

УДК 624.078.4+539.3

## НАПРУЖЕНИЙ СТАН КЛЕЙОВОГО З'ЄДНАННЯ З ПОЗДОВЖНІМ ДЕФЕКТОМ

С.С. Куреннов,

д-р техн. наук, доцент, професор кафедри вищої математики

*Національний аерокосмічний університет ім. М.Е. Жуковського «ХАІ»*

Переміщення елементів зовнішніх несучих шарів в поперечному напрямку вважаються рівними нулю. Задачу зведено до системи диференціальних рівнянь в частинних похідних відносно поздовжніх переміщень шарів, яку розв'язано за допомогою методу відокремлення змінних. Розв'язана модельна задача. Показано, що відсутність клею вздовж бічної сторони з'єднання може значною мірою збільшувати напруження біля краю клейового шару.

**Ключові слова:** двовимірна модель, аналітичний розв'язок, клейове з'єднання, тришарова конструкція.

**Вступ.** Більшість математичних моделей напускних клейових з'єднань є одновимірними [1]. Тобто припускають заданий апріорі розподіл напружень за товщиною шарів (як правило, рівномірний або лінійний) і рівномірний розподіл напружень за шириною з'єднання. Однак розрахунок напруженого стану з'єднань в ряді випадків вимагає врахування нерівномірності розподілу напружень і переміщень за шириною з'єднання. Прикладами таких конструкцій є з'єднання силових елементів з обшивкою, ремонтні накладки, і т.п. Побудова аналітичного розв'язку задачі про двовимірний напружений стан з'єднання в загальній постановці є надзвичайно складною задачею, розв'язок якої поки невідомий [2]. Побудова розв'язку навіть для одного шару є складною проблемою [3]. Тому, як правило, для дослідження двовимірного напруженого стану з'єднань використовуються чисельні методи, зокрема метод скінченних різниць і метод скінченних елементів [4-6]. Для побудови аналітичного розв'язку даної задачі в роботі [7] була запропонована спрощена двовимірна модель напускного з'єднання двох пластин, яка заснована на гіпотезі про високу жорсткість шарів в напрямку, поперечному до напрямку навантаження. Ця модель, наприклад, вперше дозволила отримати аналітичний розв'язок задачі про напружений стан клейового з'єднання пластинок різної ширини [9]. Адекватність даної моделі була перевірена порівнянням розрахунків виконаних за моделлю з розрахунками, виконаними за допомогою методу скінченних елементів а також з результатами експериментів [9].

Метою даної роботи є розв'язання задачі про напружений стан з'єднання, яке не містить клею уздовж бічних сторін з'єднання. Слід зазначити, що відомі роботи, де досліджується вплив на напружений стан з'єднання порушень суцільності клейового шару біля торців області склейки, або в середині з'єднання [10, 11]. При цьому клей вважається відсутнім вздовж всієї ширини з'єднання, що дозволяє застосувати одновимірні математичні моделі з'єднання. В даній роботі суцільність клейового шару вважається порушеною вздовж бічних сторін склеєних пластин, тобто за довжиною

з'єднання, що вимагає застосування щонайменше двовимірної математичної моделі. Дана задача є актуальною але розглядається уперше.

**Постановка задачі та рівняння рівноваги.** Розглянемо симетричний клейове з'єднання двох прямокутних пластинок, що показано на рис. 1.

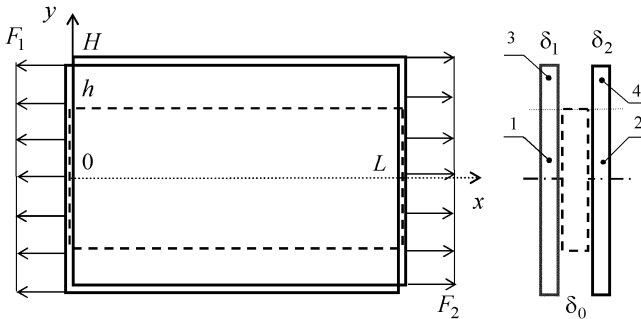


Рис. 1

Поздовжня вісь ( $0x$ ) є віссю симетрії. Симетрія дозволяє виключити вплив згину в площині з'єднання і розглянути лише половину даної конструкції. Довжина з'єднання  $L$ , ширина пластинок  $2H$ , ширина зони склейки  $2h$ . Товщини з'єднаних шарів і клейового шару відповідно  $\delta_1$ ,  $\delta_2$  і  $\delta_0$ . Будемо вважати, що переміщення і напруження рівномірно розподілені за товщиною шарів. З'єднані пластини покладемо абсолютно жорсткими в напрямку осі  $0y$ . Тобто елементи шарів мають тільки поздовжні переміщення, які в області склейки позначимо  $U_1$  і  $U_2$ , а переміщення на бічних ділянках відповідно  $U_3$  і  $U_4$  для першого і для другого шарів. За ступенем ідеалізації дана модель займає проміжне положення між балочними моделями будівельної механіки (опір матеріалів) і теорії пружності, і була запропонована, наприклад, в роботах В.В. Васильєва [12, 13].

