УДК 539.3

ГРАНИЧНОЕЛЕМЕНТНА МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ КОЛИВАНЬ ПРУЖНИХ МАСИВІВ З УРАХУВАННЯМ ВИПАДКОВОГО ХАРАКТЕРУ КОНСТАНТ МАТЕРІАЛУ

Ю.В. Ворона,
канд. техн. наук

І.Д. Кара

В.І. Щербій

Київський національний університет будівництва і архітектури,
Повітрофлотський проспект., 31, м. Київ. 03680

Для дослідження за методом граничних елементів усталених гармонічних коливань пружних масивних елементів конструкцій розробляється чисельна методика, яка враховує випадковий характер фізико-механічних параметрів матеріалу. Відхилення випадкових величин від їхніх середніх значень вважається малим параметром, за яким виконується розвинення невідомих щільностей і ядер інтегральних рівнянь. Отримана система граничних інтегральних рівнянь, послідовне розв'язання яких дозволяє визначити статистичні характеристики невідомих. Для обчислення сингулярних частин інтегралів від фундаментальних розв'язків та їхніх похідних запропоновані наближені вирази, особливості яких не перевищують особливості ядер задачі статики.

Ключові слова: граничні інтегральні рівняння, фундаментальний розв'язок, випадкові величини, малий параметр.

Метод граничних елементів (МГЕ) набув широкого розповсюдження як основа для створення засобів, спрямованих на чисельне розв'язання задач, що виникають в різних галузях техніки [1]-[3]. В той же час питання, які стосуються урахування випадкового характеру багатьох параметрів, що використовуються при розрахунку за МГЕ конструкцій та їхніх елементів, в літературі висвітлені з недостатньою повнотою. Чисельній реалізації МГЕ для дослідження статичного деформування пружних об'єктів присвячена робота [4]. В роботі [5] за допомогою МГЕ розв'язується задача про розсіювання акустичної хвилі на жорсткій сферичній перешкоді. При цьому випадковими величинами вважались довжина падаючої хвилі та густина середовища.

В даній статті наводяться результати роботи по створенню ефективної чисельної методики для дослідження вимушених усталених коливань пружних тривимірних об'єктів складної форми. Вважається, що константи матеріалу Ламе λ і μ є випадковими величинами. В якості алгоритмічної основи обчислювального процесу використовується граничний аналог формули Соміліани для амплітуд переміщень, які виникають при гармонічних коливаннях:

$$\frac{1}{2}u_j(\vec{x},\omega)=\int_{\Gamma}\tau_k(\vec{y},\omega)U_{jk}(\vec{x},\vec{y},\omega)d\Gamma_y-\int_{\Gamma}u_k(\vec{y},\omega)T_{jk}(\vec{x},\vec{y},\omega)d\Gamma_y,\quad j,k=1,3, \tag{1}$$

де $u_j(\vec{x},\omega)$ – j-а компонента комплексної амплітуди коливань з круговою частотою ω; $\vec{x}\{x_1,x_2,x_3\},\vec{y}\{y_1,y_2,y_3\}\in\Gamma$; Γ – границя області V;

$\tau_j(\vec{y},\omega)=\lambda n_j(\vec{y})\dfrac{\partial u_m(\vec{y},\omega)}{\partial x_m}+\mu\left(\dfrac{\partial u_j(\vec{y},\omega)}{\partial y_k}+\dfrac{\partial u_k(\vec{y},\omega)}{\partial y_j}\right)n_k(\vec{y})$ – компоненти комплексної амплітуди напружень на площинці з нормаллю $\vec{n}\{n_1,n_2\}$; $U_{jk}(\vec{x},\vec{y},\omega)$ – фундаментальний розв'язок задачі (амплітуди переміщень в пружному двовимірному просторі від дії зосередженої сили, одиничної амплітуди, яка прикладена в точці $\vec{x}$ в напрямку осі $0x_j$) [2]:

$$U_{jk}(\vec{x},\vec{y},\omega)=\frac{1}{4\pi\mu}\left[\delta_{jk}U_0(r,\omega)-r_{,j}\,r_{,k}\,U_2(r,\omega)\right]; \tag{2}$$

$$U_0(r,\omega)=\frac{e^{\xi_2 r}}{r}\left(1-\frac{1}{\xi_2 r}+\frac{1}{\xi_2^2 r^2}\right)+\alpha\frac{e^{\xi_1 r}}{r}\left(\frac{1}{\xi_1 r}-\frac{1}{\xi_1^2 r^2}\right); \tag{3}$$

$$U_2(r,\omega)=\frac{e^{\xi_2 r}}{r}\left(1-\frac{3}{\xi_2 r}+\frac{3}{\xi_2^2 r^2}\right)-\alpha\frac{e^{\xi_1 r}}{r}\left(1-\frac{3}{\xi_1 r}+\frac{3}{\xi_1^2 r^2}\right); \tag{4}$$

$$\xi_1=\frac{\omega}{C_1};\quad \xi_2=\frac{\omega}{C_2}\quad C_2=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}};\quad C_1=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}};\quad \alpha=\frac{C_2^2}{C_1^2};\quad r_{,j}=\frac{\partial r}{\partial y_j}=\frac{y_j-x_j}{r};$$

$r=\sqrt{(y_1-x_1)^2+(y_2-x_2)^2}$ – відстань між точками $\vec{x}$ і $\vec{y}$; ρ - густина матеріалу; $T_{jk}(\vec{x},\vec{y},\omega)$ – узагальнена похідна фундаментального розв'язку, тобто напруження на площинках з компонентами нормалі, які виникають в пружному двовимірному просторі від дії вищезгаданої одиничної сили [3]:

$$T_{kj}(\vec{x},\vec{y},\omega)=\lambda n_j(\vec{y})\frac{\partial U_{km}(\vec{x},\vec{y},\omega)}{\partial y_m}+\mu\left(\frac{\partial U_{km}(\vec{x},\vec{y},\omega)}{\partial y_j}+\frac{\partial U_{kj}(\vec{x},\vec{y},\omega)}{\partial y_m}\right)n_m(\vec{y})=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\left[r_{,k}n_jT_1+(\delta_{jk}\frac{\partial r}{\partial n}+r_{,j}n_k)T_2+r_{,k}r_{,j}\frac{\partial r}{\partial n}T_3\right]; \tag{5}$$

