar{q} - \bar{u}$ " curves. Therefore, according to both criteria,



almost the same corresponding values of critical loads were obtained.

In the existing versions of SW LIRA-SAPR and SCAD, it is not possible to analyze the natural vibrations of shells taking into account the prestressed state.

3.2 The stability analysis of shells with stepwise variable thickness is illustrated using the example of the panel discussed above. The panel is weakened by four criss-crossed channels placed on the surface of the shell in three ways. The channels are located eccentrically on the inner (Fig. 11 (a)) or outer (Fig. 11 (c)) surfaces of the shell and symmetrically on its inner and outer surfaces (Fig. 11 (b)).

The SFEM with a sufficiently dense mesh of 30×30 FE was adopted as the calculation model, which ensures the convergence of solutions. To approximate channels, the SW LIRA-SAPR uses 'absolutely rigid insertions', and the SW SCAD uses 'absolutely rigid bodies'.



3.2.1. We consider a shell with "narrow" channels having the same parameters: length a, width $b_c = 2h$ and total depth $h_c = 0.3h$. For all algorithms there is a good agreement between the ' $\overline{q} - \overline{u}$ ' curves in the subcritical region (Fig. 12). The calculation performed using the SW LIRA-SAPR stops at the upper critical point. In the pictures this point is marked '*'. The solution for a panel with a symmetrical arrangement of channels obtained using the SW SCAD accurately implements the transition to a supercritical stable branch (Fig. 12 (b)). For this symmetrical weakening, the ' $\overline{q} - \overline{u}$ ' curves are compared at three characteristic points.



A comparison of solutions at the upper critical point obtained using the MFES, the SW LIRA-SAPR and SCAD shows that for all types of weakening, the difference in load \bar{q}_{cr}^{up} and deflection \bar{u}_{cr}^{1up} in the center of the panel does not exceed 4% (Table 3).

For narrow channels, their location has little effect on the value of the critical load \bar{q}_{cr}^{up} . The greatest reduction in load (compared to a smooth panel) caused weakening on the outer side of the shell, e < 0 **L**. The critical load of this shell is reduced by 18.7%.

Panel		$\overline{q}_{ m cr}^{ m up}$		$\overline{u_{\rm cr}^{1'{\rm up}}}$ (in the center)		
type	FFMS	SW LIRA	SW SCAD	FFMS	SW LIRA	SW SCAD
	I LIVIS	Δ , %	Δ , %	1 LIVID	Δ , %	Δ , %
<i>e</i> > 0	178.8	178,98		-0.889	-0,923	_**-
	170,0	0,10%		0,007	3,8%	
e = 0	177.2	184,3	176,21	0.942	-0,819	-0,839
	177,5	3,95%	-0,61%	-0,842	-2,7%	0,36%
<i>e</i> < 0	157.4	162,40	"	0.781	-0,805	
	157,4	2,82%		-0,781	3,1%	
Гладка	102.7	202,8	190,2	0.0125	-0,8580	-0,7729
	193,7	4,7%	-1,8%	-0,9125	-5,97%	-15,30%

Table 3

3.2.2. The effect of weakening in the form of "wide" channels on shell buckling is considered. The channels are located symmetrically relative to the shell mid-surface and has such parameters: $b_c = 6h$, $h_c = 0.7h$.

The ' $\bar{q} - \bar{u}^{1'}$ ' curves obtained using the FEMS, the SW LIRA-SAPR and SCAD have been plotted for deflections at different points of the shell (Fig. 13 (a)). The resulting curves completely coincide with each other in the subcritical region and near the upper critical load \bar{q}_{cr}^{up} .



Table	4
-------	---

Calculation method	$\frac{\overline{q}_{\rm cr}^{\rm up}}{\overline{u}_{\rm cr}^{\rm 1up}}$	$rac{\Delta^q$, % Δ^u , %	$\frac{\overline{q}^*}{\overline{u}^{1'*}}$	$rac{\Delta^{q*}$, % $\overline{\Delta^{u*}}$, %
FEMS	$\frac{72,94}{-0,2876}$	$\frac{0}{0}$	$\frac{63,34}{-0,2410}$	$\frac{0}{0}$
SW LIRA	_"_	_''_	$\frac{64,79}{-0,2451}$	$\frac{2,89}{1,70}$
SW SCAD	$\frac{74,71}{-0,3289}$	<u>2,43</u> 12,81	_"_	_"_

