

УДК 517.11+519.92+539.3

НЕЧІТКЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ОПТИМАЛЬНОМУ ПРОЕКТУВАННІ ШАРНІРНО-СТЕРЖНЕВИХ СИСТЕМ

В.О. Бараненко,

д-р техн. наук, професор кафедри будівельної механіки

Д.Л. Волчок,

канд. техн. наук, доцент кафедри будівельної механіки

*Придніпровська державна академія будівництва та архітектури
м. Дніпро, вул. Чернишевського, 24а, 49600*

В даній роботі розглядаються задачі оптимального проектування шарнірно-стержневої системи, на яку накладено обмеження на жорсткість, міцність та стійкість в умовах нечіткої та нечітко-випадкової інформації. Запропоновано методика розв'язання задачі на основі застосування теорії нечітких множин. Розроблено алгоритм реалізації запропонованої методики. Описано основні етапи нечіткого моделювання: фазифікація, оптимізація та аналіз, дефазифікація. Оптимізація здійснено на основі методу динамічного програмування. Проведено аналіз вибору коефіцієнта надійності по навантаженню. Наведено результати впливу форми і характеру функції належності при нечіткому завданні інформації на оптимальні розв'язки.

Ключові слова: шарнірно-стержнева система, нечіткі та нечітко-випадкові величини, оптимальне проектування конструкцій, нечітке моделювання, метод динамічного програмування.

Вступ

В теорії проектування конструкцій оптимальні задачі формулюються, в основному, у вигляді детермінованих (чітких) моделей математичного програмування. Представляє інтерес розгляд таких задач оптимального проектування конструкцій (ОПК), в яких була б врахована інформаційна ситуація стосовно вихідних даних, умов закріплення, поведінки середовища, цілей та інших факторів невизначеної природи. Для формулювання і розв'язання таких задач потрібен відповідний математичний апарат, який априорно включав би в себе можливість урахування цієї ситуації. Поняття невизначеність інтуїтивно зрозуміло кожній людині. Проте її формалізація викликає певні труднощі.

Невизначеність в механіці характеризується наявністю даних випадкової, нечіткої або неточної природи. Можлива ситуація, коли відсутня взагалі інформація. Проектування і виготовлення конструкції чи споруди здійснюється в межах нормативних документів. Але вони можуть суттєво змінюватися в певних границях. Тим самим і породжується невизначеність. Наприклад, механічні і фізичні характеристики подаються в довідниках, як правило, в інтервальному вигляді.

Відношення до невизначеності довгий час було і остається зневажливим. Думка про "терпимість" конструкції, що проектується, до вихідних даних, які б мали властивість змінюватися є приваблива. Тут під терміном "терпимість" розуміємо здатність механічної системи перетворювати вихідну неповну інформацію у детерміновані результати через використання методів моделювання, аналізу, оптимізації, "м'яких обчислень".

Моделювання випадкової невизначеності здійснюється в границях теорії ймовірностей. Тут апріорно передбачаються відомими і достовірними функції розподілу та щільності випадкової величини, їх числові характеристики. Цю інформацію отримують на основі обробки великої статистичної вибірки.

В механіці теорія ймовірностей займає важливе місце при розгляді різноманітних задач аналізу, ОПК з урахуванням надійності [1]. Довгий час вважалося, що все необхідне для роботи за невизначеністю дає теорія ймовірностей. Але з часом у зв'язку зі зміною сприйняття людиною навколишнього середовища адекватність цього підходу почала визивати сумніви.

Опис даних у вигляді, наприклад, "навантаження прикладене десь в середині балки", "величина навантаження трохи більше, ніж 10 кН ", "частота коливань досягає приблизно 20 Гц ", "коефіцієнт знаходиться в інтервалі..." і т.д. здійснюється в межах першого етапу (фазифікації) нечіткого моделювання. Цей етап є відповідальним. Він дозволяє за допомогою функції належності описати нечітку множину того чи іншого фактора, поданого у словесному вигляді - квантифікаторів. Функція належності, як і функція розподілу в теорії ймовірностей йде поза теорії нечітких множин. Вона може бути побудована, наприклад, за невеликою статистичною вибіркою. Квантифікатори, в основному, моделюються за допомогою функції належності трикутного, трапецеїдального, гаусового типу [2].

Другий етап нечіткого моделювання є аналіз (або оптимізація) механічної системи з урахуванням нечітких множин. Тут використовується α -рівневий підхід, метод Монте-Карло, властивості теорії нечітких множин.

Отримані нечіткі результати трансформують у чіткі на третьому етапі нечіткого моделювання - дефазифікації, наприклад, за способом очікуваного значення [3], середнього центру [4] та інше.

Мета цієї роботи - адаптувати теорію нечітких множин до класу задач будівельної механіки - оптимального проектування пружних шарнірно-стержневих систем (ШСС).

1. Означення та об'єкт оптимізації

Розглянемо оптимальне проектування статично визначеної ШСС з n елементами. Припускається, що шарніри є ідеально гладкими, а осі усіх елементів системи проходять через геометричні центри. Зовнішнє навантаження є зосереджені сили, які прикладені у r вузлах ($j = 1, 2, \dots, r$); $r \leq m$, де m - число усіх вузлів ШСС. Вага конструкційних деталей вузлів і стержнів конструкції включається в зовнішнє навантаження. Припускається, що навантаження має невизначений опис типу "діюча сила близька до...", "приблизно дорівнює...", "трохи більше (менше), ніж..." та інше. Осьова сила по довжині елемента вважається сталою величиною, а переріз елементів не змінює свою конфігурацію.

Означення 1. Під оптимальною конструкцією розуміють механічну систему мінімальної ваги (об'єму, вартості та інш.), яка задовольняє умовам несучої здатності - міцності, стійкості, жорсткості і конструктивних обмежень, що накладаються на величину площ поперечних перерізів елементів - змінних проектування.

Змінними проектування можуть бути площі поперечних перерізів, у випадку згину елементів - моменти інерції. Умову міцності і стійкості розтягнутих і стиснених елементів ШСС, які сприймають зовнішнє навантаження, запишемо як

$$\sigma_i = \frac{|N_i|}{A_i} \leq R_i^*, \quad (1)$$

де

$$R_i^* = \begin{cases} R_o, & \text{для розтягнутих елементів } (N_i > 0) \\ \varphi_{\min} R_o, & \text{для стиснутих елементів } (N_i < 0) \end{cases}$$

Тут позначено через N_i , σ_i відповідно поздовжнє зусилля елемента і нормальне напруження. Величина φ_{\min} - коефіцієнт поздовжнього згину елемента, який відповідає максимальній гнучкості. У відповідності [5] для основних елементів системи (поясів ферм, колон, пілонів) $\varphi_{\min} = 0.8 \dots 0.9$, а для решіток $\varphi_{\min} = 0.6 \dots 0.7$. Довжину елемента і площу поперечного перерізу позначимо відповідно через l_i та A_i . Матеріал елемента характеризується модулем пружності E і розрахунковим опором R_o .

Умова жорсткості - вертикальне переміщення деякого вузла k ШСС, задається формулою Мора

$$y_k = \sum_{k=1}^n \frac{D_{ik}}{A_k} \leq [y]; \quad D_{ik} = \frac{N_i N_{ik} l_i}{E}, \quad (2)$$

де N_{ik} - осьова сила в i - елементі від дії одиночного навантаження, яке прикладене у вузол k за напрямом шуканого переміщення. Величина $[y]$ є допустимим значенням переміщення y , тобто $y \leq [y] \leq y^{\max}$, де y^{\max} значення переміщення y при граничних значеннях A_i із умов міцності.