$$T_1(r,\omega)=\frac{e^{\xi_2 r}}{r^2}\left(-2+\frac{6}{\xi_2 r}-\frac{6}{\xi_2^2 r^2}\right)-\frac{e^{\xi_1 r}}{r^2}\left[\alpha\left(2\xi_1 r-4+\frac{6}{\xi_1 r}-\frac{6}{\xi_1^2 r^2}\right)-(\xi_1 r-1)\right]; \tag{6}$$

$$T_2(r,\omega)=\frac{e^{\xi_2 r}}{r^2}\left(\xi_2 r-3+\frac{6}{\xi_2 r}-\frac{6}{\xi_2^2 r^2}\right)+\alpha\frac{e^{\xi_1 r}}{r^2}\left(2-\frac{6}{\xi_1 r}+\frac{6}{\xi_1^2 r^2}\right); \tag{7}$$

$$T_3(r,\omega)=\frac{e^{\xi_2 r}}{r^2}\left(-2\xi_2 r+12-\frac{30}{\xi_2 r}+\frac{30}{\xi_2^2 r^2}\right)+\alpha\frac{e^{\xi_1 r}}{r^2}\left(2\xi_1 r-12+\frac{30}{\xi_1 r}-\frac{30}{\xi_1^2 r^2}\right). \tag{8}$$

Подамо переміщення точок тіла у вигляді розвинення по ступеням випадкових параметрів λ і μ:

$$u_k(\lambda,\mu)=\overline{u}_k+\overset{\circ}{\lambda}\frac{\partial\overline{u}_k}{\partial\lambda}+\overset{\circ}{\mu}\frac{\partial\overline{u}_k}{\partial\mu}+\frac{1}{2}\overset{\circ}{\lambda}{}^2\frac{\partial^2\overline{u}_k}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{2}\overset{\circ}{\mu}{}^2\frac{\partial^2\overline{u}_k}{\partial\mu^2}+\overset{\circ}{\lambda}\overset{\circ}{\mu}\frac{\partial^2\overline{u}_k}{\partial\lambda\partial\mu}+\ldots,$$

де $\overline{u}_k=u_k(\overline{\lambda},\overline{\mu})$; $\overline{\lambda},\overline{\mu}$ - математичні сподівання випадкових величин λ і μ;

$\overset{\circ}{\lambda}=\lambda-\overline{\lambda}$, $\overset{\circ}{\mu}=\mu-\overline{\mu}$ - відповідні центровані випадкові величини.

Аналогічним чином можна подати компоненти фундаментального розв’язку і його похідної:

$$U_{jk}(\lambda,\mu)=\frac{1}{\mu}G_{jk}=\left(\frac{1}{\bar{\mu}}-\frac{\overset{\circ}{\mu}}{\bar{\mu}^2}+\frac{\overset{\circ}{\mu}{}^2}{\bar{\mu}^3}-\ldots\right)\left(\bar{G}_{jk}+\overset{\circ}{\lambda}\frac{\partial\bar{G}_{jk}}{\partial\lambda}+\overset{\circ}{\mu}\frac{\partial\bar{G}_{jk}}{\partial\mu}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\overset{\circ}{\lambda}{}^2\frac{\partial^2\bar{G}_{jk}}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{2}\overset{\circ}{\mu}{}^2\frac{\partial^2\bar{G}_{jk}}{\partial\mu^2}+\overset{\circ}{\lambda}\overset{\circ}{\mu}\frac{\partial^2\bar{G}_{jk}}{\partial\lambda\partial\mu}+\ldots\right), \tag{9}$$

$$T_{jk}(\lambda,\mu)=\bar{T}_{jk}+\overset{\circ}{\lambda}\frac{\partial\bar{T}_{jk}}{\partial\lambda}+\overset{\circ}{\mu}\frac{\partial\bar{T}_{jk}}{\partial\mu}+$$
$$+\frac{1}{2}\overset{\circ}{\lambda}{}^2\frac{\partial^2\bar{T}_{jk}}{\partial\lambda^2}+\frac{1}{2}\overset{\circ}{\mu}{}^2\frac{\partial^2\bar{T}_{jk}}{\partial\mu^2}+\overset{\circ}{\lambda}\overset{\circ}{\mu}\frac{\partial^2\bar{T}_{jk}}{\partial\lambda\partial\mu}+\ldots, \tag{10}$$

де

$$G_{jk}(\lambda,\mu)=\frac{1}{4\pi}\left[\delta_{jk}U_0(\lambda,\mu)-r,_j\,r,_k\,U_2(\lambda,\mu)\right],$$

$$\bar{G}_{jk}=\frac{1}{4\pi}\left[\delta_{jk}\bar{U}_0-r,_j\,r,_k\,\bar{U}_2\right],\ \frac{\partial\bar{G}_{jk}}{\partial\lambda}=\frac{1}{4\pi}\left[\delta_{jk}\frac{\partial\bar{U}_0}{\partial\lambda}-r,_j\,r,_k\frac{\partial\bar{U}_2}{\partial\lambda}\right],$$

$$\frac{\partial\bar{G}_{jk}}{\partial\mu}=\frac{1}{4\pi}\left[\delta_{jk}\frac{\partial\bar{U}_0}{\partial\mu}-r,_j\,r,_k\frac{\partial\bar{U}_2}{\partial\mu}\right],\ \frac{\partial^2\bar{G}_{jk}}{\partial\lambda^2}=\frac{1}{4\pi}\left[\delta_{jk}\frac{\partial^2\bar{U}_0}{\partial\lambda^2}-r,_j\,r,_k\frac{\partial^2\bar{U}_2}{\partial\lambda^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2\bar{G}_{jk}}{\partial\mu^2}=\frac{1}{4\pi}\left[\delta_{jk}\frac{\partial^2\bar{U}_0}{\partial\mu^2}-r,_j\,r,_k\frac{\partial^2\bar{U}_2}{\partial\mu^2}\right],\ldots$$

$$\bar{T}_{kj}=\frac{1}{4\pi}\left[r,_k n_j\bar{T}_1+(\delta_{jk}\frac{\partial r}{\partial n}+r,_j n_k)\bar{T}_2+r,_k r,_j\frac{\partial r}{\partial n}\bar{T}_3\right],$$