In contrast to the solution for a panel with 'narrow' channels, the SW LIRA stopped calculations at the branching point at load $\bar{q}^* = 64,79$, taking the branching point as the upper critical load (Fig. 13 (a)). This point is marked '*' in the figure. The branch point has been also discovered in calculations using the MFES. The MFES algorithm allows us to more accurately determine the load value at the branch point \bar{q}^* (Table 4). By introducing a small ($\lambda = 0,01$) asymmetrical perturbation into the initial shell shape, a specially developed technique allows us to



turn the branch point '*' into a critical one $(\bar{q}^* = 63,34)$ and reach a new branch of the solution (dash-dotted curve). The resulting load \bar{q}^* is 13.16% less than the

critical load $\bar{q}_{\rm cr}^{\rm up}$.

The weakening of the shell by wide channels led to a significant decrease in the value of the upper critical load (by 62.34%) compared to that corresponding to a smooth panel.

The shell deformation shapes obtained using different algorithms coincide well with each other (Fig. 13, b). The deflection in the center of the panel at the moment of buckling is less than in the weakening zone (Fig. 14).

Conclusions

The effectiveness of the finite element method for studying geometrically nonlinear deformation, buckling, post-buckling behavior and vibrations of thin elastic shells under the static action of thermomechanical loads is analyzed and the reliability of the obtained solutions is confirmed. The research method is based on the three-dimensional approach of thermoelasticity theory and the use of a finite element moment scheme. Comparisons are carried out with the results of calculations performed using domestic software LIRA-SAPR and SCAD.

The possibilities of using these programs to study the processes under consideration have been investigated and identified. The approaches used in them to finite element modeling of shells, in particular of step-variable thickness, are described.

On this basis, a comparative analysis of solutions obtained using three software packages for nonlinear deformation, stability and vibration of shallow panels under the action of thermomechanical loads is carried out. Good agreement between solutions is obtained.

The research makes it possible to conclude that the LIRA-SAPR and SCAD can be used, within certain limits, as a means of confirming the reliability of the results obtained when it is studying the geometrically nonlinear behavior of thin flexible elastic shells.

REFERENCES

- Bazhenov V.A., Krivenko O.P., Solovei M.O. Nonlinear deformation and stability of elastic shells with inhomogeneous structure (Neliniine deformuvannia ta stiikist pruzhnykh obolonok neodnoridnoi struktury. – K.: ZAT «Vipol», 2010. – 316 p. ISBN: 978-966-646-097-7 (in Ukrainian)
- Bazhenov V., Krivenko O. Buckling and Natural Vibrations of Thin Elastic Inhomogeneous Shells. LAP LAMBERT Academic Publishing. Saarbruken, Deutscland, 2018. – 97 p. ISBN: 978-613-9-85790-6
- Bazhenov V.A., Krivenko O.P. Stability and vibrations of elastic inhomogeneous shells under thermo-mechanical loads (Stiikist i kolyvannia pruzhnykh neodnoridnykh obolonok pry termosylovykh navantazhenniakh). – K.: ZAT «Vipol», 2020. – 187 p. ISBN: 978-966-8019-85-2. (in Ukrainian).
- Hutchinson J.W., Thompson J.M.T. Nonlinear Buckling Interaction for Spherical Shells Subject to Pressure and Probing Forces // J. Appl. Mech. – 2017. – 84, 6. – 061001.