Конструктивним обмеженням може бути, наприклад, двобічна нерівність (обмеження на габарити)

$$A_i^- \leq A_i \leq A_i^+, \quad (3)$$

де A_i^- , A_i^+ - задані величини. Величина A_i в межах інтервалу (3) може змінюватись дискретним чи неперервним чином. Дискретне завдання припускає наявність сортаменту, який включає певне число профілів. Значення осьових сил $N = \{N_1, N_2, \dots, N_n\}$, $\bar{N}_k = \{N_{1k}, N_{2k}, \dots, N_{nk}\}$ визначають із рівнянь рівноваги системи (за допомогою методу матриці сил), а саме:

$$N = BP; \quad \bar{N}_k = B\bar{P},$$

в якому $P = (P_1, P_2, \dots, P_m)$; $\bar{P}_k \in (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ - є вектор одиночного навантаження, яке прикладене до деякого вузла k . Об'єм системи має вигляд

$$V = \sum_{i=1}^n l_i A_i. \quad (4)$$

Використовуючи наведені вище співвідношення, сформулюємо таку оптимізаційну задачу: в непустій множині $\Omega = \bigcap_{i=1}^n \Omega_i$ точок

$A = \{A_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) знайти такі елементи A_i^{opt} , які задовольняють обмеження (1-3) і надають мінімум показнику якості (4), тобто

$$(V^{opt}, A^{opt}) = \arg \left\{ \min_{A_i \in \Omega_i} \sum_{i=1}^n l_i A_i \left| \sum_{i=1}^n D_{ik} / A_i \leq [y] \right. \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5)$$

де множини Ω_i ($i = 1, 2, \dots, n$) утворюються із умов (1), (3) а саме:

$$\Omega_i = \left\{ A_i : A_i^* \leq A_i \leq A_i^+; A_i^* = \max(|N_i| / R_i^*; A_i^+) \right\}. \quad (6)$$

Зауваження 1. Величини N_i і D_i є дійснозначними функціями діючого навантаження P .

Зауваження 2. Оптимізаційна модель (5)-(6) для певного навантаження P є детермінованою.

Зауваження 3. Якщо розглядається проектування статично невизначеної системи в модель (5) уводять до розгляду також, в якості обмеження, рівняння сумісності деформацій.

В тому випадку, коли навантаження має нечіткий опис $\xi = \tilde{P}$, змінні зусилля N_i^{fuz} , величини перерізів A_i^{fuz} та величина обсягу V^{fuz} є також нечіткими величинами, а задача (5) прийме вигляд:

$$(V^{fuz}, A^{fuz}) = \arg \left\{ \min_{A_i \in \Omega_i(\xi)} \sum_{i=1}^n l_i A_i \left| \sum_{i=1}^n D_{ik}(\xi) / A_i \leq [y] \right. \right\}, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Для її розв'язання залучено математичний апарат теорії нечітких множин [2]. При детермінованих даних в задачі (5)-(6) використано метод динамічного програмування (ДП) [6, 7].

2. Чисельна ілюстрація оптимального проектування конструкції

2.1. Формулювання вихідних (початкових) даних в оптимізаційній моделі

На прикладі оптимального проектування нескладної статично визначеної шарнірно-стержевої системи (ШСС) мінімального об'єму, не порушуючи загальності, розглянемо підхід теорії нечітких множин до

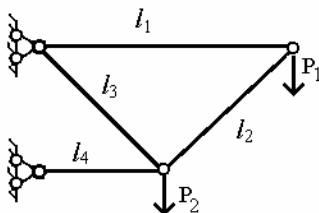


Рис. 1. Розрахункова схема

випадку, коли діюче навантаження у вузлі є нечітко означеним, наприклад, "у вузол 1 прикладене навантаження близьке до $2 \kappa H$ ", або "прикладене навантаження трохи більше, ніж $2 \kappa H$ " та інше.

ШСС має чотири елемента ($n = 4$) і два вузли ($m = 2$) (рис. 1).

У вузлі цієї конструкції прикладене навантаження $P = \{P_1, P_2\}$. Довжини

елементів задаються як $l_1 = 1000\sqrt{2}$ мм, $l_2 = l_3 = 1000$ мм, $l_4 = 500\sqrt{2}$ мм. Модуль пружності E дорівнює 207 кН/мм², границю моменту опору взято $R_0 = 0,15$ кН/мм² для розтягнутих елементів. Для стиснутих елементів $\varphi_{\min} R_0$, де φ_{\min} - коефіцієнт поздовжнього прогину. В числових розрахунках взято $\varphi_{\min} = 2/3$.

Зусилля $N = \{N_1, N_2, N_3, N_4\}$ визначаються з рівняння $N = BP$, де B - матриця перетворення сил $P = (P_1, P_2)$. В прикладі, що розглядається, матриця B має вид

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ -2 & -1 \end{bmatrix},$$

елементи якої отримано способом вирізання вузлів.

2.2. Метод динамічного програмування

Модель (5)-(6) в математичному програмуванні відносять до класу так званих задач "розподілу ресурсу", до яких адаптовано метод динамічного програмування [7]. За цим методом уведемо до розгляду таку функцію Беллмана

$$f_i(d_i) = \min_{A_i, A_{i+1}, \dots, A_n} \sum_{j=i}^n l_j A_j, \quad (8)$$

$f_i(d_i)$ - мінімальне значення об'єму ШСС в припущенні, що процес пошуку $\{A_i^{opt}\}$ ($j = i, i+1, \dots, n$) починається з елемента $j = i$ і закінчується елементом $j = n$. Аргументом цієї функції є величина "ресурсу" d_i , яка пов'язана зі змінною проектування A_i таким співвідношенням

$$d_i = \sum_{j=i}^n D_j / A_j, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad d_i \geq 0; \quad d_p = [y]. \quad (9)$$

Із означення (9) випливає

$$d_i = \frac{D_i}{A_i} + \sum_{j=i+1}^n D_j / A_j \rightarrow d_i = \frac{D_i}{A_i} + d_{i+1},$$

звідки маємо

$$d_{i+1} = d_i - \frac{D_i}{A_i}. \quad (10)$$

Аналогічним чином із означення (10) побудуємо таке рівняння:

$$f_i(d_i) = \min_{A_i} \left[l_i A_i + \min_{A_{i+1}, A_{i+2}, \dots, A_n} \sum_{j=i+1}^n l_j A_j \right],$$

із якого випливає

$$f_i(d_i) = \min_{A_i} [l_i A_i + f_{i+1}(d_{i+1})], \quad i = n-1, n-2, \dots, 1; \quad d_1 = [y], \quad f_{n+1}(d_{n+1}) \equiv 0. \quad (11)$$

Рівняння (9) побудовано з використанням принципу Беллмана [6]. Воно є основним функціональним рівнянням методу динамічного програмування. За термінологією цього методу d_i – є змінна "стану", A_i – є змінною "керування" (проектування).

Для $i = n$ із означення (9) маємо

$$d_n = D_n / A_n, \quad A_n = D_n / d_n, \quad (12)$$

$$f_n(d_n) = \min_{A_n} l_n A_n = l_n D_n / d_n. \quad (13)$$

Розглянемо випадок, коли $i = n - 1$. Рівняння (11) для цього випадку має вигляд

$$f_{n-1}(d_{n-1}) = \min_{A_{n-1}} [l_{n-1} A_{n-1} + f_n(d_n)], \quad d_n = d_{n-1} - D_{n-1} / A_{n-1}. \quad (14)$$

Перепишемо рівняння (14) з урахуванням означення (13), тобто

$$f_{n-1}(d_{n-1}) = \min_{A_{n-1}} \left[l_{n-1} A_{n-1} + \frac{l_n D_n}{d_{n-1} - D_{n-1} / A_{n-1}} \right].$$

Виконуючі далі аналогічні дії для $i = n - 2, n - 3, \dots, 1$ за методом математичної індукції отримаємо таке рівняння

$$f_i(d_i) = \min_{A_i} H(A_i), \quad (15)$$

де

$$H(A_i) = l_i A_i + T_i + \frac{D_n l_n}{d_i - S_i^* - D_n / A_i}, \quad (16)$$

$$T_i = \sum_{j=i}^{n-1} l_j A_j, \quad \text{для } i = 1, 2, \dots, n-2,$$

$$S_i^* = \begin{cases} \sum_{j=i}^{n-1} D_j / A_j^*, & \text{для } i = 1, 2, \dots, n-2 \\ 0, & \text{для } i = n-1. \end{cases} \quad (17)$$

Використання необхідної умови існування екстремуму функції $H(A_i)$ із (15)-(16) дає таке рівняння відносно змінної A_i

$$l_i A_i^2 - \frac{D_n l_n D_i}{(a_i^* A_i - D_i)^2} = 0, \quad (18)$$

де $a_i^* = d_i - S_i^*$.

