

УДК 539.3

## ТЕСТУВАННЯ ЗБІЖНОСТІ МСЕ НА ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ПРИ ВИКОРИСТАННІ ПРОСТОРОВОГО КРИВОЛІНІЙНОГО СЕ

Г.М. Іванченко ,  
д-р техн. наук, професор

А.В. Пікуль

*Київський національний університет будівництва і архітектури,  
Київ, Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

В даній роботі наведено результати тестування методу скінченних елементів з використанням криволінійного просторового скінченного елемента на двох типах задач теорії пружності (рівновага товстостінного циліндра під дією зовнішнього та внутрішнього тиску, рівновага товстих плит з різними умовами закріплення) з різними параметрами та згущенням сітки дискретизації. Результати дослідження порівнюються з відомими аналітичними розв'язками, а також з розв'язками, отриманими іншими схемами методу скінченних елементів в ПК «ЛПРА-САПР» та ПК «SCAD Office».

**Ключові слова:** метод скінченних елементів, товсті пластини, товсті оболонки, криволінійний просторовий скінченний елемент, задача Ламе.

**Вступ.** Побудова співвідношень на основі гіпотез Кірхгофа-Лява не дає можливості врахувати перепади функції напруження по товщині пластини, що приводить до великої похибки при розрахунку конструкцій з концентраторами напружень. Дещо ліпші результати дозволяє отримати застосування елементів, побудованих на основі теорії Міндліна-Рейснера, яка враховує деформації поперечного зсуву.

Використання просторових криволінійних скінченних елементів при моделюванні та розрахунку нетонких пластин і оболонок дозволяє правильніше оцінити напружено-деформований стан конструкцій, що проєктуються.

Збіжність методу скінченних елементів це важлива характеристика, оскільки визначає придатність скінченного елемента до моделювання конструкцій. Оскільки апроксимація, як правило, дає наближений опис розподілу деформацій в елементі, то результати розрахунку конструкції в загальному випадку також є наближеними. І тому залишається актуальним питання щодо точності, стійкості і збіжності розв'язку, отриманого методом скінченних елементів.

В даній роботі розглядається тестування методу скінченних елементів на просторових задачах теорії пружності, змодельованих за допомогою криволінійного скінченного елемента, реалізованого в межах дисертаційного дослідження [1, 5] і впровадженого в розрахунковий процесор ПК «ЛПРА-САПР» під номером 39, та порівняння результатів розрахунку з теоретичними розв'язками, які містяться в працях А.І. Лур'є [4], Л.Г. Доннелла [2], Б.М. Лісіцина [3] та ін. В якості тестових розглядаються: задача Ламе про товстий циліндр під зовнішнім та

внутрішнім тиском, товста сфера під зовнішнім та внутрішнім тиском, згин товстих пластин з різними умовами обпирання.

З принципу можливих переміщень

$$\mathbf{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathbf{l}(\mathbf{v}) = 0, \quad (1)$$

де дійсне переміщення  $\mathbf{u}$  та можливе переміщення  $\mathbf{v}$  визначені на області  $\Omega$  і належать енергетичному простору  $V$ , впливає умова збіжності:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \|U - U_d\|_V \rightarrow 0, \quad (2)$$

де  $U$  – точний розв’язок,  $U_d$  – розв’язок, отриманий МСЕ,  $d$  – крок розбивки скінченними елементами.

Оцінка похибки за метричним критерієм:

$$\|U - U_d\|_0 \leq kd^2 \|U\|_2. \quad (3)$$

### 1. Товстостінний циліндр під зовнішнім та внутрішнім тиском.

Розглянемо задачу рівноваги товстостінного циліндра під рівномірним зовнішнім та внутрішнім тиском (задача Ламе), що розташований поміж двома нерухомими жорсткими гладкими плитами, які не дозволяють поздовжні переміщення на торцях циліндра, але не заважають радіальним зміщенням. Виведення аналітичного розв’язку задачі в переміщеннях та в напруженнях наведено в праці Лур’є [4].