$$\frac{\partial\bar{T}_{kj}}{\partial\lambda}=\frac{1}{4\pi}\left[r,_k n_j\frac{\partial\bar{T}_1}{\partial\lambda}+(\delta_{jk}\frac{\partial r}{\partial n}+r,_j n_k)\frac{\partial\bar{T}_2}{\partial\lambda}+r,_k r,_j\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial\bar{T}_3}{\partial\lambda}\right],$$

$$\frac{\partial\bar{T}_{kj}}{\partial\mu}=\frac{1}{4\pi}\left[r,_k n_j\frac{\partial\bar{T}_1}{\partial\mu}+(\delta_{jk}\frac{\partial r}{\partial n}+r,_j n_k)\frac{\partial\bar{T}_2}{\partial\mu}+r,_k r,_j\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial\bar{T}_3}{\partial\mu}\right],$$

$$\frac{\partial^2\bar{T}_{kj}}{\partial\lambda^2}=\frac{1}{4\pi}\left[r,_k n_j\frac{\partial^2\bar{T}_1}{\partial\lambda^2}+(\delta_{jk}\frac{\partial r}{\partial n}+r,_j n_k)\frac{\partial^2\bar{T}_2}{\partial\lambda^2}+r,_k r,_j\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial^2\bar{T}_3}{\partial\lambda^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2\bar{T}_{kj}}{\partial\mu^2}=\frac{1}{4\pi}\left[r,_k n_j\frac{\partial^2\bar{T}_1}{\partial\mu^2}+(\delta_{jk}\frac{\partial r}{\partial n}+r,_j n_k)\frac{\partial^2\bar{T}_2}{\partial\mu^2}+r,_k r,_j\frac{\partial r}{\partial n}\frac{\partial^2\bar{T}_3}{\partial\mu^2}\right],\ldots$$

і в свою чергу

$$\bar{U}_0=U_0(\bar{\lambda},\bar{\mu}),\ \bar{U}_2=U_2(\bar{\lambda},\bar{\mu}),\ \bar{T}_1=T_1(\bar{\lambda},\bar{\mu}),\ \bar{T}_2=T_2(\bar{\lambda},\bar{\mu}),\ \bar{T}_3=T_3(\bar{\lambda},\bar{\mu}),$$

$$\frac{\partial\bar{U}_0}{\partial\lambda}=\frac{\partial U_0(\bar{\lambda},\bar{\mu})}{\partial\lambda},\ \frac{\partial\bar{U}_0}{\partial\mu}=\frac{\partial U_0(\bar{\lambda},\bar{\mu})}{\partial\mu},\ \frac{\partial\bar{U}_2}{\partial\lambda}=\frac{\partial U_2(\bar{\lambda},\bar{\mu})}{\partial\lambda},\ \frac{\partial\bar{U}_2}{\partial\mu}=\frac{\partial U_2(\bar{\lambda},\bar{\mu})}{\partial\mu},$$

$$\frac{\partial \overline{T_1}}{\partial\lambda}=\frac{\partial T_1(\overline{\lambda},\overline{\mu})}{\partial\lambda},\frac{\partial \overline{T_2}}{\partial\mu}=\frac{\partial T_1(\overline{\lambda},\overline{\mu})}{\partial\mu},\ \frac{\partial \overline{T_2}}{\partial\lambda}=\frac{\partial T_2(\overline{\lambda},\overline{\mu})}{\partial\lambda},\frac{\partial \overline{T_2}}{\partial\mu}=\frac{\partial T_2(\overline{\lambda},\overline{\mu})}{\partial\mu},$$

$$\frac{\partial^2 \overline{U_0}}{\partial\lambda^2}=\frac{\partial^2 U_0(\overline{\lambda},\overline{\mu})}{\partial\lambda^2},\ \frac{\partial^2 \overline{U_0}}{\partial\mu^2}=\frac{\partial^2 U_0(\overline{\lambda},\overline{\mu})}{\partial\mu^2},\ \frac{\partial^2 \overline{U_2}}{\partial\lambda^2}=\frac{\partial^2 U_2(\overline{\lambda},\overline{\mu})}{\partial\lambda^2}\ \text{тощо.}$$

Будемо вважати, що відхилення величин λ, μ від їх середніх значень $\overline{\lambda}, \overline{\mu}$ є малим. Тоді, підставляючі наведені рівності в граничний аналог формули Соміліани (1) і групуючи згідно алгоритму методу малого параметру [6, 7] вирази, що домножуються на параметри $\mathring{\lambda},\mathring{\mu}$ одного порядку, отримуємо низку рівнянь:

$$\frac{1}{2}\overline{u}_j+\int_\Gamma \overline{u}_k\overline{T}_{jk}d\Gamma=\int_\Gamma \tau_k\frac{1}{\overline{\mu}}\overline{G}_{jk}d\Gamma,\ \ j,k=1,3, \tag{11}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\overline{u}_j}{\partial\lambda}+\int_\Gamma\left(\frac{\partial\overline{u}_k}{\partial\lambda}\overline{T}_{jk}+\overline{u}_k\frac{\partial\overline{T}_{jk}}{\partial\lambda}\right)d\Gamma=\int_\Gamma \tau_k\frac{1}{\overline{\mu}}\frac{\partial\overline{G}_{jk}}{\partial\lambda}d\Gamma, \tag{12}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\overline{u}_j}{\partial\mu}+\int_\Gamma\left(\frac{\partial\overline{u}_k}{\partial\mu}\overline{T}_{jk}+\overline{u}_k\frac{\partial\overline{T}_{jk}}{\partial\mu}\right)d\Gamma=\int_\Gamma \tau_k\frac{1}{\overline{\mu}}\left(\frac{\partial\overline{G}_{jk}}{\partial\mu}-\frac{1}{\overline{\mu}}\overline{G}_{jk}\right)d\Gamma, \tag{13}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2\overline{u}_j}{\partial\lambda^2}+\int_\Gamma\left(\frac{\partial^2\overline{u}_k}{\partial\lambda^2}\overline{T}_{jk}+\overline{u}_k\frac{\partial^2\overline{T}_{jk}}{\partial\lambda^2}+2\frac{\partial\overline{u}_k}{\partial\lambda}\frac{\partial\overline{T}_{jk}}{\partial\lambda}\right)d\Gamma=\int_\Gamma \tau_k\frac{1}{\overline{\mu}}\frac{\partial^2\overline{G}_{jk}}{\partial\lambda^2}d\Gamma, \tag{14}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\partial^2\overline{u}_j}{\partial\mu^2}+\int_\Gamma\left(\frac{\partial^2\overline{u}_k}{\partial\mu^2}\overline{T}_{jk}+\overline{u}_k\frac{\partial^2\overline{T}_{jk}}{\partial\mu^2}+2\frac{\partial\overline{u}_k}{\partial\mu}\frac{\partial\overline{T}_{jk}}{\partial\mu}\right)d\Gamma=\\&=\int_\Gamma \tau_k\frac{1}{\overline{\mu}}\left(\frac{\partial^2\overline{G}_{jk}}{\partial\mu^2}-\frac{1}{\overline{\mu}}\frac{\partial\overline{G}_{jk}}{\partial\mu}+\frac{2}{\overline{\mu}}\overline{G}_{jk}\right)d\Gamma,\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\frac{\partial^2\overline{u}_j}{\partial\mu\partial\lambda}+\int_\Gamma\left(\frac{\partial^2\overline{u}_k}{\partial\mu\partial\lambda}\overline{T}_{jk}+\overline{u}_k\frac{\partial^2\overline{T}_{jk}}{\partial\mu\partial\lambda}+\frac{\partial\overline{u}_k}{\partial\lambda}\frac{\partial\overline{T}_{jk}}{\partial\mu}+\frac{\partial\overline{u}_k}{\partial\mu}\frac{\partial\overline{T}_{jk}}{\partial\lambda}\right)d\Gamma=\\&=\int_\Gamma \tau_k\frac{1}{\overline{\mu}}\left(\frac{\partial^2\overline{G}_{jk}}{\partial\mu\partial\lambda}-\frac{1}{\overline{\mu}}\frac{\partial\overline{G}_{jk}}{\partial\lambda}\right)d\Gamma,\ldots\end{aligned} \tag{16}$$

Для послідовного складання і розв’язання рівнянь (11)-(16) окрім виразів (3), (4), (6)-(8) для компонент ядер U_0, U_2, T_1, T_2, T_3 необхідні також вирази для їх похідних по параметрам λ і μ, які наведені нижче.

$$\frac{\partial U_0}{\partial\lambda}=\frac{\partial U_0}{\partial\xi_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial\lambda}+\frac{e^{\xi_1 r}}{r}\left(\frac{1}{\xi_1 r}-\frac{1}{\xi_1^2 r^2}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial\lambda}, \tag{17}$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial\mu}=\frac{\partial U_0}{\partial\xi_1}\frac{\partial\xi_1}{\partial\mu}+\frac{\partial U_0}{\partial\xi_2}\frac{\partial\xi_2}{\partial\mu}-\frac{e^{\xi_1 r}}{r}\left(\frac{1}{\xi_1 r}-\frac{1}{\xi_1^2 r^2}\right)\frac{\partial\alpha}{\partial\mu}, \tag{18}$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial \xi_1}=-\frac{e^{\xi_1 r}}{\xi_1^3 r^3}\left(\xi_1^2 r^2-2\xi_1 r\ +2\right),\quad \frac{\partial U_0}{\partial \xi_2}=\frac{e^{\xi_2 r}}{\xi_2^3 r^3}\left(\xi_2^2 r^2+2\right)\left(\xi_2 r\ -1\right),$$

$$\frac{\partial \xi_1}{\partial \lambda}=-\frac{i\omega}{2C_1(\lambda+2\mu)},\ \frac{\partial \xi_2}{\partial \lambda}=0,\ \frac{\partial \xi_1}{\partial \mu}=-\frac{i\omega}{C_1(\lambda+2\mu)},\ \frac{\partial \xi_2}{\partial \mu}=-\frac{i\omega}{2C_2\mu},$$

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}=-\frac{\mu}{(\lambda+2\mu)^2},\ \frac{\partial \alpha}{\partial \mu}=\frac{\lambda}{(\lambda+2\mu)^2},$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \lambda}=\frac{\partial U_2}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial \lambda}-\frac{e^{\xi_1 r}}{r}\left(1-\frac{3}{\xi_1 r}+\frac{3}{\xi_1^2 r^2}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}, \tag{19}$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \mu}=\frac{\partial U_2}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial \mu}+\frac{\partial U_2}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial \mu}-\frac{e^{\xi_1 r}}{r}\left(1-\frac{3}{\xi_1 r}-\frac{3}{\xi_1^2 r^2}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}, \tag{20}$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \xi_1}=-\alpha\frac{e^{\xi_1 r}}{\xi_1^3 r^3}\left(\xi_1^3 r^3-3\xi_1^2 r^2+6\xi_1 r-6\right),$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \xi_2}=\frac{e^{\xi_2 r}}{\xi_2^3 r^3}\left(\xi_2^3 r^3-3\xi_2^2 r^2+6\xi_2 r-6\right),$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \lambda}=\frac{\partial T_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial \lambda}-\frac{e^{\xi_1 r}}{r^2}\left(2\xi_1 r-4+\frac{6}{\xi_1 r}-\frac{6}{\xi_1^2 r^2}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}, \tag{21}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \mu}=\frac{\partial T_1}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial \mu}+\frac{\partial T_1}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial \mu}-\frac{e^{\xi_1 r}}{r^2}\left(2\xi_1 r-4+\frac{6}{\xi_1 r}-\frac{6}{\xi_1^2 r^2}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}, \tag{22}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \xi_1}=\frac{e^{\xi_1 r}}{\xi_1{}^3 r^4}\left[\xi_1{}^4 r^4+\alpha\left(-2\xi_1{}^4 r^4+2\xi_1{}^3 r^3-6\xi_1{}^2 r^2+12\xi_1 r-12\right)\right],$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \xi_2}=\frac{e^{\xi_2 r}}{\xi_2{}^3 r^4}\left(12-12\xi_2 r+6\xi_2{}^2 r^2-2\xi_2{}^3 r^3\right),$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \lambda}=\frac{\partial T_2}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial \lambda}+\frac{e^{\xi_1 r}}{r^2}\left(2-\frac{6}{\xi_1 r}+\frac{6}{\xi_1^2 r^2}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}, \tag{23}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \mu}=\frac{\partial T_2}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial \mu}+\frac{\partial T_2}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial \mu}+\frac{e^{\xi_1 r}}{r^2}\left(2-\frac{6}{\xi_1 r}+\frac{6}{\xi_1^2 r^2}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}, \tag{24}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \xi_1}=\alpha\frac{e^{\xi_1 r}}{\xi_1{}^3 r^4}\left(2\xi_1{}^3 r^3-6\xi_1{}^2 r^2+12\xi_1 r-12\right),$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \xi_2}=\frac{e^{\xi_2 r}}{\xi_2{}^3 r^4}\left(\xi_2{}^4 r^4-2\xi_2{}^3 r^3+6\xi_2{}^2 r^2-12\xi_2 r+12\right),$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial \lambda}=\frac{\partial T_3}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial \lambda}+\frac{e^{\xi_1 r}}{r^2}\left(2\xi_1 r-12+\frac{30}{\xi_1 r}-\frac{30}{\xi_1^2 r^2}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}, \tag{25}$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial \mu}=\frac{\partial T_3}{\partial \xi_1}\frac{\partial \xi_1}{\partial \mu}+\frac{\partial T_3}{\partial \xi_2}\frac{\partial \xi_2}{\partial \mu}+\frac{e^{\xi_1 r}}{r^2}\left(2\xi_1 r-12+\frac{30}{\xi_1 r}-\frac{30}{\xi_1^2 r^2}\right)\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}, \tag{26}$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial \xi_1}=\frac{e^{\xi 1 r}}{\xi_1{}^3 r^4}\alpha\left(60-60\xi_1 r+30\xi_1{}^2 r^2-10\xi_1{}^3 r^3+2\xi_1{}^4 r^4\right),$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial \xi_2}=\frac{e^{\xi_2 r}}{\xi_2{}^3 r^4}\left(-60+60\xi_2 r-30\xi_2{}^2 r^2+10\xi_2{}^3 r^3-2\xi_2{}^4 r^4\right).$$