Розв'язком рівняння (18) буде

$$\left. \begin{aligned} A_i^0 &= \frac{D_i + \sqrt{l_n D_n D_i / l_i}}{a_i^*} \\ i &= 1, 2, \dots, n-1; \\ A_n^0 &= \frac{D_n}{d_n}. \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Для кожного значення індексу i формується оптимальний розв'язок за виразом

$$\{A_i^{opt}\} = \begin{cases} A_i^0, & \text{якщо } A_i^- < A_i^0 < A_i^+ \\ A_i^-, & \text{якщо } A_i \leq A_i^0 \\ A_i^+, & \text{якщо } A_i \geq A_i^+ \end{cases}, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (20)$$

Зауваження 4. В задачі (15) має місце мінімум, тому що

$$\frac{d^2 H}{dA_i^2} = A_i [l_i + D_n l_n D_i (a_i^*)^2 + D_n l_n D_i^2 a_i^*] \geq 0$$

(достатня умова існування екстремуму).

2.3. Ітераційна процедура

Отримані співвідношення (19) - (20) покладено в основу такого рекурентного алгоритму:

1. Задається початкове наближення $\{A_i^*\}$ ($i = 1, 2, \dots, n; k = 0$) за умови $A_i^{(k)} > A_i^-$ і обчислюється відповідне значення об'єму $V^{(k)} = \sum_{i=1}^n l_i A_i^{(k)}$.
2. Обчислюються величини S_i^* ($i = 1, 2, \dots, n-1$) за формулою (17).
3. Для $i = 1, 2, \dots, n-1$ за виразом (19) обчислюється A_i^0 ; $i = 1, 2, \dots, n$ з урахуванням, що $d_1 = [y]$.
4. Формується нове наближення змінної керування за правилом (20), тобто $\{A_i^{(k+1)}\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) і відповідне значення об'єму $V^{(k+1)} = \sum_{i=1}^n l_i A_i^{(k+1)}$.
5. Умовою закінчення рекурентних обчислень є

$$\left| \frac{V^{(k+1)} - V^{(k)}}{V^{(k)}} \right| \leq \varepsilon, \quad (21)$$

де ε - задана точність розрахунків.

Якщо умова (21) не виконується, треба перевизначити такі змінні $V^{(k)} = V^{(k+1)}$, $\{A_i^{(k)}\} = \{A_i^{(k+1)}\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) і повторити обчислення з п.2.

В результаті виконання запропонованої обчислювальної процедури отримується послідовність розв'язків $\{A_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) яка збігається до своїх границь

$$\{A_i^{(k)}\} \rightarrow \{A_i^{opt}\}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots; \quad \{V^{(k)}\} \rightarrow \{V^{opt}\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Збіжність ітераційної процедури обґрунтована в роботі автора [6].

Для числових даних, що наведено вище, збіжність ілюстровано таблицею.

Таблиця 1

Збіжність по функціоналу V при початковому значенні $A_i^0 = 100 \text{ мм}^2$
($i = 1, 2, 3, 4$)

$\lg \varepsilon$	$V^{(k)}$	Кількість ітерацій
-1	260625	2
-2	259310	3
-3	259871	4
-4	259806	5
-5	259865	6
-7	259865	6

3. Нечітке моделювання

Основними етапами нечіткого моделювання є:

- фазифікація вихідних нечітких даних, тобто їх опис за допомогою функції належності;
- виконання задач аналізу або оптимізації при фазифікованих змінних;
- дефазифікація – перетворення нечітких результатів в чіткі.

3.1. Фазифікація навантаження

Нехай навантаження, яке прикладене у вузлі ШСС, задається словесно: *«трохи більше, ніж 2 кН»*.

Не порушуючи загальності підходу, опишемо нечітке навантаження за допомогою нечіткої множини P з функцією належності $\mu(x)$ трикутного виду, тобто:

$$\mu_P(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{m-a}, & \text{if } a \leq x < m \\ \frac{b-x}{b-m}, & \text{if } m < x \leq b \\ 1, & \text{if } x = m \\ 0, & \text{for another} \end{cases} \quad (22)$$

Тут m_p – модальне значення навантаження. Величини a, b характеризують інформаційну гранулу $(a, m, b); a \leq m \leq b$ - ступінь нечіткості прикладеного навантаження.

Носій нечіткої множини, де $\mu > 0$ - гранулу $(a, m, b)_\Delta$, можна записати у вигляді

$$a = m - \Delta_1 \leq x \leq b = m + \Delta_2, \quad (23)$$

де Δ_1, Δ_2 - значення розкиду фазифікованої величини від модального значення m . Якщо вважати, що $\Delta_1 = k_1 m / 100$, $\Delta_2 = k_2 m / 100$, то вираз (23) прийме вигляд $m(1 - k_1 / 100) \leq x \leq m(1 + k_2 / 100)$. Тут коефіцієнти k_1, k_2 характеризують ступінь нечіткості у відсотках (%).

На основі означення (23) для поставленої задачі, у випадку коли $a = m$, запишемо в дискретному вигляді нечіткі множини P_1 і P_2 для M дискретів (α -рівнів). Для прикладу M взято 5, тобто (рис. 2):

$$P_i = \frac{1}{2} + \frac{0.8}{2.04} + \frac{0.4}{2.12} + \frac{0.2}{2.16} + \frac{0}{2.2}, \quad i = 1, 2. \quad (24)$$

Тут $m_p = 2$, $k_1 = 0$, $k_2 = 10\%$.

За теорією нечітких множин в кожному доданку (24), що записані у вигляді "дроби", "чисельник" є значення функції належності для $k = 0, 1, 2, \dots, M$ α -рівнів, в "знаменнику" записують відповідні детерміновані значення нечіткої множини. Таким чином, множина P_i є об'єднання усіх доданків виразу (24).

3.2. Оптимізація

На цьому етапі за процедурою динамічного програмування для кожного детермінованого значення в множинах P_i ($i = 1, 2$) обчислюються детерміновані значення об'ємів $V^*(P)$ і перерізів $A_j^*(P)$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

З цих величин утворюються нечіткі множини значень об'ємів ШСС

$$V_p^* = \frac{1}{V_1^*} + \frac{0.8}{V_2^*} + \frac{0.4}{V_3^*} + \frac{0.2}{V_4^*} + \frac{0}{V_5^*}, \quad V_j^* = V_j^*(P_1, P_2), \quad j = 1, 2, \dots, 5. \quad (25)$$

Аналогічно, для перерізів

$$\{A_i^*\} = \frac{1}{\{A_{1i}^*\}} + \frac{0.8}{\{A_{2i}^*\}} + \frac{0.4}{\{A_{3i}^*\}} + \frac{0.2}{\{A_{4i}^*\}} + \frac{0}{\{A_{5i}^*\}}, \quad i = 1, 2, 3, 4.$$

Приклад 1. Нехай задається нечітке $P_1 = \tilde{2}кН$, і детерміноване $P_2^{\det} = 2кН$.

Для цих значень навантажень, враховуючи опис (25), і виконуючи розрахунки за алгоритмом динамічного програмування, отримаємо нечітку множину оптимальних об'ємів

$$V_p^* = \frac{1}{259903} + \frac{0.8}{263850} + \frac{0.4}{271737} + \frac{0.2}{275677.6} + \frac{0}{279615.8}. \quad (26)$$

Приклад 2. Нехай задається детерміноване $P_1^{\det} = 2кН$, а нечітке $P_2 = \tilde{2}кН$.

Для цього випадку отримаємо нечітку множину об'ємів аналогічно випадку 1.

$$V_p^* = \frac{1}{259903} + \frac{0.8}{261151.9} + \frac{0.4}{263604} + \frac{0.2}{264862} + \frac{0}{266121.8}. \quad (27)$$

Приклад 3. Нехай два навантаження є нечіткими величинами, тобто $P_1 = \tilde{2}кН$, а $P_2 = \tilde{2}кН$ з відомими їх описами. В цьому випадку необхідно побудувати за допомогою означення декартового добутку нечітку множину навантажень, тобто

$$P = (P_1 \times P_2).$$

Для навантаження (24) нечітка множина P буде такою:

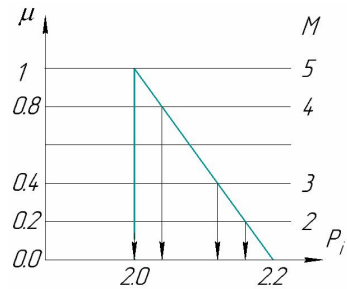


Рис. 2. Функція належності навантаження P_i

$$\begin{aligned}
 P = & \frac{1}{(2,2)} + \frac{0.8}{(2,2.04)} + \frac{0.4}{(2,2.12)} + \frac{0.2}{(2,2.16)} + \frac{0.8}{(2.04,2)} + \frac{0.8}{(2.04,2.04)} + \\
 & + \frac{0.4}{(2.04,2.12)} + \frac{0.2}{(2.04,2.16)} + \frac{0.4}{(2.12,2)} + \frac{0.4}{(2.12,2.04)} + \frac{0.4}{(2.12,2)} + \\
 & + \frac{0.2}{(2.12,2.12)} + \frac{0.2}{(2.16,2)} + \frac{0.2}{(2.16,2.04)} + \frac{0.2}{(2.16,2.12)} + \frac{0.2}{(2.16,2.16)}.
 \end{aligned} \quad (28)$$