Для порівняння моделюємо товстостінний циліндр з зовнішнім радіусом 10 см в ПК «ЛІРА-САПР» за допомогою просторового криволінійного СЕ (39 СЕ) та за допомогою ізопараметричного 36 СЕ (рис. 1). Циліндр розбиваємо по периметру на 12 секторів та по радіусу на 1 і 2 елементи для товщин 1-9 см, і на 4 елементи для товщин 7-9 см. У вузлах задаємо локальну систему координат, орієнтовану відцентрово. Граничні умови – в’язі по всіх локальних степенях свободи окрім радіальних. Модуль пружності матеріалу  $E = 200$  ГПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.25$ . Навантаження – зовнішній тиск 100 кПа та внутрішній 500 кПа.

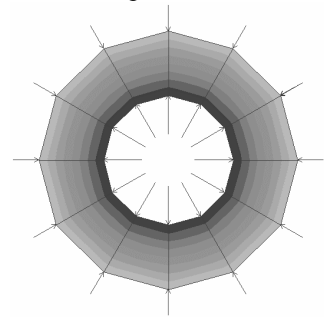


Рис. 1

Результати розрахунку наведені в таблицях: радіальне переміщення внутрішньої поверхні циліндра наведено в Табл.1-3, та радіальне переміщення зовнішньої поверхні в Табл. 4-6 при розбивці по товщині в 1, 2, та 4 елементи відповідно.

Таблиця 1

$h, м$	$h/φr$	$U, 10^7, м$	$U_{39}, 10^7, м$	$\delta, \%$	$U_{36}, 10^7, м$	$\delta, \%$
0,09	3,125	0,2225	0,1043	-53,13	-0,0704	-131,6
0,08	2,546	0,4687	0,4210	-10,17	0,2973	-36,58
0,07	2,056	0,7675	0,7386	-3,77	0,5803	-24,39
0,06	1,637	1,1607	1,1541	-0,53	0,9883	-14,86
0,05	1,273	1,7187	1,7396	1,22	1,580	-8,07
0,04	0,955	2,5781	2,6260	1,86	2,497	-3,15
0,03	0,674	4,0533	4,1391	2,12	4,049	-0,11
0,02	0,424	7,0833	7,2380	2,18	7,203	1,69
0,01	0,201	16,3570	16,707	2,14	16,780	2,59

Таблиця 2

$h, м$	$h/\varphi r$	$U, 10^7, м$	$U_{39}, 10^7, м$	$\delta, \%$	$U_{36}, 10^7, м$	$\delta, \%$
0,09	3,125	0,2225	0,1925	-13,50	0,1353	-39,20
0,08	2,546	0,4687	0,4548	-2,98	0,3707	-20,92
0,07	2,056	0,7675	0,7721	0,60	0,6877	-10,40
0,06	1,637	1,1607	1,1840	2,01	1,109	-4,46
0,05	1,273	1,7187	1,7610	2,46	1,699	-1,15
0,04	0,955	2,5781	2,6420	2,48	2,597	0,73
0,03	0,674	4,0533	4,1504	2,40	4,126	1,79
0,02	0,424	7,0833	7,2440	2,27	7,254	2,41
0,01	0,201	16,3570	16,710	2,16	16,808	2,76

Таблиця 3

$h, м$	$h/\varphi r$	$U, 10^7, м$	$U_{39}, 10^7, м$	$\delta, \%$	$U_{36}, 10^7, м$	$\delta, \%$
0,09	3,125	0,2225	0,21412	-3,78	0,16987	-23,67
0,08	2,546	0,4687	0,47845	-2,07	0,43158	-7,93
0,07	2,056	0,7675	0,79267	3,28	0,74984	-2,30