Рівняння рівноваги елементів зовнішніх шарів в області склейки ( $y \in [-h; h]$ ) мають вид

$$\tau + \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial q_1}{\partial y} = 0, \quad -\tau + \frac{\partial N_2}{\partial x} + \frac{\partial q_2}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

де  $N_m$ ,  $q_m$  – нормальні (поздовжні) і дотичні зусилля в шарі  $m$ , де  $m = 1, 2$ ;  $\tau$  – дотичні напруження в клейовому шарі в поздовжньому напрямку.

Співвідношення Коші за умов відсутності поперечних переміщень мають вигляд

$$N_m = \delta_m E_m \frac{\partial U_m}{\partial x}, \quad q_m = \delta_m G_m \frac{\partial U_m}{\partial y}, \quad m = 1, 2,$$

де  $E_m$  – модуль пружності шару  $m$  в напрямку осі  $0x$ ;  $G_m$  – модуль зсуву шару  $m$  в площині  $x0y$ .

Дотичні напруження в клейовому прошарку вважаємо пропорційними різниці між переміщеннями зовнішніх шарів [1, 4]

$$\tau = P_0(U_2 - U_1), \quad (2)$$

де  $P_0$  – жорсткість клейового шару на зсув, яка, зазвичай, визначається як  $P_0 = G_0/\delta_0$ . Тут відповідно  $G_0$  – модуль зсуву клейового шару.

Підставивши наведені вище співвідношення в рівняння (1), отримуємо систему [7]

$$\begin{cases} \alpha_1 \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right) - U_1 + U_2 = 0 \\ \alpha_2 \left( \frac{\partial^2 U_2}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 U_2}{\partial y^2} \right) + U_1 - U_2 = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

$$\text{де } \alpha_m = \frac{E_m \delta_m}{P_0}; \quad \mu_m = \frac{G_m}{E_m}.$$

Поза межами ділянки склейки переміщення шарів за вказаних вище гіпотезах описується рівняннями [12, 13]

$$\frac{\partial^2 U_3}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 U_3}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 U_4}{\partial x^2} + \mu_2 \frac{\partial^2 U_4}{\partial y^2} = 0. \quad (4)$$

З огляду на симетрію, крайові умови мають вигляд:

$$\frac{\partial U_1}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial U_2}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\partial U_3}{\partial y} \Big|_{y=H} = \frac{\partial U_4}{\partial y} \Big|_{y=H} = 0; \quad (5)$$

$$N_2 \Big|_{x=0} = E_2 \delta_2 \frac{\partial U_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = F_2(y); \quad N_4 \Big|_{x=0} = E_2 \delta_2 \frac{\partial U_4}{\partial x} \Big|_{x=0} = F_2(y); \quad (6)$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial U_3}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial U_2}{\partial x} \Big|_{x=L} = \frac{\partial U_4}{\partial x} \Big|_{x=L} = 0; \quad (7)$$

$$N_1 \Big|_{x=L} = E_1 \delta_1 \frac{\partial U_1}{\partial x} \Big|_{x=0} = F_1(y); \quad N_3 \Big|_{x=L} = E_1 \delta_1 \frac{\partial U_3}{\partial x} \Big|_{x=0} = F_1(y). \quad (8)$$

$$\frac{\partial U_m}{\partial y} \Big|_{y=h} = \frac{\partial U_{m+2}}{\partial y} \Big|_{y=h}, \quad U_m \Big|_{y=h} = U_{m+2} \Big|_{y=h}, \quad m = 1, 2. \quad (9)$$

Умови (5) представляють собою умови рівності нулю дотичних напружень в несучих шарах вздовж осі симетрії і вільних країв.

**Побудова розв'язку.** З першого рівняння системи (3) можна виразити переміщення другого шару через переміщення першого

$$U_2 = U_1 - \alpha_1 \left( \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} + \mu_1 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} \right). \quad (10)$$

Підставивши (9) в друге рівняння системи (3), отримуємо

$$\beta_1 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^4} + \beta_2 \frac{\partial^4 U_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \beta_3 \frac{\partial^4 U_1}{\partial y^4} - \beta_4 \frac{\partial^2 U_1}{\partial x^2} - \beta_5 \frac{\partial^2 U_1}{\partial y^2} = 0, \quad (11)$$

$$\beta_1 = \alpha_1 \alpha_2; \quad \beta_2 = (\mu_1 + \mu_2) \beta_1; \quad \beta_3 = \mu_1 \mu_2 \beta_1; \quad \beta_4 = \alpha_1 + \alpha_2; \quad \beta_5 = \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2.$$

В роботі [7] за допомогою методу відокремлення змінних було отримано загальний розв'язок рівняння (11) за умовою  $\mu_1 = \mu_2$ , і показано що розв'язок має вигляд суми

$$U_m = W_m(x) + V_m(x, y),$$

де  $W_m(x)$  являє собою класичний одновимірний розв'язок Фолькерсена [1]. В свою чергу  $V_m(x, y)$  являють собою ряди, складені з розв'язків (11) і (10), які в свою чергу може представити у вигляді лінійних комбінацій функцій  $e^{\pm\lambda x} \sin ky$  і  $e^{\pm\lambda x} \cos ky$  (як і розв'язок рівняння (4) [12]). При побудові розв'язка даної задачі використаємо дану структуру розв'язку. Розглянемо кожний доданок окремо.