Для кожної пари навантажень (P_1, P_2) із (28) треба обчислити V^* за процедурою ДП. В результаті маємо

$$\begin{aligned}
 V^* = & \frac{1}{209903} + \frac{0.8}{261152} + \frac{0.4}{268642} + \frac{0.2}{264883} + \frac{0.8}{263850} + \frac{0.8}{265101} + \\
 & + \frac{0.4}{267596} + \frac{0.2}{268840} + \frac{0.4}{271738} + \frac{0.4}{272993} + \frac{0.4}{275497} + \frac{0.2}{276746} + \\
 & + \frac{0.2}{275678} + \frac{0.2}{276936} + \frac{0.2}{279445} + \frac{0.2}{280695}.
 \end{aligned} \quad (29)$$

Зуваження 5. Доданок з $\mu = 0$ не включено у записи виразів (28) і (29).

3.3. Дефазифікація

Сутність етапу дефазифікації полягає в перетворенні нечіткої величини V^* в чітке число V^{def} . Це можна зробити, як приклад, за правилом середнього центру [4]

$$V^{def} = \frac{\sum_{i=1}^N \mu_i V_i^*}{\sum_{i=1}^N \mu_i},$$

Дефазифікацію можна зробити і іншим способом, який, наприклад, запропонував Б. Лю [3]

$$V^{def} = \sum_{i=1}^N w_i V_i^*,$$

де вагові коефіцієнти w_i визначаються за такими виразами:

$$w_i = w_i(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m), \quad m = 2M - 1, \quad (30)$$

де $w_1 = \frac{1}{2}(\beta_1 + A_0 - B_0)$, для $i = 1$, $w_i = \frac{1}{2}(C_0 - D_0 + Q_0 - S_0)$, для

$$2 \leq i \leq m - 1, \quad w_m = \frac{1}{2}(A_0 - P_0 + \beta_m), \quad \beta_i = \mu_i, \quad A_0 = \max_{1 \leq j \leq m} \beta_j, \quad B_0 = \max_{1 < j \leq m} \beta_j,$$

$$C_0 = \max_{1 \leq j \leq i} \beta_j, \quad D_0 = \max_{1 \leq j < i} \beta_j, \quad S_0 = \max_{1 < j \leq m} \beta_j, \quad Q_0 = \max_{i \leq j \leq m} \beta_j, \quad P_0 = \max_{i \leq j < m} \beta_j. \quad M -$$

кількість β - рівнів ; $0 \leq \beta_j \leq 1$, $1 \leq j \leq M$.

$$\beta = \{\beta_i\}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad \beta_1 = 1, \quad \beta_2 = \beta_5 = \beta_6 = 0.8, \quad \beta_3 = \beta_7 = \beta_9 = \beta_{10} = \beta_{11} = 0.4,$$

$$\beta_4 = \beta_8 = \beta_{12} = \beta_{13} = \beta_{14} = \beta_{15} = \beta_{16} = 0.2.$$

3.4. Числові результати проектування ШСС

За вище описаною процедурою дефазифікації для випадків 1-3 навантажень отримано результати, які подано в таблиці 2.

Таблиця 2

Дефазифіковані площі перерізів

№ вип.	P_1	%	P_2	%	V^{def}	%	A_1^{def}	A_2^{def}	A_3^{def}	A_4^{def}
1	$\tilde{2}$	10	2	-	264506	1.8	40.53	57	80.4	98.6
2	2	-	$\tilde{2}$	10	261352	0.6	39.83	56.02	79.93	97.71
3	$\tilde{2}$	10	$\tilde{2}$	10	267238	2.9	40.83	57.45	81.44	99.8
det	2	-	2	-	259903	0	39.72	55.86	79.85	97.06

В графі % дано процент розкиду навантаження та відхилення отриманого розв'язку від детермінованого.

4. Оптимальне проектування ШСС при навантаженні нечітко-випадкового характеру

Нехай для ШСС (рис. 1) навантаження $P = \{P_1, P_2\}$ задається випадковим чином:

- 1) $P = (\tilde{2}; \tilde{2})$ - подія D_1 з імовірністю q_1 ;
- 2) $P = (\tilde{2}; 0)$ - подія D_2 з імовірністю q_2 .

Випадкові події утворюють повну групу подій і тому $q_1 + q_2 = 1$. Для кожного навантаження відповідно за процедурою динамічного програмування виконується оптимізаційний розрахунок і подальша дефазифікація, в результаті якої отримуються дефазифіковані значення об'єму $V_1^{def}(\tilde{2}, \tilde{2}) = 267238 \text{ мм}^3$ з імовірністю q_1 , $V_2^{def}(\tilde{2}, 0) = 197746 \text{ мм}^3$ з імовірністю q_2 .

Дерандомізація отриманих результатів здійснюється за правилом обчислення математичного сподівання, тобто

$$V^{der} = V_1^{def} q_1 + V_2^{def} q_2.$$

Для деяких q_1 виконано числові ілюстрації, які надано в таблиці 3.

Таблиця 3

Результати розрахунків

$P = (\tilde{P}_1, \tilde{P}_2)$	$(\tilde{P}_1; 0)$	V^{derand} (дерандомізація)	$V^{der} > V^{det}$
q_1	$q_2 = 1 - q_1$		
0.05	0.95	201224	на 22.5% < V^{det}
0.8	0.2	253340	на 2.5% < V^{det}
0.9	0.1	260289	на 0.1% > V^{det}
0.95	0.005	263763	на 1.48% > V^{det}
0.98	0.02	265848	на 2.28% > V^{det}
1	0	267238	на 2.8% > V^{det}
$P_1 = 2$	$P_2 = 2$	259903	

5. Оцінка коефіцієнта надійності по навантаженню

Одноєю із важливих характеристик розрахунку будівельних конструкцій за методикою граничних станів є коефіцієнт γ надійності по навантаженню [8]. Він враховує несприятливі відхилення значення дії від нормативної величини навантаження. Цей коефіцієнт, як правило, встановлюється певними дослідженнями природи дій сил і аналізу статистичних даних про них. Шуканий коефіцієнт γ визначається як відношення розрахункового навантаження P_p до величини нормативного P_H , тобто

$$\gamma = P_p / P_H. \quad (31)$$

Розрахункове навантаження повинно включати будь-які випадки реального навантаження на конструкцію. Коли інформаційна ситуація щодо реального навантаження носить нечіткий характер, розрахункове навантаження P_p може бути визначене за допомогою використання процедури нечіткого моделювання. За даною інформацією про нечіткі характеристики навантаження реалізується оптимізаційна задача (5) з урахуванням перевірки умов функціонування. Результат реалізації задачі є деяке значення V^{def} . Очевидно, що цьому значенню відповідає проект з деяким еквівалентним навантаженням P_{det} . Його значення можна знайти за допомогою розв'язання нелінійного рівняння

$$V^{def} = \min_{A_i} V(P_{det}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (32)$$

з урахуванням умов $A_i \geq A_i^-$ і $y = \sum_{i=1}^n D_i / A_i \leq [y]$.

Чисельну ілюстрацію цього підходу зробимо для ШСС (рис. 1), інформацію про яку наведено в п.2.

Нехай нечітке навантаження "трохи більше, чим $2 \kappa H$ " прикладене у вузол 1. У вузлі 2 ніякого навантаження нема. Нехай функція належності взята у формі (23) для випадку коли $a = m$. Розкид описується % відхилення від модального значення m . Для 5 - дискретів при $k_1 = 0$, $k_2 = 10\%$ нечітка множина навантаження записується як

$$P(\tilde{2}, 0) = \frac{1}{(2, 0)} + \frac{0.8}{(2.04, 0)} + \frac{0.4}{(2.12, 0)} + \frac{0.2}{(2.16, 0)} + \frac{0}{(2.2, 0)}.$$

В результаті реалізації алгоритму, оптимізації отримано нечітке значення об'єму та його дефазифіковане значення

$$V^* = \frac{1}{193239} + \frac{0.8}{197104.4} + \frac{0.4}{204834} + \frac{0.2}{208698.6} + \frac{0}{212563}; \quad V^{def} = 197748 \text{ мм}^3.$$

Корень рівняння (32) з урахуванням отриманого $V^{def} = 197748 \text{ мм}^3$ буде $P_p = 2.0466$. За означенням (31) маємо коефіцієнт надійності по навантаженню $\gamma = 1.023$.