Таблиця 4

$h, м$	$h/\varphi r$	$U, 10^7, м$	$U_{39}, 10^7, м$	$\delta, \%$	$U_{36}, 10^7, м$	$\delta, \%$
0,09	3,125	-0,2746	-0,2508	-8,67	-0,2804	2,10
0,08	2,546	-0,1562	-0,1447	-7,39	-0,2023	29,47
0,07	2,056	0,0584	0,0641	9,87	-0,006	-110,23
0,06	1,637	0,4018	0,4066	1,21	0,3296	-17,95
0,05	1,273	0,9375	0,9499	1,32	0,874	-6,77
0,04	0,955	1,7969	1,8240	1,51	1,759	-2,11
0,03	0,674	3,2904	3,3489	1,78	3,308	0,53
0,02	0,424	6,3542	6,4795	1,97	6,481	2,00
0,01	0,201	15,674	15,997	2,06	16,10	2,72

Таблиця 5

$h, м$	$h/\varphi r$	$U, 10^7, м$	$U_{39}, 10^7, м$	$\delta, \%$	$U_{36}, 10^7, м$	$\delta, \%$
0,09	3,125	-0,2746	-0,2779	1,19	-0,2973	8,26
0,08	2,546	-0,1562	-0,1621	3,72	-0,1875	20,00
0,07	2,056	0,0584	0,0531	-8,97	-0,0262	-55,12
0,06	1,637	0,4018	0,4019	0,05	0,378	5,92
0,05	1,273	0,9375	0,9487	1,19	0,9311	-0,68
0,04	0,955	1,7969	1,827	1,68	1,819	1,23
0,03	0,674	3,2904	3,353	1,90	3,362	2,17
0,02	0,424	6,3542	6,4827	2,02	6,522	2,64
0,01	0,201	15,674	15,999	2,07	16,12	2,84

Таблиця 6

$h, м$	$h/\varphi r$	$U, 10^7, м$	$U_{39}, 10^7, м$	$\delta, \%$	$U_{36}, 10^7, м$	$\delta, \%$
0,09	3,125	-0,2746	-0,2860	4,16	-0,2938	6,99
0,08	2,546	-0,1562	-0,1671	6,93	-0,1754	12,26
0,07	2,056	0,05838	0,0509	-12,80	-0,0449	-23,10

В процесі дослідження виявлено, що найзручніше порівнювати залежність розміру похибки в обчисленні переміщень у залежності від

відношення товщини циліндра до довжини серединної дуги сектора. По результатах розрахунку побудовано графіки залежності для модулів похибок отриманих при переміщенні внутрішньої поверхні (рис. 2) та зовнішньої поверхні (рис. 3).

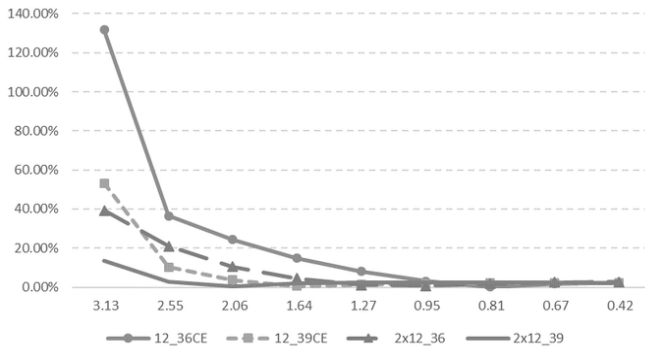


Рис. 2

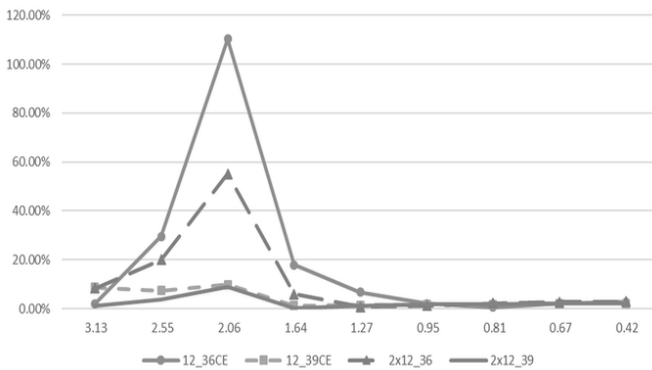


Рис. 3

Для моделей з товщиною стінки 7-9 см виконуємо розбивку в 4 елементи по товщині, щоб перевірити чи уточнюється розв'язок при згущенні сітки в 2 та 4 рази.