Підставивши, наприклад  $e^{\pm\lambda x} \sin ky$  в (11), отримуємо алгебраїчне рівняння, яке зв'язує  $\lambda$  з  $k$ :

$$\beta_3 k^4 + (\beta_5 - \beta_2 \lambda^2) k^2 + \beta_1 \lambda^4 - \beta_4 \lambda^2 = 0, \quad (12)$$

і з якого випливає, що кожному значенню  $\pm\lambda$  відповідає чотири значення  $k$ , які можна подати у формі  $\pm k_1(\lambda)$  і  $\pm k_2(\lambda)$ . Таким чином, частинний розв'язок рівняння (11), який відповідає, наприклад, додатному значенню  $\lambda$  має вигляд

$$V_1^* = e^{\lambda x} (S_1 \sin k_1 y + C_1 \cos k_1 y + S_2 \sin k_2 y + C_2 \cos k_2 y),$$

де  $C_m, S_m$  – довільні коефіцієнти.

Із співвідношення (10) випливає

$$V_2^* = e^{\lambda x} (S_1 \gamma_1 \sin k_1 y + C_1 \gamma_1 \cos k_1 y + S_2 \gamma_2 \sin k_2 y + C_2 \gamma_2 \cos k_2 y),$$

де  $\gamma_m = 1 - \alpha_1(\lambda^2 - \mu_1 k_m^2)$ ,  $m = 1; 2$ .

Будемо вважати, що загальні розв'язки рівнянь (3) і (4) мають точно задовольняти крайові умови на сторонах  $y = 0$ ,  $y = H_1$  і  $y = H_2$  (5), а також при  $y = h$  (9). Із перших двох умов (5) випливає  $S_1 = S_2 = 0$ . Враховуючи що дані частинні розв'язки справедливі і для від'ємних значень  $\lambda$ , частинні розв'язки можливо подати у вигляді.

$$V_1^* = [A \operatorname{ch} \lambda x + B \operatorname{ch} \lambda(x-L)] Y^{(1)}; V_2^* = [A \operatorname{ch} \lambda x + B \operatorname{ch} \lambda(x-L)] Y^{(2)};$$

$$Y^{(1)} = C_1 \cos k_1 y + C_2 \cos k_2 y; Y^{(2)} = C_1 \gamma_1 \cos k_1 y + C_2 \gamma_2 \cos k_2 y,$$

де  $A$  і  $B$  – довільні константи.

Частинні розв'язки рівняння Пуассона (4), які задовольняють крайові умови (5), мають вигляд

$$V_3^* = [A^{(3)} \operatorname{ch} \Lambda x + B^{(3)} \operatorname{ch} \Lambda(x-L)] \cos(\Lambda/\sqrt{\mu_1})(y-H),$$

$$V_4^* = [A^{(4)} \operatorname{ch} \Omega x + B^{(4)} \operatorname{ch} \Omega(x-L)] \cos(\Omega/\sqrt{\mu_2})(y-H),$$

де  $\Lambda$ ,  $\Omega$  – константи відокремлення змінних;  $A$  і  $B$  – довільні коефіцієнти.

Одновимірні розв'язки (3) і (4) мають вигляд [7]

$$W_m = A_0 x + B_0 + d_m \left( A_0^{(1)} \operatorname{ch} \left( x/\sqrt{\beta_4} \right) + B_0^{(1)} \operatorname{ch} \left( (x-L)/\sqrt{\beta_4} \right) \right),$$

$$W_3 = a_0^{(1)}x + b_0^{(1)}, W_4 = a_0^{(2)}x + b_0^{(2)},$$

де  $d_1 = 1$ ;  $d_2 = -\alpha_1/\alpha_2$ ;  $m = 1, 2$ ;  $A_0, B_0, a_0, b_0$  – довільні константи.

Із умов (9) випливає

$$W_1 = W_3; W_2 = W_4; V_1^*(x, h) = V_3^*(x, h); V_2^*(x, h) = V_4^*(x, h),$$

$$\left. \frac{\partial V_1^*}{\partial y} \right|_{y=h} = \left. \frac{\partial V_3^*}{\partial y} \right|_{y=h}; \left. \frac{\partial V_2^*}{\partial y} \right|_{y=h} = \left. \frac{\partial V_4^*}{\partial y} \right|_{y=h}.$$

що дає змогу встановити наступне:

$$A_0^{(1)} = B_0^{(1)} = 0; a_0^{(m)} = A_0; b_0^{(m)} = B_0; A^{(k)} = C_k A; B^{(k)} = C_k B,$$

де  $C_3, C_4$  – коефіцієнти, що зв'язують  $A^{(k)}$  і  $B^{(k)}$  з коефіцієнтами  $A$  і  $B$ . Відносно коефіцієнтів  $C_1, \dots, C_4$  отримуємо систему однорідних лінійних рівнянь:

$$\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{C}} = 0, \quad (13)$$

де

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & -c_3 & 0 \\ \gamma_1 c_1 & \gamma_2 c_2 & 0 & -c_4 \\ k_1 s_1 & k_2 s_2 & -\lambda \mu_1^{-0,5} s_3 & 0 \\ k_1 \gamma_1 s_1 & k_2 \gamma_2 s_2 & 0 & -\lambda \mu_2^{-0,5} s_4 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \end{pmatrix},$$

$$c_m = \cos k_m h; s_m = \sin k_m h; c_{m+2} = \cos \frac{\lambda(h-H)}{\sqrt{\mu_m}}; s_{m+2} = \sin \frac{\lambda(h-H)}{\sqrt{\mu_m}}.$$