- 5. Li C., Miao Y., Wang H., Feng Q. Thermal buckling of thin spherical shells under uniform external pressure and non-linear temperature // Thin-Walled Struct. 2017. 119. P. 782–794.
- Ismail M.S., Mahmud J., Jailani A. Buckling of an imperfect spherical shell subjected to external pressure // Ocean Engineering. – 2023. – Vol. 275. – 114118.
- Flyachok V.M., Shvets R.N. The influence of uneven heating on the natural vibrations of anisotropic cylindrical shells (Vliyaniye neravnomernogo nagreva na sobstvennyye kolebaniya anizotropnykh tsilindricheskikh obolochek)// Teplovyye napryazheniya v elementakh konstruktsíy – 1981. – Vyp. 9. – P. 48-53 (in Russian).
- 8. Gavrilenko G. D., Trubitsina O. A. Oscillations and stability of ribbed shells of revolution (Kolebaniya i ustoychivost' rebristykh obolochek vrashcheniya). Dnipropetrovsk: TOV "Barviks", 2008. 155 p. (in Russian).
- 9. Gavrilenko G.D., Matsner V.I. Effect of the Parameters of Ribs and the Type of Load on the Frequencies of Vibration of Imperfect Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. 2015. 51. P. 420–424.
- Grigorenko O.Y., Borisenko M.Y., Boychuk O.V. et al. Numerical Determination of Natural Frequencies and Modes of Closed Corrugated Cylindrical Shells // Int. Appl. Mech. – 2022. – 58. – P. 520–532.
- 11. Gorodetskiy A.S., Evzerov I.D. Computer models of structures (Komp'yuternyye modeli konstruktsiy). Kyiv: Fact, 2007. 394 p. (in Russian)
- Strelets-Streletskiy E.B., Bogovis V.E., Genzersky Y.V., Geraymovich Y.D. [et al.]. LIRA 9.4. User Guide. Basics. Textbook (LIRA 9.4. Rukovodstvo polzovatelya. Osnovy. Uchebnoe posobie). – Kyiv: Fact, 2008. 164 p. (in Russian).
- Perel'muter A.V., Slivker V.I. Calculation models of structures and the possibility of their analysis (Raschetnyye modeli sooruzheniy i vozmozhnosť ikh analiza) – M.: DMK Press, 2007. – 600 p. (in Russian)
- 14. Karpilovsky V. S., Kriksunov E. Z., Perel'muter A. V., Perel'muter M. A. Software SCAD (Vyichislitelnyiy kompleks SCAD). M.: SCAD SOFT, 2009. 656 p. (in Russian).
- 15. Bloch V.I. Theory of elasticity (Teoriya uprugosti). Kharkov: Publishing House of KhGU, 1964. 483 p. (in Russian).
- Chapelle D., Bathe K. J. The finite element analysis of shells Fundamentals. Series: Computational fluid and solid mechanics. Berlin; Heidelberg: Springer, 2011. – 410 p.
- 17. Podvornyi A.V., Semenyuk N.P., Trach V.M. Stability of Inhomogeneous Cylindrical Shells Under Distributed External Pressure in a Three-Dimensional Statement // Int. Appl. Mech. 2017. 53. P. 623–638.
- Cinefra M. Formulation of 3D finite elements using curvilinear coordinates. Mechanics of Advanced Materials and Structures, 2020. P.1-10.
- Krivenko O.P., Lizunov P.P., Vorona Yu.V., Kalashnikov O.B. A Method for Analysis of Nonlinear Deformation, Buckling, and Vibrations of Thin Elastic Shells with an Inhomogeneous Structure // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and Technical collected articles. – Kyiv: KNUBA, 2023. – Issue 110. P. 131-149 DOI:10.32347/2410-2547.2023.110.131-149.
- Krivenko O.P., Vorona Yu.V. Comparative Analysis of Nonlinear Deformation and Buckling of Thin Elastic Shells of Step-Variable Thickness // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – K.: KNUBA, 2022. – Issue 108. – P. 107-118. DOI:10.32347/2410-2547.2022.108.107-118.
- The finite element method in solid mechanics (Metod konechnyh elementov v mehanike tverdyh tel) / A.S.Saharov, V.N.Kislookij, V.V.Kirichevskij [et al.]. – K.: Visha shk. Golovnoe izd-vo, 1982. - 480 p. (in Russian).
- LIRA-SAPR. Book I. Fundamentals (LIRA–SAPR. Kniga I. Osnovy) / E.B. Strelets–Streletsky, A.V. Zhuravlev, R.Yu. Vodopyanov. Ed. doc. tech. sciences, prof. A.S. Gorodetsky. – Publishing house: LIRALAND, 2019. – 154 p. (in Russian).
- SCAD Office. Version 21. Computer complex SCAD++ (SCAD Office. Versiya 21. Vychislitel'nyy kompleks SCAD++) / V.S. Karpilovskiy, E.Z. Kriksunov, A.A. Malyarenko [et al.]. – Izd-vo SKAD SOFT, 2015. – 848 p. (in Russian).
- Vol'mir A. S. Ustoychivost' deformiruyemykh system (Stability of Deformable Systems) M.: Nauka, 1967. 984 p. (in Russian).