Таблиця 7

$h$	Внутрішня поверхня			Зовнішня поверхня		
	$\delta_1, \%$	$\delta_2, \%$	$\delta_4, \%$	$\delta_1, \%$	$\delta_2, \%$	$\delta_4, \%$
0.09	53.13	-13.50	-3.78	-8.67	1,19	4,16
0.08	-10.17	-2.98	2.07	-7,39	3,72	6,93
0.07	-3.77	0.60	3.28	9,87	-8,97	-12,80

Для товщини 9 см видно, що при згущенні сітки по товщині в 2 рази на переміщеннях внутрішньої поверхні уточнення розв'язку відбувається майже в 4 і вдруге в 3.5 рази, що добре відповідає нерівності (3). Для товщин 7 та 8 см згущення сітки перший раз уточнює розв'язок, а друге згущення вже ні. Такий результат можна пояснити впливом округлень у програмному забезпеченні або збіжністю до результату дещо відмінного

від отриманого аналітично. Для більшості задач похибкою в межах 3% можна знехтувати. Однак, потрібно проводити додаткові дослідження на інших задачах. Пікове значення похибки при товщині 7 см для переміщень зовнішньої поверхні пояснюється малістю відповідного аналітичного значення переміщення.

З результатів розрахунку можна зробити висновок, про межі застосування 39 СЕ – при розбивці в 1 елемент по товщині задовільний результат отриманий при співвідношенні товщини елемента до довжини серединної дуги від 0.2 до 2.

**2. Товста шарнірно-оперта плита.** Розглянемо задачу про товсту квадратну шарнірно-оперту плиту під дією поперечного рівномірно

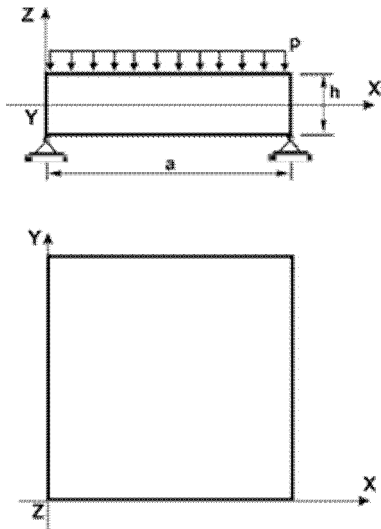


Рис. 4

розподіленого навантаження (рис. 4), розв'язок якої наведений у роботах [2, 7]. В дослідженні розглядаються три розрахункові моделі плит, зі співвідношенням довжини прольоту до товщини  $a/h$  – 8, 4 та 2. Розмір прольоту  $a = 16$  м, інтенсивність поперечного навантаження  $p = 100$  кПа, модуль пружності  $E = 30$  ГПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.2$ . Розбивку виконуємо за допомогою 39 СЕ. З сіткою в плані 4x4, 8x8, 16x16, 32x32 та 64x64. Порівнюватимемо з аналітичним максимальне значення вертикального переміщення серединної лінії плити.

Результати розрахунку при дискретизації кроком 0.5 м (сітка 32x32) зібрано до Табл. 8. для моделі виконаної 39 СЕ, 36 СЕ (ПК «ЛІРА-САІР») та 144 СЕ (побудований на основі теорії Міндліна-Рейснера, ПК «SCAD Office»). Можемо побачити, що для тонших пластин прогини отримані при моделюванні 39 СЕ обчислені точніше ніж за допомогою 36 СЕ та 144 СЕ. Для плити товщиною 8 м значення прогинів для 36 та 39 СЕ однакові.