Система (13) має нетривіальний розв'язок, якщо

$$\det \mathbf{A}(\lambda) = 0. \quad (14)$$

Рівняння (14) має нескінчену множину дійсних коренів  $\lambda_n$ , яким відповідають  $k_{m,n} = k_m(\lambda_n)$ ,  $\gamma_{m,n} = \gamma_m(\lambda_n)$ . Константи  $C_{1,n}$ ,  $C_{2,n}$ ,  $C_{3,n}$ ,  $C_{4,n}$  знаходяться з системи (13) з точністю до довільного множника.

Таким чином, переміщення  $U_1, \dots, U_4$  можемо записати у формі

$$U_j = A_0 x + B_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [A_n X_n^{(1)}(x) + B_n X_n^{(2)}(x)] Y_n^{(j)}(y), \quad (15)$$

$$j = 1, \dots, 4; X_n^{(1)} = \frac{\text{ch}(\lambda_n x)}{\lambda_n \text{sh}(\lambda_n L)}; Y_n^{(1)} = C_{1,n} \cos k_{1,n} y + C_{2,n} \cos k_{2,n} y,$$

$$X_n^{(2)} = \frac{\text{ch}(\lambda_n(x-L))}{\lambda_n \text{sh}(\lambda_n L)}, Y_n^{(2)} = C_{1,n} \gamma_{1,n} \cos k_{1,n} y + C_{2,n} \gamma_{2,n} \cos k_{2,n} y,$$

$$Y_n^{(3)} = C_{3,n} \cos \frac{\lambda_n}{\sqrt{\mu_1}}(y-H); Y_n^{(4)} = C_{4,n} \cos \frac{\lambda_n}{\sqrt{\mu_2}}(y-H),$$

де множники  $\lambda_n \text{sh}(\lambda_n L)$  у знаменнику введені для покращення аналізу збіжності розв'язку.

Оскільки коефіцієнти  $C_{1,n}$ ,  $C_{2,n}$ ,  $C_{3,n}$ ,  $C_{4,n}$  визначені з точністю до

довільного множника, то для визначеності і покращення аналізу збіжності на дані коефіцієнти доцільно ввести додаткову умову нормування

$$\int_0^h [Y_n^{(1)}]^2 dx + \int_0^h [Y_n^{(2)}]^2 dx + \int_h^{L_1} [Y_n^{(3)}]^2 dx + \int_h^{L_2} [Y_n^{(4)}]^2 dx = 1.$$

Таким чином, крайові умови (5) и (9) задовольняються точно. А коефіцієнти  $A_0, A_n, B_0, B_n$  находимо з крайових умов (6)-(8). Вказані крайові умови приводять до рівнянь

$$A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n^{(1)} = 0; \quad A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n^{(2)} = \frac{F_2(y)}{E_2 \delta_2}; \quad y \in (0; h);$$

$$A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n^{(3)} = 0; \quad A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Y_n^{(3)} = \frac{F_1(y)}{E_1 \delta_1}; \quad y \in (h; H);$$

$$A_0 - \sum_{n=1}^{\infty} B_n Y_n^{(4)} = \frac{F(y)}{E_2 \delta_2}; \quad A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Y_n^{(4)} = \frac{F_2(y)}{E_2 \delta_2}; \quad y \in (h; H);$$

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Y_n^{(1)} = 0; \quad A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n Y_n^{(1)} = \frac{F_1(y)}{E_1 \delta_1}; \quad y \in (0; h);$$

Обмеживши додавання у рядах (15) деяким числом доданків  $N$ , запишемо перелічені крайові умови в векторній формі

$$A_0 \bar{\mathbf{H}} + \sum_{n=1}^N A_n \bar{\mathbf{W}}_n^{(1)}(y) + \sum_{n=1}^N B_n \bar{\mathbf{W}}_n^{(2)}(y) - \bar{\mathbf{R}} = 0, \quad (16)$$

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{W}}_n^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ Y_n^{(3)} \\ 0 \\ Y_n^{(4)} \\ Y_n^{(2)} \\ Y_n^{(1)} \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{W}}_n^{(2)} = \begin{pmatrix} -Y_n^{(1)} \\ -Y_n^{(2)} \\ -Y_n^{(3)} \\ 0 \\ -Y_n^{(4)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \bar{\mathbf{R}} = \begin{pmatrix} 0 \\ F_2(y)/E_2 \delta_2 \\ 0 \\ F_1(y)/E_1 \delta_1 \\ F_2(y)/E_2 \delta_2 \\ 0 \\ 0 \\ F_1(y)/E_1 \delta_1 \end{pmatrix}.$$