Аналогічно, виконаємо розрахунки для випадків, коли $k_1 = 0$, а $k_2 = 20, 30, 40\%$, для 5 дискретів:

1) для $k_2 = 20\%$ маємо

$$P(\tilde{2}, 0) = \frac{1}{(2, 0)} + \frac{0.8}{(2.08, 0)} + \frac{0.4}{(2.24, 0)} + \frac{0.2}{(2.32, 0)} + \frac{0}{(2.4, 0)}.$$

В результаті реалізації алгоритму оптимізації отримаємо нечітку множину об'єму:

$$V^* = \frac{1}{193329} + \frac{0.8}{200369} + \frac{0.4}{216428} + \frac{0.2}{224157} + \frac{0}{231887},$$

та його дефазифіковане значення $V^{def} = 202257 \text{ мм}^3$.

Розв'язок рівняння (32) для отриманого $V^{def} \in P_{def} = 2.0934$.

2) для $k_2 = 30\%$ маємо

$$P(\tilde{2}, 0) = \frac{1}{(2, 0)} + \frac{0.8}{(2.12, 0)} + \frac{0.4}{(2.36, 0)} + \frac{0.2}{(2.48, 0)} + \frac{0}{(2.6, 0)}.$$

В результаті реалізації алгоритму оптимізації отримаємо нечітке значення об'єму:

$$V^* = \frac{1}{193329} + \frac{0.8}{204834} + \frac{0.4}{228022} + \frac{0.2}{239616} + \frac{0}{251265},$$

та його дефазифіковане значення $V^{def} = 206766 \text{ мм}^3$. Розв'язок рівняння (32) для отриманого $V^{def} \in P_{def} = 2.14$.

3) для $k_2 = 40\%$ маємо

$$P(\tilde{2}, 0) = \frac{1}{(2, 0)} + \frac{0.8}{(2.16, 0)} + \frac{0.4}{(2.48, 0)} + \frac{0.2}{(2.64, 0)} + \frac{0}{(2.8, 0)}.$$

В результаті реалізації алгоритму оптимізації отримаємо нечітке значення об'єму:

$$V^* = \frac{1}{193329} + \frac{0.8}{208699} + \frac{0.4}{239616} + \frac{0.2}{255075} + \frac{0}{270533},$$

та його дефазифіковане значення $V^{def} = 211275$. Розв'язок рівняння (32) для отриманого $V^{def} \in P_{def} = 2.19$.

За отриманими результатами розрахунків сформуємо таблицю 4.

Таблиця 4

Результати розрахунків коефіцієнту запасу (надійності)

k_2	10%	20%	30%	40%	За ДБН [8]
$V^{def}, \text{мм}^3$	197748	202257	206766	211275	
$P_{def}, \text{кН}$	2,046	2,0934	2,14	2,19	
γ	1.023	1.0467	1,07	1,095	1.1

Таблиця 4 показує, як змінюється коефіцієнт надійності по навантаженню γ в залежності від розкиду k_2 нечіткого завдання величини P . Рисунок 3 ілюструє це змінювання графічно. Як видно з рис. 3 величина γ змінюється лінійно. За рекомендаціями ДБН [8] максимальне

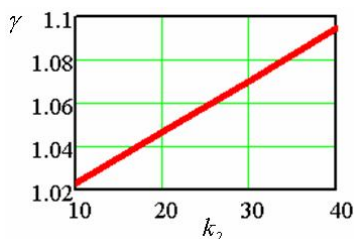


Рис. 3. Залежність коефіцієнту γ від величини розкиду в нечіткому опису навантаження "трохи більше, чим $2 \kappa H$ "

значення коефіцієнту γ пропонується рівним 1.1, яке відповідає детермінованому значенню $P = 2.2 \kappa H$, що майже дорівнює 40% величини розкиду Δ від $m_P = 2$ в опису заданого навантаження "трохи більше, чим $2 \kappa H$ ", яке прикладене у вузол 1 розглянутої ШСС.

6. Оцінка модуля Юнга в задачах оптимального проектування пружних ШСС із залученням нечітких множин

6.1. Постановка задачі

В багатьох довідниках із опору матеріалів деякі механічні характеристики матеріалів задаються у вигляді інтервалів. Наприклад, для границі міцності σ_B (чавун сірий) у випадку розтягнення складає $[140;180] \text{ Mna}$, у випадку стискання - $[600;1000] \text{ МПа}$. Сталь машинобудівна (конструкційна) вуглецева має інтервал напруження $[60;250] \text{ МПа}$. Модуль пружності E для цієї сталі буде таким $[2.0...2.1] \cdot 10^5 \text{ МПа}$ та інш. [9].

Ставиться таке питання: яке значення тієї чи іншої характеристики треба брати із заданого інтервалу, якщо вона так задається, для подальших інженерних розрахунків? В літературі відповіді на це питання немає. Також нема відповіді на питання: чи є заданий інтервал континуумом значень характеристики, що розглядається? На нашу думку, конкретне значення характеристики береться із заданого інтервалу, так щоб не порушувалися умови несучої здатності. На прикладі вибору характеристики як модуль пружності E подано можливий спосіб розв'язання поставленої проблеми. Цей спосіб складається з трьох етапів. На першому етапі визначаються нечітка множина - оптимальний об'єм V^{def} при нечіткому завданні модуля E .

На другому етапі визначається дефазифіковане значення V_{det}^{def} . На третьому - числове розв'язання рівняння

$$E^* = \arg \{V(E) - V_{det}^{def} = 0\},$$

де V - є визначеним значенням об'єму за допомогою методу ДП при детермінованому значенні E .

Інтервал, з якого беруться можливі значення характеристики E будемо інтерпретувати як нечітку множину із заданою функцією належності, наприклад трапецієвидного (рис. 4), або трикутного виду (рис. 5).

Ці функції мають відповідно

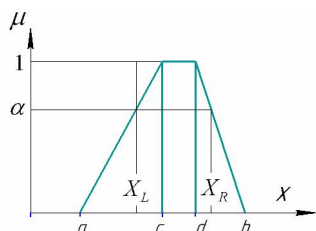


Рис. 4. Трапецієвидна функція належності

аналітичний вигляд

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{c-a}, & \text{if } a \leq x \leq c \\ 1, & \text{if } c \leq x \leq d \\ \frac{b-x}{b-d}, & \text{if } d \leq x \leq b \\ 0 & \end{cases} \quad (33)$$

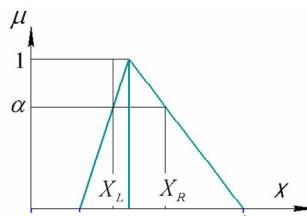


Рис. 5. Трикутна функція належності

$$\mu(x) = \begin{cases} \frac{x-a}{m-a}, & \text{if } a \leq x < m \\ 1, & \text{if } x = m \\ \frac{b-x}{b-m}, & \text{if } m < x \leq b. \end{cases} \quad (34)$$

Виконаємо деякі числові експерименти за запропованою методикою.

Експеримент 0.

Нехай надана функція належності нечіткого трапецієвидного числа $E(a, c, d, b)$ рис. 4 в графічному вигляді, як на рис. 6. в табл. 11. Нечітка множина модуля пружності $E(\alpha)$ в залежності від α -рівня в цьому випадку наведено в табл. 5.