Таблиця 8

$\frac{a}{h}$	$w_{\text{теор}}, \text{м}$	$w_{39}, \text{м}$	$\delta, \%$	$w_{36\_LIRA}, \text{м}$	$\delta, \%$	$w_{144\_SCAD}, \text{м}$	$\delta, \%$
8	0.001369	0.001362	0.5	0.001337	2.4	0.001441	5.3
4	0.000205	0.000201	2.0	0.000200	2.5	0.000241	17.6
2	0.000043	0.000040	7.5	0.000040	7.5	0.000061	41.9

В Табл. 9 зведено результати розрахунків у вигляді відношення отриманих прогинів до аналітичних значень (результат із застосуванням 39 СЕ у чисельнику і 36 СЕ у знаменнику). Аналізуючи результати згущення сітки (Табл. 9), бачимо, що таке згущення асимптотично наближує результат до аналітичного значення. При згущенні сітки з 32x32 до 64x64

таке уточнення вже відсутнє у 39 СЕ та ще відбувається на товщинах 2 м та 4 м у 39 СЕ.

Таблиця 9

$\frac{a}{h}$	$w_{\text{теор.}}, \text{М}$	$\frac{w_{39}/w_{\text{теор.}}}{w_{36}/w_{\text{теор.}}}$				
		4x4	8x8	16x16	32x32	64x64
8	0.001369	<u>0.740</u>	<u>0.931</u>	<u>0.997</u>	<u>0.995</u>	<u>0.995</u>
		0.555	0.820	0.929	0.977	0.990
4	0.000205	<u>0.919</u>	<u>0.966</u>	<u>0.976</u>	<u>0.980</u>	<u>0.980</u>
		0.813	0.909	0.960	0.975	0.979
2	0.000043	<u>0.902</u>	<u>0.911</u>	<u>0.922</u>	<u>0.923</u>	<u>0.925</u>
		0.853	0.898	0.919	0.923	0.925

Слід зазначити, що при розрахунку цієї задачі за теорією тонких пластин при сітці 32x32 похибка складає 7.12%, 28.13% та 115% для товщин 2 м, 4 м та 8 м відповідно, що свідчить про необхідність використання більш точних схем МСЕ.

**3. Товста защемлена по контуру плита.** Розглянемо задачу про деформування товстої квадратної защемленої по контуру плити під дією поперечного рівномірно розподіленого навантаження (рис. 5), розв'язок якої за допомогою проєкційно-сіткового методу наведено в [3]. В дослідженні розглядаються дві моделі зі співвідношенням довжини прольоту до товщини  $2a/h - 5$  та 2. Довжина прольоту плити  $2a = 20$  м, інтенсивність поперечного навантаження  $p = 10$  кПа, модуль пружності  $E = 10$  ГПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.25$ . Розмір скінченно-елементної сітки - 0.5 м для плити товщиною 10 м та 0.2 м для плити товщиною 4 м.

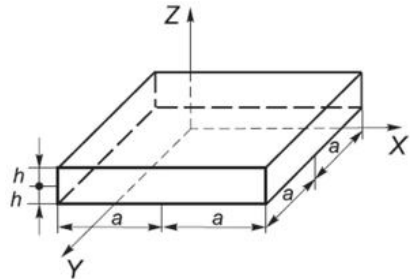


Рис.5

Результати розрахунку в прогинах по центру плити та в інтерпольованих значеннях напружень наведено в Табл. 10-11 для товщин 4 м та 10 м відповідно.