Функції  $Y_n^{(1)}, \dots, Y_n^{(4)}$  не є ортогональними на відповідних інтервалах, а їх системи є переповненими. Ця обставина дозволяє задовольнити незалежні крайові умови за допомогою коефіцієнтів  $A_0, B_0, A_n$  и  $B_n$ . Ці коефіцієнти находимо із умови ортогональності лівої частини рівняння (16) лінійно-незалежним векторам  $\bar{\mathbf{H}}, \bar{\mathbf{W}}_n^{(1)}, \bar{\mathbf{W}}_n^{(2)}, n=1, \dots, N$ . Для цього введемо скалярний добуток

$$\begin{aligned} (\bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{v}}) &= \int_0^h u_1 v_1 dy + \int_0^h u_2 v_2 dy + \int_h^H u_3 v_3 dy + \int_h^H u_4 v_4 dy + \\ &+ \int_h^H u_5 v_5 dy + \int_h^H u_6 v_6 dy + \int_0^h u_7 v_7 dy + \int_0^h u_8 v_8 dy, \end{aligned}$$

де  $u_i$  и  $v_i$  – відповідні компоненти деяких векторів  $\vec{u}$  и  $\vec{v}$ .

Вказаний підхід призводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}^{(1,1)} & \mathbf{M}^{(1,2)} & \mathbf{M}^{(1,3)} \\ \mathbf{M}^{(2,1)} & \mathbf{M}^{(2,2)} & \mathbf{M}^{(2,3)} \\ \mathbf{M}^{(3,1)} & \mathbf{M}^{(3,2)} & \mathbf{M}^{(3,3)} \end{pmatrix} \cdot \vec{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} \mathbf{R}^{(1)} \\ \mathbf{R}^{(2)} \\ \mathbf{R}^{(3)} \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\vec{\mathbf{A}} = (A_0; B_0; A_1; \dots A_N; B_1; \dots B_N)^T,$$

$$M_{i,j}^{(1,1)} = (\vec{\mathbf{H}}, \vec{\mathbf{H}}); M_n^{(1,2)} = (\vec{\mathbf{W}}_n^{(1)}, \vec{\mathbf{H}}); M_n^{(1,3)} = (\vec{\mathbf{W}}_n^{(2)}, \vec{\mathbf{H}});$$

$$M_{k,n}^{(2,2)} = (\vec{\mathbf{W}}_n^{(1)}, \vec{\mathbf{W}}_k^{(1)}); M_{k,n}^{(2,3)} = (\vec{\mathbf{W}}_n^{(2)}, \vec{\mathbf{W}}_k^{(1)}); M_{k,n}^{(3,3)} = (\vec{\mathbf{W}}_n^{(2)}, \vec{\mathbf{W}}_k^{(2)});$$

$$\mathbf{M}^{(2,1)} = [\mathbf{M}^{(1,2)}]^T; \mathbf{M}^{(3,1)} = [\mathbf{M}^{(1,3)}]^T; \mathbf{M}^{(3,2)} = [\mathbf{M}^{(2,3)}]^T; i, j = 1, 2;$$

$$R_i^{(1)} = (\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{H}}^{(i)}); R_k^{(2)} = (\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{W}}_k^{(1)}); R_k^{(3)} = (\vec{\mathbf{R}}, \vec{\mathbf{W}}_k^{(2)}); n, k = 1, \dots, N.$$

**Модельна задача.** Проведемо розрахунок напружено-деформованого стану клейового з'єднання двох однакових пластинок розмірами  $5 \times 4$  см, ( $2H=4$  см,  $L=5$  см), и товщиною  $\delta=4$  мм,  $E_1=E_2=70$  ГПа, і  $G_1=G_2=25,9$  ГПа (алюмінієвий сплав). Параметри клейового шару:  $\delta_0=0,1$  мм,  $G_0=0,5$  ГПа. Положимо, що до одного з шарів приложено рівномірне навантаження  $F(y)=F=const$ .

На рис. 2 показаний графік розподілу дотичних напружень в клейовому шарі, який має ширину  $2h=3$  см. В силу симетрії показано напруження на половині області склейки,  $x \in [0; L]$ ,  $y \in [0; h]$ .

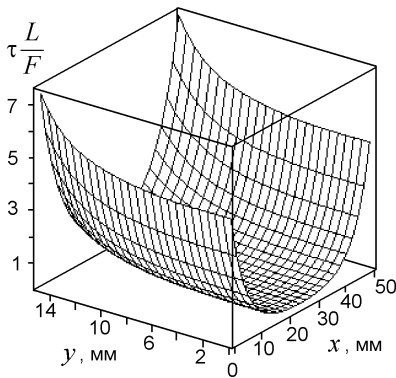


Рис. 2

З наведеного графіку видно, що напруження біля бічного краю перевищують напруження у середині клейового шару. Це зумовлено тим, що зусилля, які прикладені до пластинки поза межами клейового шару  $y \in (h; H]$  передаються до іншої пластинки через найближчі ділянки клейового шару, а саме через область біля його бічного краю.

Коефіцієнти  $A_n$  и  $B_n$  в формулах (15) зменшуються с ростом індексу  $n$  не монотонно і залежать від кількості членів ряду  $N$ . Дані, наведені у табл. 1, ілюструють ці залежності. За розглянутих параметрах шарів і крайових умовах маємо  $A_n = B_n$ .