Таблиця 5

Нечіткі множини $E(\alpha)$ і $V^{opt}(\alpha)$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
α -рівні	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1	1	0.8	0.6	0.5	0.4	0.2	0
Модуль пружності $E(\alpha)$, кН/мм^2	200	200.6	201.2	201.5	201.8	202.4	203	205	206	207	207.5	208	209	210
Об'єм $V^{opt}(\alpha)$, мм^3	269000	268195.3	2673956	266997.5	266600.5	265810.2	265024.6	262439	261165.1	259903.4	259277.2	258653.9	257416.4	256190.6
Вагові коефіцієнти для дефазифікації w_i	0	0.029	0.057	0.071	0.086	0.114	0.143	0.143	0.114	0.086	0.071	0.057	0.029	0

Четвертий рядок $V^{opt}(\alpha)$ є результат оптимального проектування при заданих $E(\alpha)$. Величина $V_{det}^{def} = 263485 \text{ мм}^3$ є дефазифікованим значенням нечіткої множини $V = \sum_{i=1}^{14} \frac{\alpha_i}{V_i(a)}$. Величина $V = 263485 \text{ мм}^3$ відповідає об'єму конструкції при детермінованому значенні $E = 204.19 \text{ кН/мм}^2$, тому що відносна різниця між V^{def} і V_{det} має невелике значення 0.0001%. Таким чином, в цьому експерименті при нечіткому завданні числа $E(200, 203, 205, 210)$ з трапецієвидною функцією належності (34) отримано $E = 204.19 \text{ кН/мм}^2$.

Аналогічно виконуються експерименти 1-5.

Експеримент 1.

Нехай модуль пружності Юнга відповідно до рис. 4 задано так: $E(200, 205, 207, 210)$. Графічне подання функції належності нечіткого трапецієвидного числа $E(a, c, d, b)$ надано на рис. 7 в табл. 11. Запишемо нечітку множину $E(\alpha)$ таким чином:

$$E = \frac{0}{200} + \frac{0.2}{201} + \frac{0.4}{202} + \frac{0.5}{202.5} + \frac{0.6}{203.5} + \frac{0.8}{204} + \frac{1}{205} + \frac{1}{207} + \frac{0.8}{207.6} + \frac{0.6}{208.2} + \frac{0.5}{208.5} + \frac{0.4}{208.8} + \frac{0.2}{209.4} + \frac{0}{210}.$$

Для визначення елементів множини $E(\alpha)$ використовуємо:

$$L: \mu(x) = \begin{cases} \frac{x-200}{205-200}, & 200 \leq x \leq 205, \\ X_L = \alpha m + a(1-\alpha), \end{cases}$$

$$R: \mu(x) = \begin{cases} \frac{210-x}{210-207}, & 207 \leq x \leq 210, \\ X_R = \alpha m + b(1-\alpha), \end{cases} \alpha \in [0, 1].$$

За допомогою програми динамічного програмування обчислення мінімального об'єму ферми дає:

$$V^{opt} = \frac{0}{268999} + \frac{0.2}{267661.6} + \frac{0.4}{266336.5} + \frac{0.5}{265679} + \frac{0.6}{265024.6} + \frac{0.8}{263725} + \frac{1}{262439} + \frac{1}{259903.4} + \frac{0.8}{259152.3} + \frac{0.6}{258405.4} + \frac{0.5}{258033.6} + \frac{0.4}{257662.9} + \frac{0.2}{256924.66} + \frac{0}{256190.6}.$$

Тут доречний запис двох множин $E(\alpha)$ E і $V^{opt}(\alpha)$ V об'єднати в табл. 6.

Таблиця 6

Нечіткі множини $E(\alpha)$ і $V^{opt}(\alpha)$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\mu_i = \alpha$	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1	1	0.8	0.6	0.5	0.4	0.2	0
$E(\alpha)$, кН/мм ²	200	201	202	202.5	203	204	205	207	207.6	208.2	208.5	208.8	209.4	210
$V^{opt}(\alpha)$, мм ³	269000	267661.6	266336.5	265679	265024.6	263725	262439	259903.4	259152.3	258405.4	258033.6	257662.9	256924.66	256190.6

Дефазифікація виконана за правилом центра $V_{det}^{def} = \sum_0^{14} w_i V_i$;

$w_i = \mu(\alpha) / \sum_{\alpha \in [0,1]} \mu(\alpha)$; Відомо, що $V_{det} = 259903.4 \text{ мм}^3$ при $E = 207 \frac{\text{кН}}{\text{мм}^2}$.

$V_{det}^{def} = 261526.5 \text{ мм}^3$. Це складає $\Delta = 0.62\%$ відхилення від V_{det} , тобто

$$\Delta = \frac{|V_{det}^{def} - V_{det}|}{V_{det}} \cdot 100\% .$$

Експеримент 2.

Нехай модуль пружності Юнга відповідно до рис. 4 задано так: $E(200, 203, 207, 210)$. Множини E і V об'єднаємо в табл. 7.

Дефазифіковане значення об'єму для цього експерименту буде $V_{det}^{def} = 262494.92 \text{ мм}^3$.

Таблиця 7

Нечіткі множини $E(\alpha)$ і $V^{opt}(\alpha)$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$\mu_i = \alpha$	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1	1	0.8	0.6	0.5	0.4	0.2	0
$E(\alpha)$, кН/мм ²	200	200.6	201.2	201.5	201.8	202.4	203	207	207.6	208.2	208.5	208.8	209.4	210
$V^{opt}(\alpha)$, мм ³	269000	268195.3	267395.6	266997.5	266600.5	265810.4	265024.6	259903.4	259152.3	258405.4	258033.6	257662.9	256924.6	256190.6

Експеримент 3.

Нехай модуль пружності Юнга відповідно до рис. 5 задано так: $E(200, 205, 210)_\Delta$. Графічне подання цієї функції представлено на рис. 9. в табл. 11. Зведемо множини $E(\alpha)$ і $V^{opt}(\alpha)$ до табл. 8.

Таблиця 8

Нечіткі множини $E(\alpha)$ і $V^{opt}(\alpha)$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mu_i = \alpha$	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1	0.8	0.6	0.5	0.4	0.2	0
$E(\alpha)$, кН/мм ²	200	201	202	202.5	203	204	205	206	207	207.5	208	209	210
$V^{opt}(\alpha)$, мм ³	269000	267661.6	266336.5	265679	265024.6	263725	262439	261165	259903.4	259277.2	258654	257416.4	256190
w_i	0	0.033	0.067	0.083	0.1	0.133	0.167	0.133	0.1	0.083	0.067	0.033	0

Дефазифіковане значення об'єму відповідно до наведеної методики буде $V_{det}^{def} = 262203.7 \text{ мм}^3$.

Експеримент 4.

Нехай модуль пружності Юнга задано трикутною функцією належності рис.5 таким чином: $E(200, 207, 210)_\Delta$. Графічне подання цієї функції представлено на рис. 10 в табл. 11. Нечіткі множини $E(\alpha)$ і $V^{opt}(\alpha)$ зведемо до табл. 9.

Таблиця 9

Нечіткі множини $E(\alpha)$ і $V^{opt}(\alpha)$

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mu_i = \alpha$	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1	0.8	0.6	0.5	0.4	0.2	0
$E(\alpha)$, кН/мм ²	200	201.4	202.8	203.5	204.2	205.6	207	207.2	208.2	208.5	208.8	209.4	210
$V^{opt}(\alpha)$, мм ³	269000	267130	265286	264373.4	263467.2	261673.2	259903.4	259652.6	258405.5	258033.7	257662.9	256924.6	256190

Дефазифіковане значення об'єму відповідно до наведеної методики буде $V_{det}^{def} = 260880.3 \text{ мм}^3$.

Експеримент 5.

Нехай модуль пружності Юнга задано трикутною функцією належності рис. 5 таким чином: $E(200, 203, 210)_\Delta$. Графічне подання відповідає рис. 11 в табл. 11.

Дефазифіковане значення об'єму відповідно до наведеної методики буде $V_{det}^{def} = 264143 \text{ мм}^3$.