Таблиця 10

$z/h$	$wE/qa$			$\sigma_z/q$		
	Теор.	39 СЕ	36 СЕ	Теор.	39 СЕ	36 СЕ
1	-5.723	-5.811	-5.808	-0.993	-0.995	-1.012
0	-5.729	-5.841	-5.838	-0.491	-0.499	-0.500
-1	-5.414	-5.643	-5.640	-0.010	-0.009	-0.011

Таблиця 11

$z/h$	$wE/qa$			$\sigma_z/q$		
	Теор.	39 СЕ	36 СЕ	Теор.	39 СЕ	36 СЕ
1	-1.398	-1.335	-1.334	-1.032	-1.074	-1.021
0	-1.068	-1.045	-1.044	-0.521	-0.526	-0.527
-1	-0.893	-0.893	-0.893	0.041	0.087	-0.012

Слід зазначити, що теоретичний результат теж наближений, і при розрахунку як 39 СЕ так і 36 СЕ показали досить добре до нього наближення. Для порівняння ця задача також була змодельована СЕ на основі теорії Міндліна-Рейснера та теорії тонких пластин. Величина похибки при цьому склала 3.1% і 8.8% та 61% і 369% для плит товщинами 4 м і 10 м.

**Висновки.** При розв'язанні тестових задач теорії пружності було визначено межі, при яких розв'язки з використанням криволінійних просторових СЕ дають наближення результату до аналітичного значення з похибкою в межах 5%, та показано що в ряді задач його точність не гірша, а іноді вища ніж при використанні ізопараметричних СЕ. При згущенні сітки розв'язок уточнюється, що свідчить про збіжність МСЕ.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гоцуляк С. О., Пікуль А. В. Реалізація просторового скінченного елемента в криволінійній системі координат // Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. - Вип.88. - Київ : КНУБА, 2011, с. 91–102.
2. Доннелл Л.Г. Балки, пластины и оболочки. Пер. с английского. / Под ред. Э.И. Григолюка – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1982.
3. Лисицын Б.М. Проекционные и проекционно-сеточные методы. – К.: Вища школа, 1991.
4. Лурье А.И. Пространственные задачи теории упругости - М.: Гос. издательство технико-теоретической литературы – 1955.
5. Пікуль А.В. Врахування ортотропних властивостей матеріалу при моделюванні товстих оболонок просторовими криволінійними скінченими елементами // Строительство, материаловедение, машиностроение: Сб. Науч. трудов. Вып.№69. Дн-вск: ГВУЗ ПГАСА, 2013, с. 374–377.
6. Пікуль А.В. Тестування просторового криволінійного скінченного елемента на задачах теорії пружності// Сучасні методи і проблемно-орієнтовані комплекси розрахунку конструкцій і їх застосування у проектуванні і навчальному процесі: тези доповідей другої Міжнародної науково-практичної конференції, м. Київ, 26-27 вересня 2018 – с. 91-92.
7. Scadsoft. Толстая квадратная шарнирно-опертая пластина под действием поперечной равномерно распределенной нагрузки // <https://scadsoft.com/testsscad/index/text/51>.

#### REFERENCES

1. Hotsuliak Ye. O., Pikul A. V. Realizatsiia prostorovoho skinchennoho elementa v kryvoliniinii sistemii koordynat (The solid finite element realization in curvilinear coordinate system) // Opir materialiv i teoriia sporud: Naukovo-tekhnichnyi zbirnyk. - Vyp.88. - Kyiv : KNUBA, 2011, s. 91–102.
2. Donnell L.G. Balki, plastiny i obolochki. Per. s angliiskogo. / Pod. red. E.I. Grigoliuka. (Beams, plates and shells. Trans. from English) – М.: Nauka. Glavnaia redakcia fiziko-matematicheskoi literatury, 1982.
3. Lisitsyn B.M. Proektsyonnye i proektsyonno-setochnye metody (Proective and proective-mesh method). – К.: Vyshcha shkola, 1991.
4. Lurie A.Y. Prostranstvennye zadachi teorii uprugosti (Three-dimensional problems in the theory of elasticity)- М.:Hos. izdatelstvo tekhniko-teoreticheskoi literatury – 1955.
5. Pikul A.V. Vrahuvannia ortotropnykh vlastyvostei materialu pry modeliuванні tovstyk obolonok prostоровymy kryvoliniinymy skinchennymy elementamy (Account of orthotropic material properties in simulation of thick shells with 3D curvilinear finite elements) // Stroitelstvo, materialovedenie, mashinostroenie: Sb. Nauch. trudov. Vyp.№69. Dn-vsk : HVUZ PHASA, 2013, s. 374–377.
6. Pikul A.V. Testuvannia prostorovoho kryvoliniinoho skinchennoho elementa na zadachakh teorii pruzhnosti (Testing of curvilinear solid finite element on problems in the theory of elasticity)// Suchasni metody i problemno-orientovani komplekxy rozrakhunku konstruktсии i yikh