Як бачимо, компоненти U_0 та U_2 та їх похідні містять в знаменнику величину r^3, а компоненти T_1, T_2, T_3 - величину r^4. Ця обставина виключає безпосереднє використання виразів (3), (4), (6)-(8), (17)-(26) для обчислення інтегралів по тим граничним елементам, на яких розташований полюс інтегрування. Для подолання цієї перешкоди можна скористатися розвиненням вказаних компонент та їх похідних в ряд Маклорена. Відповідні вирази наведені нижче.

$$U_0 = \sum_{m=1}^{M} r^{m-2}\kappa_m(m\gamma_m+\alpha), \tag{27}$$

$$U_2 = \sum_{m=1}^{M} r^{m-2}\kappa_m(m-2)(\gamma_m-\alpha), \tag{28}$$

$$T_1 = -\sum_{m=1}^{M} r^{m-3}\kappa_m(m-2)(2\gamma_m+2m\alpha-m-1), \tag{29}$$

$$T_2 = \sum_{m=1}^{M} r^{m-3}\kappa_m(m-2)[(m-1)\gamma_m+2\alpha], \tag{30}$$

$$T_3 = -2\sum_{m=1}^{M} r^{m-3}\kappa_m(m-2)(m-4)(\gamma_m-\alpha), \tag{31}$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial \lambda} = \sum_{m=1}^{M} r^{m-2}\left[\frac{\partial \kappa_m}{\partial \lambda}(m\gamma_m+\alpha)+\kappa_m\left(m\frac{\partial \gamma_m}{\partial \lambda}+\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}\right)\right], \tag{32}$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial \mu} = \sum_{m=1}^{M} r^{m-2}\left[\frac{\partial \kappa_m}{\partial \mu}(m\gamma_m+\alpha)+\kappa_m\left(m\frac{\partial \gamma_m}{\partial \mu}+\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}\right)\right], \tag{33}$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \lambda} = \sum_{m=1}^{M} r^{m-2}(m-2)\left[\frac{\partial \kappa_m}{\partial \lambda}(\gamma_m-\alpha)+\kappa_m\left(\frac{\partial \gamma_m}{\partial \lambda}-\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}\right)\right], \tag{34}$$

$$\frac{\partial U_2}{\partial \mu} = \sum_{m=1}^{M} r^{m-2}(m-2)\left[\frac{\partial \kappa_m}{\partial \mu}(\gamma_m-\alpha)+\kappa_m\left(\frac{\partial \gamma_m}{\partial \mu}-\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}\right)\right], \tag{35}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \lambda} = -\sum_{m=1}^{M} r^{m-3}(m-2)\left[\frac{\partial \kappa_m}{\partial \lambda}(2\gamma_m+2m\alpha-m-1)+\kappa_m\left(2\frac{\partial \gamma_m}{\partial \lambda}+2m\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}\right)\right], \tag{36}$$

$$\frac{\partial T_1}{\partial \mu} = -\sum_{m=1}^{M} r^{m-3}(m-2)\left[\frac{\partial \kappa_m}{\partial \mu}(2\gamma_m+2m\alpha-m-1)+\kappa_m\left(2\frac{\partial \gamma_m}{\partial \mu}+2m\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}\right)\right], \tag{37}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \lambda} = \sum_{m=1}^{M} r^{m-3}(m-2)\left[\frac{\partial \kappa_m}{\partial \lambda}((m-1)\gamma_m+2\alpha)+\kappa_m\left((m-1)\frac{\partial \gamma_m}{\partial \lambda}+2\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}\right)\right], \tag{38}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial \mu}=\sum_{m=1}^{M} r^{m-3}(m-2)\left[\frac{\partial \kappa_m}{\partial \mu}\left((m-1)\gamma_m+2\alpha\right)+\kappa_m\left((m-1)\frac{\partial \gamma_m}{\partial \mu}+2\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}\right)\right], \quad (39)$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial \lambda}=-2\sum_{m=1}^{M} r^{m-3}(m-2)(m-4)\left[\frac{\partial \kappa_m}{\partial \lambda}(\gamma_m-\alpha)+\kappa_m\left(\frac{\partial \gamma_m}{\partial \lambda}-\frac{\partial \alpha}{\partial \lambda}\right)\right], \quad (40)$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial \mu}=-2\sum_{m=1}^{M} r^{m-3}(m-2)(m-4)\left[\frac{\partial \kappa_m}{\partial \mu}(\gamma_m-\alpha)+\kappa_m\left(\frac{\partial \gamma_m}{\partial \mu}-\frac{\partial \alpha}{\partial \mu}\right)\right], \quad (41)$$