Таблиця 10

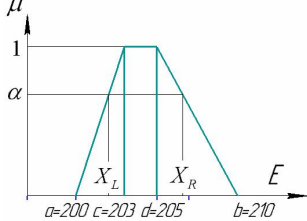
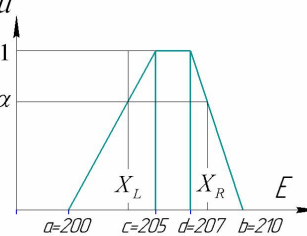
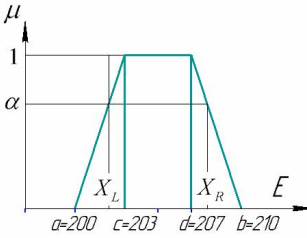
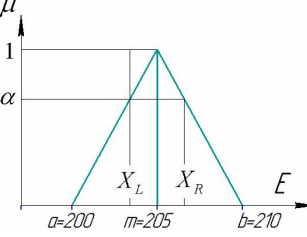
Нечіткі множини E і V^{opt}

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$\mu_i = \alpha$	0	0.2	0.4	0.5	0.6	0.8	1	0.8	0.6	0.5	0.4	0.2	0
$E(\alpha)$, кН/мм ²	200	200.6	201.2	201.5	201.8	202.4	203	204.4	205.8	206.5	207.2	208.6	210
$V^{opt}(\alpha)$, мм ³	269000	268195.3	267395.6	266997.4	266600.5	265810.2	265024.6	263209.4	261418.9	260532.7	259652.6	257910	256191

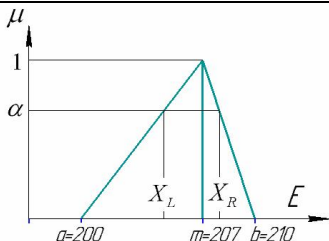
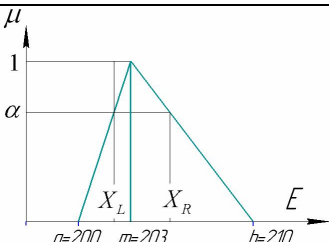
Результати усіх п'яти експериментів зведено до табл. 11, де зображено відповідні графічні подання функцій належності рис. 6-11, дефазифіковані значення об'єму V_{det}^{def} для експериментів 0-5 та, відповідне до дефазифікованого значення об'єму, значення модуля пружності Юнга E^* .

Таблиця 11

Результати експериментів

№ експ.	E^{fuzzy} , кН/мм ²	V_{det}^{def} , мм ³	E^* , кН/мм ²	Характер функції належності
0	 <p data-bbox="221 497 568 566">Рис. 6. Графічне подання функції належності нечіткого трапецієвидного числа $E(200, 203, 205, 210)$</p>	263485.2	204.19	Несиметрична
1	 <p data-bbox="221 827 568 897">Рис. 7. Графічне подання функції належності нечіткого трапецієвидного числа $E(200, 205, 207, 210)$</p>	261526,5	205,72	Несиметрична
2	 <p data-bbox="221 1158 568 1227">Рис. 8. Графічне подання функції належності нечіткого трапецієвидного числа $E(200, 203, 207, 210)$</p>	262495	204.96	Симетрична
3	 <p data-bbox="221 1488 568 1557">Рис. 9. Графічне подання функції належності нечіткого трикутного числа $E(200, 205, 210)$</p>	262203.7	205	Симетрична

Продовження табл. 11

4	 <p data-bbox="224 388 548 470">Рис. 10. Графічне подання функції належності нечіткого трикутного числа $E(200, 207, 210)$</p>	260880.3	206.23	Несиметрична, мода t наближається до правого кінця інтервалу
5	 <p data-bbox="224 726 548 809">Рис. 11. Графічне подання функції належності нечіткого трикутного числа $E(200, 203, 210)$</p>	264143	203,58	Несиметрична, мода t наближається до лівого кінця інтервалу

7. Сумісна дія двох навантажень на ШСС

Нехай розглядається сумісна дія двох нечітких навантажень «трохи більше, ніж 2 кН» описані нечіткі множини

$$P_1^{fuzzy} = \frac{1}{2} + \frac{0.8}{2.04} + \frac{0.4}{2.12} + \frac{0}{2.2}, \quad P_2^{fuzzy} = \frac{1}{2} + \frac{0.8}{2.04} + \frac{0.4}{2.12} + \frac{0}{2.2}.$$

На основі означення декартового добутка [4] нечітких множин P_1 і P_2 отримаємо

$$\begin{aligned} P_1 \times P_2 &= \frac{\min(1,1)}{(2,2)} + \frac{\min(1,0.8)}{(2,2.04)} + \frac{\min(1,0.4)}{(2,2.12)} + \frac{\min(1,0)}{(2,2.2)} + \frac{\min(0.8,1)}{(2.04,2)} + \\ &+ \frac{\min(0.8,0.8)}{(2.04,2.04)} + \frac{\min(0.8,0.4)}{(2.04,2.12)} + \frac{\min(0.8,0)}{(2.04,2.2)} + \frac{\min(0.4,1)}{(2.12,2)} + \frac{\min(0.4,0.8)}{(2.12,2.04)} + \\ &+ \frac{\min(0.4,0.4)}{(2.12,2.12)} + \frac{\min(0.4,0)}{(2.12,2.2)} + \frac{\min(0,1)}{(2.2,2)} + \frac{\min(0,0.8)}{(2.2,2.04)} + \frac{\min(0,0.4)}{(2.2,2.12)} + \frac{\min(0,0)}{(2.2,2.2)} = \\ &= \frac{1}{(2,2)} + \frac{0.8}{(2,2.04)} + \frac{0.4}{(2,2.12)} + \frac{0}{(2,2.2)} + \frac{0.8}{(2.04,2)} + \frac{0.8}{(2.04,2.04)} + \frac{0.4}{(2.04,2.12)} + \\ &+ \frac{0}{(2.04,2.2)} + \frac{0.4}{(2.12,2)} + \frac{0.4}{(2.12,2.04)} + \frac{0.4}{(2.12,2.12)} + \frac{0}{(2.12,2.2)} + \\ &+ \frac{0}{(2.2,2)} + \frac{0}{(2.2,2.04)} + \frac{0}{(2.2,2.12)} + \frac{0}{(2.2,2.2)}. \end{aligned}$$

Значення об'єму при даних навантаженнях з решітки декартового добутку розраховується за алгоритмом ДП, в результаті чого отримаємо:

$$V^{fuzzy} = \frac{1}{259903} + \frac{0.8}{261152} + \frac{0.4}{263641.6} + \frac{0}{266122} + \frac{0.8}{263850.4} + \frac{0.8}{265101.3} +$$

$$+ \frac{0.4}{267596.0} + \frac{0}{270081} + \frac{0.4}{271737.4} + \frac{0.4}{272993} + \frac{0.4}{275497.4} + \frac{0}{277993} +$$

$$+ \frac{0}{279616} + \frac{0}{280876} + \frac{0}{283389} + \frac{0}{285893}.$$

Етап дефазифікації отриманої нечіткої множини дає $V^{def} = 265296.2 \text{ мм}^3$.

$$\text{Співвідношення } \Delta\% = \frac{V^{def} - V_{det}(2,2)}{V_{det}(2,2)} =$$

= 2.07% показує наскільки очікуваний результат більше, чим результат, отриманий при детермінованих значеннях.

Висновки

1. Показано застосування одного із сучасних методів "м'яких" обчислень - теорія нечітких множин до задач вагової оптимізації.

2. Нечітке моделювання дозволяє оцінити вплив степеню "розмитості" вихідних даних на кінцевий результат.

3. Наведено задача проектування, коли інформація про навантаження має невизначеність другого роду, а саме: нечітко-випадковий опис.

4. Сформульовані етапи нечіткого моделювання.

5. Виконано числові експерименти для різноманітних комбінацій нечіткого навантаження.

6. Пропонований підхід застосовано для оцінки показника навантаження по надійності і модуля пружності.

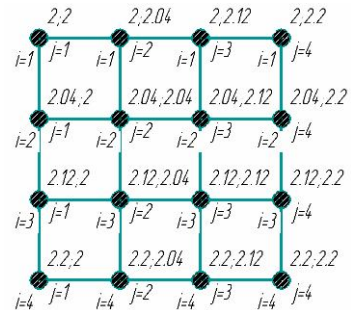


Рис. 13. Решітка значень діючого навантаження у вузлі ферми

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Болотин В.В. Применение методов теории вероятностей и теории надежности в расчетах сооружений. - М.: Изд-во лит-ры по строительству, 1971. — 255 с.
2. Борисов В.В. Федулов А.С., Зернов М.М. Основы нечёткой математики // Кн.1. Теория нечётких множеств. - М.: Горячая линия – Телеком, 2014. – 88 с.
3. Лю Б. Теория и практика неопределённого программирования. - М.: Бинум и лаборатория знаний. - 2005. - 416 с.
4. Рутковская Д., Пилинский М., Рутковский Л. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечёткие системы. - М.: Горячая линия- Телеком.- 2008.-383 с.
5. Стрелецкий Н.С., Гениев А.Н., Беленя Е.И., Балдин В.А., Лессинг Е.Н. Металлические конструкции - Москва: Стройиздат, 1961. - 776 с.
6. Беллман Р., Дрейфус С. Прикладные задачи динамического программирования - М.: Наука. Главная редакция Физико-математической литературы, 1965. - 460 с.
7. Бараненко В.А. Динамическое программирование и последовательные приближения // Придніпровський науковий журнал. Фізико-математичні науки, грудень 1998 №12 (179). 1998. С. 38-44
8. ДБН В.1.2-2:2006 Система забезпечення надійності та безпеки будівельних об'єктів «Навантаження і впливи». - К: Мін. буд. України, 2016. – 75 с
9. Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Є.С. Опір матеріалів. - К.: Вища школа. - 2004. - 655 с.