zastosuvannia u proektuvanni i navchalnomu protsesi: tezy dopovidei druhoi Mizhnarodnoi naukovo-praktychnoi konferentsii, m. Kyiv, 26-27 veresnia 2018 – s. 91-92.

7. Scadsoft. Tolstaia kvadratnaia sharnirno-opertaia plastina pod deistviem poperechnoi ravnomerno raspredelennoi nagruzki (Thick square plates under the action of a transverse uniformly distributed load)// <https://scadsoft.com/testsscad/index/text/51>.

*Стаття надійшла 18.05.2018*

*Ivanchenko G.M., Pikul A.V.*

### **FINITE ELEMENTS CONVERGING TESTING ON THE BASYS OF THEORY OF ELASTICITY PROBLEMS WITH USING CURVILINEAR SOLID FINITE ELEMENT**

This paper considers the testing of the finite element method based on three-dimensional problems in the theory of elasticity using the curvilinear solid finite elements. These elements implemented in the scope of the thesis research [1, 5] and realized within Solver of the software package "LIRA-SAPR" with the number 39. The test based on comparison between the obtained results and precise analytical solution and another finite elements models which exist on the software.

The theory of thin plates and shells created based on the correspondence creation, which follows the Kirchhoff-Love hypothesis. This theory does not allow taking into account the difference of the stress function over the thickness of the plate. The thickness increasing of such elements leads to an increase of inaccuracy when calculating the structures with stress concentrators. We can also get somewhat better results using the elements based on the Mindlin-Reissner plate theory, which takes into account the deformation of the transverse shear.

It is possible to evaluate more correctly the stress-strain state of projected structures using curvilinear solid finite elements in the simulation and calculation of non-thin plates and shells.

Convergence of the finite element method is an important characteristic, since it determines the suitability of a finite element for constructing simulations. Since the approximation, as a rule, gives an approximate description of the deformation distribution within an element, hence the results of the calculation of the construction generally are also approximate. That is why the question about the accuracy, stability and convergence of the solution obtained by the method of finite elements remains important.

As a test, it is considered the following tasks. The Lamé problem of the stress-strain situation of the thick-walled cylinder under the external and internal pressure. The bend of the hinged and fixed along the contour thick square plates under the action of a transverse uniformly distributed load. The results of the calculation are compared with the theoretical solutions contained in the works of Lurie A. [4], Donnell L. [2], Lisitsyn B. [3] and others. To compare the accuracy, the problems also was modeled using the isoparametric finite elements from SP "LIRA-SAPR" and the SP "SCAD Office".

In the study of convergence of FEM while modeling the thick cylinder, it was defined the limits of applicability of the curvilinear finite element.