Таблиця 1

$n$	$A_n$		
	$N = 30$	$N = 60$	$N = 100$
0	$0,17857 \cdot 10^{-5}$	$0,17857 \cdot 10^{-5}$	$0,17857 \cdot 10^{-5}$
1	$0,93462 \cdot 10^{-11}$	$-0,24992 \cdot 10^{-11}$	$0,24109 \cdot 10^{-12}$
2	$0,25231 \cdot 10^{-6}$	$0,25233 \cdot 10^{-6}$	$0,25233 \cdot 10^{-6}$
3	$-0,32325 \cdot 10^{-10}$	$0,90986 \cdot 10^{-11}$	$-0,81125 \cdot 10^{-12}$
4	$0,24843 \cdot 10^{-6}$	$0,24842 \cdot 10^{-6}$	$0,24842 \cdot 10^{-6}$
5	$-0,45493 \cdot 10^{-7}$	$-0,45443 \cdot 10^{-7}$	$-0,45455 \cdot 10^{-7}$

Розрахунки показують, що за даних крайових умов деякі коефіцієнти зі зростанням  $N$  наближаються до нуля (наприклад  $A_1$ ,  $A_3$ ), а деякі (наприклад  $A_0$ ,  $A_2$ ,  $A_4$ ) залишаються практично незмінними.

Для верифікації запропонованої моделі проведено порівняння отриманих результатів з результатами розрахунків, виконаних за допомогою методу скінчених елементів у програмі Comsol Multiphysics. Трансверсальні переміщення зовнішніх сторін шарів дорівнюють нулю (вигин відсутній), переміщення в напрямку осі  $0y$  у площині  $x0z$  також нульові. Число елементів у створеній 3D моделі становить 1158516. Відносно мала товщина клейового шару зумовлює велику кількість скінчених елементів.

На рис. 3 показані графіки дотичних напружень, діючих в серединній площині клейового шару в напрямку осі  $x$ , вздовж ліній  $y = 0$  (а) і  $y = h$  (б),  $x \in [0; L]$  (пунктирна лінія). Для порівняння наведені також графіки напружень (2), розрахованих за наведеною моделлю (неперервна лінія).

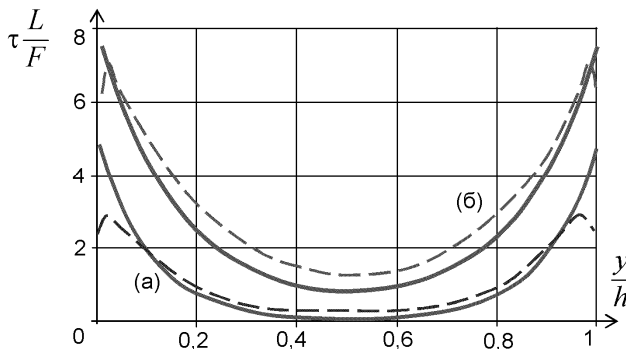


Рис. 3

Як бачимо, напруження доволі близькі. Біля краю шва дотичні напруження, розраховані за скінченноелементною моделлю зменшуються. Це є наслідком того, що зовнішній край клейового шару вільний від навантаження и напруження на його поверхні дорівнюють нулю. І в силу закону парності дотичних напружень напруження  $\tau_{xz}$  на краях шва також є



відсутніми, а їх максимум розташований на відстані порядку товщини клейового шару від краю [14]. Слід також зауважити, що внаслідок деформацій зовнішніх шарів, зумовлених коефіцієнтами Пуассона, у клейовому шарі також виникають дотичні напруження у поперечному до навантаження напрямку ( $\tau_{yz}$ ). Але виконані розрахунки показують, що дані напруження в декілька разів менші за дотичні напруження у поздовжньому напрямку. А максимальні результуючі дотичні напруження у клейовому шарі, розраховані за скінченноелементною моделлю мало відрізняються і не перевищують максимальних напружень, розрахованих за допомогою запропонованої наближеної моделі.