REFERENCES

1. *Boletin V.V.* Primenenie metodov teorii veroyatnostey i teorii nadezhnosti v raschetah sooruzheniy (Application of methods of probability theory and reliability theory in calculations of structures).- M.: Izd-vo literatyryi po stroitelstvu, 1971. - 255 p.
2. *Borisov V.V., Fedulov A.S., Zernov M.M.* Osnovy nechyotkoy matematiki (Basics of fuzzy mathematic) // Kn.1. Teoriya nechyotkih mnozhestv. - M.: Goryachaya liniya – Telekom 2014. - 88 p.
3. *Lyu B.* Teoriya i praktika neopredelyonnogo programmirovaniya (Theory and practice of uncertain programming). - M.: Binom i laboratoriya znaniy. - 2005. - 416 p.
4. *Rutkovskaya D., Pilinskiy M., Rutkovskiy L.* Neyronnye seti, geneticheskie algoritmy i nechyotkie sistemy (Neural networks, genetic algorithms and fuzzy systems). -M.: Goryachaya liniya- Telekom.- 2008. - 383 p.
5. *Streletskiy N.S., Geniev A.N., Beleya E.I., Baldin V.A., Lessing E.N.* Metallicheskie konstruksii (Metal constructions) - Moskva: Stroyizdat, 1961. - 776 p.
6. *Bellman R., Dreyfus S.* Prikladnyye zadachi dinamicheskogo programmirovaniya (Applied dynamic programming problems) - M.: Nauka. Glavnaya redaktsiya Fiziko-matematicheskoy literatury, 1965. - 460 p.
7. *Baranenko V.A.* Dinamicheskoe programmirovaniye i posledovatelnyye priblizheniya (Dynamic programming and successive approximations) // Pridnirovskiy naukoviy zhurnal. Fiziko-matematichni nauki, grudn 1998 №12 (179). 1998. P. 38-44
8. DBN V.1.2-2:2006 Sistema zabezpechennya nadlynosty ta bezpeki budivelnih ob'ektiv «Navantazhennya i vplivi» (System of reliability and safety of building objects "Load and influences").- K: Min. bud. Ukrayini, 2016. - 75 p
9. *Pisarenko G.S., Kyitka O.L., Umanskiy E.S.* Opir materialiv (Strength of Materials). - K.: Vischa shkola. - 2004. - 655 p.

Стаття надійшла 17.07.2018

Baranenko V.A., Volchok D.L.

FUZZY MODELING IN OPTIMAL DESIGN OF HINGE-ROD SYSTEMS

In design theory, optimal problems are formulated in the form of deterministic (clear) models of mathematical programming. It is of interest to consider such tasks of optimal designing of structures, which would take into account the information situation in relation to the initial data, conditions of consolidation, behavior of the environment, goals and other factors of the uncertain nature. For the formulation and solution of such problems, an appropriate mathematical apparatus is needed that would a priori include the possibility of taking into account this situation. The concept of uncertainty is intuitive for every person. However, its formalization causes some difficulties.

Simulation of random uncertainty is carried out in the boundaries of probability theory. Here a priori are assumed to be known and reliable functions of distribution and density of random variables, their numerical characteristics. This information is obtained on the basis of processing a large statistical sample.

For a long time it was believed that all the necessary work for uncertainty gives the theory of probabilities. But over time, due to a change in human perception of the environment, the adequacy of this approach began to cause doubts.

In this paper we consider the problems of optimal design of a hinge-rod system, which is imposed a restriction on rigidity, strength and stability under conditions of fuzzy and fuzzy-random information. The application of one of the modern methods of "soft" computing - the theory of fuzzy sets to problems of weight optimization is shown.

The implementation of the problem is accomplished using the method of dynamic programming. The algorithm of implementation of the set optimization models is developed. The stages of fuzzy simulation are formulated and described: fuzzification, optimization and analysis, defuzzification.

The analysis of the choice of load safety factor coefficient is carried out using the proposed methodology. The results of the influence of the form and character of the membership function in the case of fuzzy data information about Young's modulus on optimal solutions are given. According to the defuzzified volume of hinge-rod system we can propose corresponding determined Young's modulus as recommendation. Numerical examples for various load combinations are given and results of all numerical experiments show how the mechanical system reacts to the inaccurate description of the given load. The problem of designing, when the information of the load is uncertain as the fuzzy-random description is presented.

Keywords: hinge-rod system, fuzzy and fuzzy-random variables, optimal design, fuzzy modeling, dynamic programming method.

Бараненко В.А., Волчок Д.Л.

НЕЧЕТКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ В ОПТИМАЛЬНОМ ПРОЕКТИРОВАНИИ ШАРНИРНО-СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

В данной работе рассматриваются задачи оптимального проектирования шарнирно-стержневой системы, на которую наложено ограничения по жесткости, прочности и устойчивости в условиях нечеткой и нечетко-случайной информации. Предложена методика решения задачи на основе применения теории нечетких множеств. Разработан алгоритм реализации предлагаемой методики. Описаны основные этапы нечеткого моделирования: фазификация, оптимизация и анализ, дефазификация. Оптимизация осуществлена на основе метода динамического программирования. Проведен анализ выбора коэффициента надежности по нагрузке. Приведены результаты влияния формы и характера функции принадлежности при нечетком задании информации на оптимальные решения.

Ключевые слова: шарнирно-стержневая система, нечеткие и нечетко-случайные величины, оптимальное проектирование конструкций, нечёткое моделирование, метод динамического программирования.

УДК 517.11+519.92+539.3

Бараненко В.О., Волчок Д.Л. **Нечітке моделювання в оптимальному проектуванні шарнірно-стержневих систем** // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2018. - К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. - С. 71-93.

Розглянуто задачу оптимального проектування шарнірно-стержневої системи, на яку накладено обмеження щодо жорсткості, міцності та стійкості в умовах неповної інформації нечіткого та нечітко-випадкового характеру.

Табл. 11. Іл. 12. Бібліогр. 7 назв.

Baranenko V.A., Volchok D.L. **Fuzzy modeling in optimal design of hinge-rod systems** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2018. – Issue 100. – P. 71-93. – Ukr.

The problem of optimal design of a hinge-rod system, which is imposed by the stiffness, durability and stability restriction in conditions of incomplete information of fuzzy and fuzzy-random nature is considered.

Tables 11. Fig. 12. Ref. 7.

Бараненко В.А., Волчок Д.Л. **Нечеткое моделирование в оптимальном проектировании шарнирно-стержневых систем** // Сопروتвление материалов и теория сооружений. – 2018. – К.: КНУСА, 2018. - Вып. 100. – С. 71-93.

Рассмотрена задача оптимального проектирования шарнирно-стержневой системы, на которую наложено ограничение по жесткости, прочности и устойчивости в условиях неполной информации нечеткого и нечетко-случайного характера.

Табл. 11. Ил. 12. Библиогр. 7 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор *БАРАНЕНКО Валерій Олексійович*

Адреса робоча: 49600, м. Дніпро, вул. Чернишевського, 24а ДВНЗ "Придніпровська державна академія будівництва та архітектури, *БАРАНЕНКО Валерій Олексійович*

Робочий тел.: +38(056)7563422

Мобільний тел.: +38(066) 125-459-7

E-mail: *baranenko1941@ukr.net*

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-4658-1205>

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, заступник декана факультету ПЦБ *ВОЛЧОК Денис Леонідович*

Адреса робоча: 49600, м. Дніпро, вул. Чернишевського, 24а ДВНЗ "Придніпровська державна академія будівництва та архітектури, *ВОЛЧОК Денис Леонідович*

Робочий тел.: +38(056)7563422;

Мобільний тел.: +38(066) 727-656-0

E-mail: *Denys.L.Volchok@gmail.com*

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-7914-321X>