**Key words:** finite element method, thick plates, thick shells, curvilinear solid finite element, Lamé problem.

*Иванченко Г.М., Пикуль А.В.*

### **ТЕСТИРОВАНИЕ СХОДИМОСТИ МКЭ НА ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ПРОСТРАНСТВЕННОГО КРИВОЛИНЕЙНОГО КЭ**

В данной работе приведены результаты тестирования метода конечных элементов с использованием криволинейного пространственного конечного элемента на двух типах задач теории упругости (равновесие толстостенного цилиндра под действием внешнего и внутреннего давления, равновесие толстых плит с разными условиями закрепления) с разными параметрами и сгущением сетки дискретизации. Результаты исследования сравниваются с известными аналитическими решениями, а также с решениями полученными другими схемами метода конечных элементов в ПК «ЛИРА-САПР» и ПК «SCAD Office».

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, толстые пластины, толстые оболочки, криволинейный пространственный конечный элемент, задача Ламе.



УДК 539.3

*Іванченко Г.М., Пікуль А.В. Тестування збіжності МСЕ на задачах теорії пружності при використанні просторового криволінійного СЕ // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 172-180.*

*Наведено результати тестування методу скінченних елементів з використанням криволінійного просторового скінченного елемента на двох типах задач теорії пружності (рівновага товстостінного циліндра під дією зовнішнього та внутрішнього тиску, рівновага товстих плит з різними умовами закріплення) з різними параметрами та згущенням сітки дискретизації. Результати дослідження порівнюються з відомими аналітичними розв'язками, а також з розв'язками отриманими іншими схемами методу скінченних елементів в ПК «ЛІРА-САПР» та ПК «SCAD Office».*

Табл. 11. Іл. 5. Бібліогр. 7 назв.

UDC 539.3

*Ivanchenko G.M., Pikul A.V. Finite elements converging testing on the basys of Theory of Elasticity problems with using curvilinear solid finite element. // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2018. – Issue 100. – P. 172-180.*

*In this paper, we present the results of the finite elements method testing using a curvilinear three-dimensional finite element based on the two types of elastic theory problems. The equilibrium of a thick-walled cylinder under the influence of external and internal pressure and the equilibrium of thick plates with different fixing conditions with different parameters and condensation of the sampling grid. The results of the study are compared with the known analytical solutions, as well as with the solutions obtained by other schemes of the method of finite elements on the SP "LIRA-SAPR" and the SP "SCAD Office".*

Tabl. 11. Il. 5. Ref. 7.

*Іванченко Г.М., Пікуль А.В. Тестирование сходимости МКЭ на задачах теории упругости при использовании пространственного криволинейного КЭ // Сопрогивление материалов и теория сооружений. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 172-180.*

*Приведены результаты тестирования метода конечных элементов с использованием криволинейного пространственного конечного элемента на двух типах задач теории упругости (равновесие толстостенного цилиндра под действием внешнего и внутреннего давления, равновесие толстых плит с разными условиями закрепления) с разными параметрами и згущением сетки дискретизации. Результаты исследования сравниваются с известными аналитическими решениями, а также с решениями полученными другими схемами метода конечных элементов в ПК «ЛІРА-САПР» и ПК «SCAD Office».*

Табл. 11. Ил. 5. Библиогр. 7 назв.

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** доктор технічних наук, професор, професор кафедри будівельної механіки КНУБА ІВАНЧЕНКО Григорій Михайлович.

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, кафедра будівельної механіки, Іванченко Григорій Михайлович.

**Адреса домашня:** Україна, м. Київ, вул. Заслонова, 9, п. 80.

**Робочий тел.:** +38(044) 248-32-37;

**Мобільний тел.:** +38(067) 597-19-48;

**E-mail:** ivgm61@gmail.com

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0003-1172-2845>

**Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада):** асистент кафедри металевих та дерев'яних конструкцій КНУБА ПІКУЛЬ Анатолій Володимирович.

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, КНУБА, кафедра металевих та дерев'яних конструкцій, Пікуль Анатолій Володимирович.

**Адреса домашня:** Україна, м. Київ, вул. Бальзака, 56, кв. 148.

**Мобільний тел.:** +38(097) 217-68-79;

**E-mail:** anato1pikul@gmail.com