де

$$\kappa_m=\frac{1}{(m-1)!(m+1)}\left(\frac{i\omega}{C_1}\right)^{m-1}, \quad \gamma_m=\left(\frac{C_1}{C_2}\right)^{m-1},$$

$$\frac{\partial \kappa_m}{\partial \lambda}=\frac{m-1}{2(m-1)!(m+1)}\left(\frac{i\omega}{C_1}\right)^{m+1}\frac{1}{\rho\omega^2}, \quad \frac{\partial \kappa_m}{\partial \lambda}=\frac{m-1}{(m-1)!(m+1)}\left(\frac{i\omega}{C_1}\right)^{m+1}\frac{1}{\rho\omega^2},$$

$$\frac{\partial \gamma_m}{\partial \lambda}=\frac{m-1}{2\mu}\sqrt{\left(\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\right)^{m-3}}, \quad \frac{\partial \gamma_m}{\partial \mu}=\frac{(m-1)\lambda}{2\mu^2}\sqrt{\left(\frac{\lambda+2\mu}{\mu}\right)^{m-3}}.$$

Перші доданки розвинень (27)-(37) співпадають із своїми статичними аналогами, і тому їх інтегрування може бути здійснено за звичайними процедурами [Бреб, Бен….]. Але водночас постає питання стосовно кількості членів розвинень (27)-(37), які необхідно утримати для забезпечення необхідної точності обчислень. Співставлення результатів визначення похідних компонент ядер U_0, U_2, T_1, T_2, T_3 за формулами (17)-(26) з наближеними значеннями, отриманими за допомогою виразів (27)-(37) при різній кількості утриманих членів ряду і різних значеннях нормованого параметра частоти, міститься в таблицях 1-10.

Таблиця 1

Результати обчислення величини $\frac{\partial U_0}{\partial \mu}$ за формулами (18) та (33)

$\frac{\omega r}{C_1}$	$\bar{\mu}\,\mathrm{Re}\frac{\partial U_0}{\partial \mu}$				$\bar{\mu}\,\mathrm{Im}\frac{\partial U_0}{\partial \mu}$			
	(18)	(33) M=4	(33) M=8	(33) M=12	(18)	(33) M=4	(33) M=8	(33) M=12
0.5	0.151	0.170	0.151	0.151	-0.083	-0.079	-0.083	-0.083
1.0	0.329	0.597	0.333	0.329	0.109	0.235	0.11	0.109
1.5	0.198	1.309	0.282	0.198	0.493	1.333	0.521	0.493
2.0	-0.345	2.306	0.44	-0.329	0.640	2.306	0.440	0.645

Таблиця 2

Результати обчислення величини $\frac{\partial U_0}{\partial \lambda}$ за формулами (17) та (32)

$\frac{\omega r}{C_1}$	$\bar{\mu}\,\mathrm{Re}\frac{\partial U_0}{\partial \lambda}$				$\bar{\mu}\,\mathrm{Im}\frac{\partial U_0}{\partial \lambda}$			
	(17)	(32) M=2	(32) M=4	(32) M=8	(17)	(32) M=2	(32) M=4	(32) M=8
0.5	-0.024	-0.028	-0.024	-0.024	-0.013	-0.014	-0.013	-0.013
1.0	-0.015	-0.028	-0.014	-0.015	-0.023	-0.028	-0.023	-0.023
1.5	-0.002	-0.028	0.0	-0.002	-0.028	-0.042	-0.026	-0.028
2.0	0.012	-0.028	0.028	0.012	-0.025	-0.056	-0.019	-0.025

Таблиця 3

Результати обчислення величини $\frac{\partial U_2}{\partial \lambda}$ за формулами (19) та (34)

$\frac{\omega r}{C_1}$	$\bar{\mu}\,\mathrm{Re}\frac{\partial U_2}{\partial \lambda}$				$\bar{\mu}\,\mathrm{Im}\frac{\partial U_2}{\partial \lambda}$			
	(19)	(34) M=2	(34) M=4	(34) M=8	(19)	(34) M=2	(34) M=4	(34) M=8
0.5	-0.031	-0.028	-0.031	-0.031	-0.001	0.000	-0.001	-0.001
1.0	-0.038	-0.028	-0.042	-0.038	-0.008	0.000	-0.009	-0.008
1.5	-0.044	-0.028	-0.059	-0.044	-0.025	0.000	-0.031	-0.025
2.0	-0.039	-0.028	-0.083	0.040	-0.048	0.000	-0.074	-0.049

Таблиця 4

Результати обчислення величини $\frac{\partial U_2}{\partial \mu}$ за формулами (20) та (35)

$\frac{\omega r}{C_1}$	$\bar{\mu}\,\mathrm{Re}\frac{\partial U_2}{\partial \mu}$				$\bar{\mu}\,\mathrm{Im}\frac{\partial U_2}{\partial \mu}$			
	(20)	(35) M=4	(35) M=8	(35) M=12	(20)	(35) M=4	(35) M=8	(35) M=12
0.5	0.062	0.073	0.062	0.062	0.029	0.032	0.029	0.029
1.0	0.057	0.208	0.059	0.057	0.171	0.252	0.171	0.171
1.5	-0.165	0.434	-0.1	-0.165	0.317	0.852	0.339	0.317
2.0	-0.563	0.75	-0.04	-0.55	0.182	2.019	0.644	0.186

Таблиця 5

Результати обчислення величини $\frac{\partial T_1}{\partial \lambda}$ за формулами (21) та (36)

$\frac{\omega r}{C_1}$	$\bar{\mu}\,\mathrm{Re}\frac{\partial T_1}{\partial \lambda}$				$\bar{\mu}\,\mathrm{Im}\frac{\partial T_1}{\partial \lambda}$			
	(21)	(36) M=4	(36) M=8	(36) M=12	(21)	(36) M=4	(36) M=8	(36) M=12
0.5	-0.028	-0.028	-0.028	-0.028	0.001	0.001	0.001	0.001
1.0	-0.031	-0.028	-0.031	-0.031	0.003	0.005	0.003	0.003
1.5	-0.041	-0.028	-0.041	-0.041	0.006	0.016	0.006	0.006
2.0	-0.062	-0.028	-0.059	-0.062	0.002	0.037	0.003	0.002