Стаття надійшла 31.10.2023

Кривенко О.П., Лізунов П.П., Ворона Ю.В., Калашніков О.Б. ПОРІВНЯЛЬНИЙ АНАЛІЗ СТІЙКОСТІ І ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ ПОЛОГИХ ПАНЕЛЕЙ ПРИ ДІЇ ТЕРМОСИЛОВИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Робота є продовженням низки досліджень, присвячених обгрунтуванню достовірності розв'язків, що отримуються за скінченно-елементною методикою дослідження нелінійного деформування, стійкості та коливань тонких пружних оболонок при дії термосилових навантажень. Методика базується на геометрично нелінійних співвідношеннях тривимірної теорії термопружності та положеннях моментної схеми скінченних елементів. Тонка пружна оболонка неоднорідної структури моделюється універсальним просторовим ізопараметричним скінченних елементом. Модальний аналіз оболонки реалізується на кожному кроці статичного термосилового навантаження. Для визначення спектру нижчих частот власних коливань болонок застосовується метод ітерації підпростору. Розглядається квадратна за планом полога сферична панель. Досліджується вплив попереднього нагріву на стійкість і коливання пружної ізотропної оболонки при навантаженні рівномірним тиском. Аналізується поведінка оболонки, що послаблена двома парами перехресних каналів. Розглядається послаблення панелі вузькими і широкими каналами, які можуть бути ексцентрично розташованими відносно серединної поверхні оболонки. Ефективність та адекватність методу

підтверджується порівняльним аналізом розв'язків з результатами, що отримані з використанням сучасних багатофункціональних програмних комплексів ЛІРА-САПР та SCAD. Наведено особливості застосування комплексів до розв'язання розглядуваних задач. Аналіз результатів розрахунків дозволив оцінити межі та можливості використання цих програмних комплексів для обґрунтування достовірності розв'язків певних класів задач геометрично нелінійного деформування, втрати стійкості та коливань пружних оболонок.

Ключові слова: пружна оболонка, термосилове навантаження, стійкість, модальний аналіз, універсальний просторовий скінченний елемент, моментна схема скінченних елементів, порівняльний аналіз.

УДК 539.3

Кривенко О.П., Лізунов П.П., Ворона Ю.В., Калашніков О.Б. Порівняльний аналіз стійкості і власних коливань пологих панелей при дії термосилових навантажень // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – Київ: КНУБА, 2023. – Вип. 111. – С. 49-64.

Проведено порівняльний аналіз розв'язків щодо нелінійного деформування, стійкості та коливань тонких пружних оболонок при дії термосилових навантажень, що отримані за моментною схемою скінченних елементів та з використанням програмних комплексів ЛІРА-САПР та SCAD. Наведено особливості застосування комплексів до розв'язання розглядуваних задач. Табл. 3. Іл. 14. Бібліогр. 24 назв.

UDC 539.3

Krivenko O.P., Lizunov P.P., Vorona Yu.V., Kalashnikov O.B. Comparative analysis of the stability and natural vibrations of shallow panels under the action of thermomechanical loads // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – Kyiv: KNUBA, 2023. – Issue 111. – P. 49-64.

A comparative analysis of solutions for nonlinear deformation, buckling and vibrations of thin elastic shells under the action of thermomechenical loads, obtained using the finite element moment scheme and using the LIRA-SAPR and SCAD software packages, has been carried out. The features of using complexes for solving the problems under consideration are given.

Tabl. 3. Fig. 14. Ref. 24.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, провідний науковий співробітник КРИВЕНКО Ольга Петрівна Адреса: 03037 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, НДІ будівельної механіки Тел.: +38(044) 245-48-29. Мобільний тел.: +38(066) 048-32-77 E-mail: olakop@ukr.net ORCID ID: https://orcid.org/0000-0002-1623-9679

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри будівельної механіки ЛІЗУНОВ Петро Петрович Адреса: 03035 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки Тел.: +38(044) 245-48-29. Мобільний тел.: +38(067) 921-70-05 E-mail: lizunov@knuba.edu.ua ORCID ID: https://orcid.org/0000-0003-2924-3025

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, завідувач відділу НДІ будівельної механіки ВОРОНА Юрій Володимирович Адреса: 03035 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, НДІ будівельної механіки Тел.: +38(044) 245-48-29. Мобільний тел.: +38(050) 750-13-61 E-mail: vorona.iuv@knuba.edu.ua ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-8130-7204

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): здобувач ступеня кандидата технічних наук, кафедра будівельної механіки Калашніков Олександр Борисович Адреса: 03035 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки Тел.: +38(044) 245-48-29 мобільний тел.: +38(066) 71-88-099 E-mail: kalash2d@gmail.com ORCID ID: https://orcid.org/0009-0009-7825-9809