**Висновок.** Запропоновано спрощену двовимірну математичну модель напускного клейового з'єднання і отримано аналітичний розв'язок задачі про напружений стан з'єднання прямокутних пластин, яке має області непоклею з бічних сторін клейового шва. На прикладі модельної задачі показано, що наявність дефекту з бічної сторони області склейки значно збільшує напруження в кутових областях клейового шару. Запропонована модель може бути розвинена на врахування вигину в площині з'єднання, використана для розрахунку з'єднань внапуск силових елементів конструкції з обшивкою, розрахунку напружень в зоні з'єднань елементів інтегральних композитних конструкцій і т.д.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *da Silva L.F.M., das Neves P.J.C., Adams R.D., Spelt J.K.* Analytical models of adhesively bonded joints. Part I: Literature survey // *Int. J. Adhes. Adhesiv.* – 2009, - V. 29, P. 319-330.
2. *Рыбенков Н.Г., Артохин Ю.П.* Определение напряжений клея в соединении двух полубесконечных пластин // *Исслед. по теор. пластин и оболочек, Изд-во Казанского ун-та.* – 1981, №16, с. 82–90.
3. *Vihak V., Tokovyi Y., Rychahivskyy A.* Exact solution of the plane problem of elasticity in a rectangular region // *Journal of Computational and Applied Mechanics* 3 (2), P. 193-206.
4. *Rapp P.* Mechanics of adhesive joints as a plane problem of the theory of elasticity. Part II: Displacement formulation for orthotropic adherends // *Archives of Civil and Mechanical Engineering.* – 2015, - V. 15. – 1. 2, -P. 603–619.
5. *Barut A., Hanauska J., Madenci E., Ambur D.R.* Analysis method for bonded patch repair of a skin with a cutout // *Composite Structures.* – 2002, - I. 88, V.55, - P. 277-294.
6. *A. Chukwujekwu Okafor, Singh N., Enemuoh U.E., Rao S.V.* Design, analysis and performance of adhesively bonded composite patch repair of cracked aluminum aircraft panels // *Composite Structures.* – 2005, V. 71, P. 258–270.
7. *Kurenkov S.S.* A Simplified Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Nonuniform Load // *Mechanics of Composite Materials.* September. – 2015, V. 51, I. 4, P. 479-488.
8. *Куреннов С.С. Танчик Е.В.* Расчет напряженного состояния клеявого соединения прямоугольных пластинок разной ширины // *Вест. Моск. авиац. ин-та.* – Т. 22, №2. – М., 2015. – С. 162–169.
9. *Куреннов С.С.* Напряженное состояние пластинок разной ширины. Приближенная теория и эксперимент // *Вісник Запорізького національного університету: Збірник наукових статей.* – 2017, № 1, – С. 235–244.
10. *Shishesaz M., Bavi N.* Shear stress distribution in adhesive layers of a double-lap joint with void or bond separation // *J. of Adhesion Science and Technology.* – 2013, V.27, №11, P. 1197–1225.
11. *Olia, M. Rossettos N.* Analysis of adhesively bonded joints with gaps subjected to bending // *Int. J. Solids and Structures.* - 1996, V. 33, №18, P. 2681-2693.
12. *Васильев В.В., Боков Ю.В.* Исследования напряженного состояния клевого соединения композиционного материала с металлическим листом // *Проектирование, расчет и испытания конструкций из композиционных материалов.* – М.: ЦАГИ, –1979. – Вып. 7. – С. 4 – 10.
13. *Васильев В.В., Журье С.А.* О сингулярности решения в плоской задаче теории упругости для консольной полосы // *Изв. РАН. МТТ.* 2013. № 4. С. 40-49.

14. Frostig Y., Thomsen O. T., Mortensen F. Analysis of adhesive-bonded joints, square-end, and spew-fillet—high-order theory approach // *J. of Engineering Mechanics*. – 1999, V. 125, P. 1298–1307.

## REFERENCES

1. da Silva L. F. M., das Neves P. J. C., Adams R. D., Speltz J. K. Analytical models of adhesively bonded joints. Part I: Literature survey // *Int. J. Adhes. Adhesiv.* – 2009, - V. 29, P. 319-330.
2. Ryabenkov N.G., Artyuhin Yu.P. Opredelenie napryazheniy kleya v soedinenii dvuh polubeskonechnykh plastin (Determination of adhesive stresses in the joint of two semi-infinite plates) // *Issled. po teor. plastin i obolochek, Izd-vo Kazanskogo un-ta.* – 1981, №16, P. 82–90.
3. Vihak V., Tokovyy Y., Rychahivskyy A. Exact solution of the plane problem of elasticity in a rectangular region // *Journal of Computational and Applied Mechanics* 3 (2), P. 193-206.
4. Rapp P. Mechanics of adhesive joints as a plane problem of the theory of elasticity. Part II: Displacement formulation for orthotropic adherends // *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. – 2015, - V. 15. – I. 2, -P. 603–619.
5. Barut A., Hanauska J., Madenci E., Ambur D.R. Analysis method for bonded patch repair of a skin with a cutout // *Composite Structures*. – 2002, - I. 88, V.55, - P. 277-294.
6. A. Chukwujeoku Okafor, Singh N., Enemuoh U.E., Rao S.V. Design, analysis and performance of adhesively bonded composite patch repair of cracked aluminum aircraft panels // *Composite Structures*. – 2005, V. 71, P. 258–270.
7. Kurennov S.S. A Simplified Two-Dimensional Model of Adhesive Joints. Nonuniform Load // *Mechanics of Composite Materials*. Septembe. – 2015, V. 51, I. 4, P. 479-488.
8. Kurennov S.S. Tanchik E.V. Raschet napryazhennogo sostoyaniya kleevogo soedineniya pryamougolnykh plastinok raznoy shiriny (Calculation of the stressed state of the glued joint of rectangular plates of different widths) // *Vest. Mosk. aviats. in-ta.* – T. 22, №2. – M., 2015. – P. 162–169.
9. Kurennov S.S. Napryazhennoe sostoyanie plastinok raznoy shiriny. Priblizhennaya teoriya i eksperiment (Stress state of plates of different widths. Approximate theory and experiment) // *Visnik Zaporizkogo natsionalnogo un'versitetu: Zbirnik naukovih statey.* – 2017, № 1, – P. 235–244.
10. Shishesaz M., Bavi N. Shear stress distribution in adhesive layers of a double-lap joint with void or bond separation // *J. of Adhesion Science and Technology*. – 2013, V.27, №11, P. 1197–1225.
11. Olia, M. Rossettos N. Analysis of adhesively bonded joints with gaps subjected to bending // *Int. J. Solids and Structures*. - 1996, V. 33, №18, P. 2681-2693.
12. Vasilev V.V., Bokov Yu.V. Issledovaniya napryazhennogo sostoyaniya kleevogo soedineniya kompozitsionnogo materiala s metalicheskim listom (Investigations of the stressed state of the adhesive bonding of a composite material with a metal sheet) // *Proektirovanie, raschet i ispytaniya konstruktivnykh iz kompozitsionnykh materialov.* – M.: TsAGI, –1979. – № 7. – P. 4 – 10.
13. Vasilev V.V., Lure S.A. O singulyarnosti resheniya v ploskoy zadache teorii uprugosti dlya konsolnoy polosy (On the singularity of the solution in the plane elasticity problem for the console strip) // *Izv. RAN. MTT.* 2013. № 4. - P. 40-49.
14. Frostig Y., Thomsen O. T., Mortensen F. Analysis of adhesive-bonded joints, square-end, and spew-fillet—high-order theory approach // *J. of Engineering Mechanics*. – 1999, V. 125, P. 1298–1307.