Таблиця 6

Результати обчислення величини $\frac{\partial T_1}{\partial \mu}$ за формулами (22) та (37)

$\frac{\omega r}{C_1}$	$\bar{\mu}\,\mathrm{Re}\frac{\partial T_1}{\partial \mu}$				$\bar{\mu}\,\mathrm{Im}\frac{\partial T_1}{\partial \mu}$			
	(22)	(37) M=4	(37) M=8	(37) M=12	(22)	(37) M=4	(37) M=8	(37) M=12
0.5	0.006	-0.003	0.006	0.006	-0.023	0.026	-0.023	-0.023
1.0	0.035	-0.097	0.033	0.035	-0.131	-0.206	-0.131	-0.131
1.5	0.257	-0.253	0.193	0.256	-0.205	0.696	-0.227	-0.205
2.0	0.595	-0.472	0.003	0.581	0.016	-1.649	-0.263	0.012

Таблиця 7

Результати обчислення величини $\frac{\partial T_2}{\partial \lambda}$ за формулами (23) та (38)

$\frac{\omega r}{C_1}$	$\bar{\mu}\,\mathrm{Re}\frac{\partial T_2}{\partial \lambda}$				$\bar{\mu}\,\mathrm{Im}\frac{\partial T_2}{\partial \lambda}$			
	(23)	(38) M=4	(38) M=8	(38) M=12	(23)	(38) M=4	(38) M=8	(38) M=12
0.5	0.031	0.031	0.031	0.031	0.001	0.001	0.001	0.001
1.0	0.038	0.042	0.038	0.038	0.008	0.009	0.008	0.008
1.5	0.044	0.059	0.044	0.044	0.025	0.031	0.025	0.025
2.0	0.039	0.083	0.04	0.039	0.048	0.074	0.049	0.048

Таблиця 8

Результати обчислення величини $\frac{\partial T_2}{\partial \mu}$ за формулами (24) та (39)

$\frac{\omega r}{C_1}$	$\bar{\mu}\,\mathrm{Re}\frac{\partial T_2}{\partial \mu}$				$\bar{\mu}\,\mathrm{Im}\frac{\partial T_2}{\partial \mu}$			
	(24)	(39) M=4	(39) M=8	(39) M=16	(24)	(39) M=4	(39) M=8	(39) M=16
0.5	-0.001	-0.012	-0.001	-0.001	0.043	0.05	0.043	0.043
1.0	-0.117	-0.167	-0.106	-0.117	0.199	0.397	0.202	0.199
1.5	-0.557	0.41	-0.302	-0.557	0.119	1.34	0.219	0.119
2.0	-0.859	0.75	1.46	-0.859	-0.657	3.177	0.575	-0.657

Таблиця 9

Результати обчислення величини $\frac{\partial T_3}{\partial \lambda}$ за формулами (25) та (40)

$\frac{\omega r}{C_1}$	$\bar{\mu}\,\mathrm{Re}\frac{\partial T_3}{\partial \lambda}$				$\bar{\mu}\,\mathrm{Im}\frac{\partial T_3}{\partial \lambda}$			
	(25)	(40) M=4	(40) M=8	(40) M=12	(25)	(40) M=4	(40) M=8	(40) M=12
0.5	-0.087	-0.087	-0.087	-0.087	0.0	0.0	0.0	0.0
1.0	-0.10	-0.097	-0.10	-0.10	-0.002	0.0	-0.002	-0.002
1.5	-0.126	-0.115	-0.126	-0.126	-0.012	0.0	-0.012	-0.012
2.0	-0.163	-0.139	-0.157	-0.163	-0.044	0.0	-0.042	-0.044

Таблиця 10

Результати обчислення величини $\dfrac{\partial T_3}{\partial \mu}$ за формулами (26) та (41)

$\dfrac{\omega r}{C_1}$	$\bar{\mu}\,\mathrm{Re}\dfrac{\partial T_3}{\partial \mu}$				$\bar{\mu}\,\mathrm{Im}\dfrac{\partial T_3}{\partial \mu}$			
	(26)	(41) *M*=4	(41) *M*=8	(41) *M*=16	(26)	(41) *M*=4	(41) *M*=8	(41) *M*=16
0.5	0.138	0.128	0.138	0.138	0.005	0.0	0.005	0.005
1.0	0.356	0.264	0.343	0.356	0.144	0.0	0.140	0.144
1.5	0.541	0.49	0.228	0.541	0.788	0.0	0.656	0.788
2.0	-0.141	0.806	-2.954	-0.142	1.966	0.0	0.351	1.966

Збіжність результатів, отриманих за допомогою різних виразів і наведених в таблицях 1-10, свідчить про надійність отриманої системи співвідношень в широкому диапазоні параметра частоти коливань і про можливість побудови на основі цих співвідношень ефективного чисельного алгоритму.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Бенерджи П., Баттерфилд Р.* Методы граничных элементов в прикладных науках. - М.: Мир, 1984. – 494 с.
2. *Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л.* Методы граничных элементов. - М.: Мир, 1987. – 524 с.
3. *Becker A.A.* The Boundary Element Method in A Complete Course, McGraw-Hill, New York, 1992. Engineering:
4. *Ettouney M., Benaroya H., Wright J.* Boundary element methods in probabilistic structural analysis (PBEM) // Applied Mathematical Modelling Volume 13, Issue 7, July 1989, Pages 432-44.
5. *Daddazio R., Ettouney M.* Boundary Element Method in Probabilistic Acoustic Scattering Problems // Boundary Element Methods in Engineering: Proceedings of the International Simposium on Boundary Element Methods. Advances in Solid and Fluid Mechanics, 1989, p.529-543.
6. *Найфэ А.* Введение в методы возмущений. – М.: Мир, 1984. – 535 с.
7. *Блехман И.И., Мышкис А.Д., Пановко Я.Г.* Механика и прикладная математика. Логика и особенности приложений математики. – М.: Наука, 1990 – 360 с.