Стаття надійшла 07.05.2018

Kurennov S.S.

### STRESS CONDITION OF GLUED JOINT WITH LONG-TERM DEFECT

Here a simplified two-dimensional model of overlapping adhesive joint is proposed. The transverse displacements of the bearing layers are assumed to be zero. The stresses are assumed to be distributed uniformly over the thickness of the layers. The adhesive layer only works in shear, i.e. bending of the joint is absent. These simplifications make it possible to obtain an analytical solution of the problem. Here the stressed state problem of the adhesive joint of two variable thickness rectangular plates is solved, this joint has defects in the adhesive layer along the lateral sides. It is assumed that the joint has symmetry relative to the longitudinal axis. The problem is reduced to the second-order partial differential equations system relative to the longitudinal displacements of the outer bearing layers. The solution constructed by the variables separation method is an eigenfunctional series. The boundary conditions at the joint symmetry axis, at the lateral sides, at the edge of the glued area and bearing layers beyond of the adhesive layer (i.e., at the edge of the glued and not glued area) are exactly satisfied. The boundary conditions at the plates ends are satisfied by orthogonalization of the residual to a system of eigenfunctions. The eigenfunctions are not orthogonal. The orthogonalization of the residual leads to a linear equations system relative to the unknown coefficients of the functional series.

It is proved that the solution of the system can be obtained by the reduction method. The model problem is solved. Here is investigated the influence of the solution series terms number on the values of the

coefficients entering into the solution. Mechanical effects are investigated, and it is shown that the defects in the adhesive layer can significantly increase the stresses at the edge of the adhesive layer. The comparison of the numerical results with the results obtained by finite element method is made. It is shown that the proposed approach to the problem has an accuracy, sufficient for the design problems.

**Key words:** glued joint, analytical solution, two dimensional model, separation of variables.

*Куреннов С. С.*

### **НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ КЛЕЕВОГО СОЕДИНЕНИЯ С ПРОДОЛЬНОМ ДЕФЕКТОМ**

Перемещение элементов внешних несущих слоев в поперечном направлении считаются равными нулю. Задача сведена к системе дифференциальных уравнений в частных производных относительно продольных перемещений слоев, решение которой строится при помощи метода разделения переменных. Решена модельная задача. Показано, что отсутствие клея вдоль боковой стороны соединения может в значительной степени увеличивать напряжение у края клеевого слоя.

**Ключевые слова:** клеевое соединение, аналитическое решение, двумерная модель, разделение переменных.

УДК 624.078.4+539.3

*Куреннов С. С.* **Напружений стан клеєвого з'єднання з поздовжнім дефектом //** Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 94-104.

*В наближеній двовимірній постановці за допомогою методу відокремлення змінних розв'язана задача про напружений стан клеєвого з'єднання з поздовжнім дефектом у клеєвому шарі.*

Табл. 1. Ил. 3. Бібліогр. 14 назв.

UDC 624.078.4+539.3

*Kurennov S.S.* **Stress condition of glued joint with long-term defect //** Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2018. – Issue 100. – P. 94-104. – Ukr.

*In the approximate two-dimensional formulation with the help of the method of separating the variables, the problem of the stress state of the adhesive bond with the longitudinal defect in the adhesive layer is solved.*

Tabl. 1. Fig. 3. Ref. 14.

УДК 624.078.4+539.3

*Куреннов С. С.* **Напряженное состояние клеєвого соединения с продольным дефектом //** Соппротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2018. – Вип. 100. – С. 94-104. – Укр.

*В приближенной двумерной постановке при помощи метода разделения переменных решена задача о напряженном состоянии клеєвого соединения с продольным дефектом в клеєвом слое.*

Табл. 1. Ил. 3. Библиогр. 14 назв.

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** доктор технічних наук, професор кафедри вищої математики Національного аерокосмічного університету ім. М.С. Жуковського «Харківський авіаційний інститут»

**E-mail:** [kurennov.ss@gmail.com](mailto:kurennov.ss@gmail.com)

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-3835-3288>