REFERENCES

1. *Banerjee P.K., Butterfield R.* Metody granichnykh elementov v prikladnykh naukakh [Boundary element methods in engineering science]. - M.: Mir, 1984. – 494 s. (rus.)
2. *Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C.* Metody granichnykh elementov [Boundary Element Techniques]. - M.: Mir , 1987. – 524 s. (rus.)
3. *Becker A.A.* The Boundary Element Method in Engineering: A Complete Course, McGraw-Hill, New York, 1992.
4. *Ettouney M., Benaroya H., Wright J.* Boundary element methods in probabilistic structural analysis (PBEM) // Applied Mathematical Modelling Volume 13, Issue 7, July 1989, Pages 432-44.
5. *Daddazio R., Ettouney M.* Boundary Element Method in Probabilistic Acoustic Scattering Problems // Boundary Element Methods in Engineering: Proceedings of the International Simposium on Boundary Element Methods. Advances in Solid and Fluid Mechanics, 1989, p.529-543.
6. *Nayfeh A.* Vvedeniye v metody vozmushcheniy [Introduction to Perturbation Methods]. – M.: Mir, 1984. – 535 s. (rus.)
7. *Blekhman I.I.. Myshkis A.D., Panovko Ya.G.* Mekhanika i prikladnaya matematika. Logika i osobennosti prilozheniy matematiki [Mechanics and applied mathematics. The logic and features of mathematics applications]. – M.: Nauka, 1990 – 360 s. (rus.)

Стаття надійшла 11.05.2018

Vorona Yu. V., Kara I.D., Shcherbii V. I.

BOUNDARY ELEMENT TECHNIQUE FOR PROBABILISTIC ANALYSIS OF ELASTIC SOLIDS VIBRATIONS

A numerical technique for the boundary element method analysis of steady-state harmonic oscillations of elastic massive structural elements is developed. The technique takes into account the random nature of the physicomechanical parameters of the material. The deviations of random variables from their average values are considered as a small parameters. The decomposition of unknown densities and kernels of integral equations into a power series by these small parameters is performed. A system of boundary integral equations was obtained using the procedure of the perturbation method. The successive solving of the mentioned equations allows to determine the statistical characteristics of the unknown quantities. Expressions for the derivatives of the fundamental solution of the problem with respect to a small parameter which are the kernels of integral equations are given. A set of approximate expressions was obtained by expanding the fundamental solutions and their derivatives into Maclaurin series in terms of the distance from integration pole parameter. The singularities of the proposed representations coincide with the singularities of the corresponding kernels of the statics problem so they can be used for calculating the integrals over boundary elements containing an integration pole. A comparison of the obtained approximate expressions with their exact analogues is carried out. The number of members of the truncated series which is necessary for a satisfactory representation of the kernels of integral equations in a wide frequency range has been determined.

Keywords: boundary integral equations, fundamental solution, random variables, small parameter.

Ворона Ю. В., Кара І. Д., Щербий В. И.

ГРАНИЧНОЭЛЕМЕНТНАЯ МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ МАССИВОВ С УЧЕТОМ СЛУЧАЙНОГО ХАРАКТЕРА КОНСТАНТ МАТЕРИАЛА

Разрабатывается численная методика для исследования методом граничных элементов установившихся гармонических колебаний упругих массивных элементов конструкций с учетом случайного характера физико-механических параметров материала. Отклонение случайных величин от их средних значений считается малым параметром, по которому выполняются разложения неизвестных плотностей и ядер интегральных уравнений. Получена система граничных интегральных уравнений, последовательное решение которых позволяет определить статистические характеристики неизвестных. Для вычисления сингулярных частей интегралов от фундаментальных решений и их производных предложены приближенные выражения, особенности которых не превышают особенности ядер задачи статики.

Ключевые слова: граничные интегральные уравнения, фундаментальное решение, случайные величины, малый параметр.

УДК 539.3

Ворона Ю.В., Кара І.Д., Щербій В.І. **Граничноелементна методика дослідження коливань пружних масивів з урахуванням випадкового характеру констант матеріалу** // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2018. - К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 59-70.

Для дослідження за методом граничних елементів усталених коливань масивних елементів конструкцій розробляється методика, яка враховує випадковий характер фізико-механічних параметрів матеріалу.

Табл. 10. Іл. 0. Бібліогр. 7 назв.

Vorona Yu. V., Kara I.D., Shcherbii V. I. **Boundary element technique for probabilistic analysis of elastic solids vibrations** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2018. – Issue 100. – P. 59-70.

A boundary element technique for the analysis of steady-state oscillations of solid structural elements is developed. The technique takes into account the random nature of the physicomechanical parameters of the material.

Tabl. 10. Fig. 0. Ref. 7

Ворона Ю. В., Кара И. Д., Щербий В. И. **Граничноэлементная методика исследования колебаний упругих массивов с учетом случайного характера констант материала** // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 2018. – К.: КНУСА, 2018. - Вып. 100. – С. 59-70.

Для исследования по методу граничных элементов установившихся колебаний массивных элементов конструкций разрабатывается методика, которая учитывает случайный характер физико-механических параметров материала.
Табл. 10. Ил. 0. Библиогр. 7 назв.

Автор: *кандидат технічних наук, старший науковий спіробітник, професор кафедри будівельної механіки КНУБА ВОРОНА Юрій Володимирович*
Адреса робоча*: 03680, Київ, Повітрофлотський пр. 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки.*
Робочий тел.: *+38(044) 245-48-29*
Мобільний тел.*: +38(050)750-13-61*
E-mail: *yuvv@ukr.net*
ORCID ID: https://orcid.org/0000-0001-8130-7204

Автор: *асистент кафедри будівельної механіки КАРА Ірина Дмитрівна*.
Адреса робоча: *03680 Україна, м. Київ, проспект Повітрофлотський, 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки.*
Робочий тел.: *+380 (44) 241-54-12;*
Мобільний тел.*: +380 (93) 398-63-24;*
E-mail: *ikruska007@ukr.net*

Автор: *аспірант кафедри будівельної механіки Щербій Владислав Іванович*
Адреса робоча*: 03680, Київ, Повітрофлотський пр. 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра будівельної механіки.*
Мобільний тел.*: +38(093) 623288*
E-mail: *scherby248@mail.com*