ISSN 2410-2547
Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures. 2018. № 100

УДК 539.3

ПРО ОДИН ВАРІАНТ ОДНОВИМІРНИХ РОЗРАХУНКОВИХ РІВНЯНЬ ДЛЯ ДОСЛІДЖЕННЯ НДС НЕТОНКИХ ПЛАСТИН ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ

О.А. Шорін,
аспірант кафедри опору матеріалів

Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680

В статті розглядається узагальнення методу прямих на дослідження напружено-деформованого стану пластин досить складної форми, в постановці плоскої задачі теорії пружності (плоска деформація або плоский напружений стан), які раніше не розглядалися класичним варіантом методу прямих. Побудовано систему розрахункових рівнянь, поставлено граничні задачі, які передбачається розв’язувати ефективним чисельним методом дискретної ортогоналізації С.К. Годунова.
Ключові слова: теорія пружності, метод прямих, чисельно-аналітичний метод, проекційний метод, одновимірні граничні задачі, плоска деформація, напружено-деформований стан, редуковані рівняння, метод дискретної ортогоналізації, пластина змінної товщини.

Вступ. Метод прямих [1]-[3], [5]-[6] є одним із ефективних методів будівельної механіки, згідно якого розрахунок просторових задач теорії пружності виконується поетапно – на першому етапі знижується вимірність вихідних рівнянь, а на другому редуковані рівняння розв’язуються аналітично або чисельно. Традиційно в методі прямих зниження вимірності за однією чи за двома просторовими координатами виконувалось за допомогою метода скінченних різниць, що значно зменшувало можливості застосування на другому етапі сучасних чисельних методів.

В низці публікацій [7]-[10] було запропоновано для зниження вимірності вихідних рівнянь використовувати проекційний метод Бубнова-Гальоркіна-Петрова з локально зосередженими базисними функціями. Оскільки ці функції не є ортогональними, то для застосування такого підходу використовується тензорна символіка та відповідні правила операцій з індексними величинами. Згідно тензорної символіки будь-який вихідній функції двох просторових змінних $f(x,y)$ відповідає два варіанта коефіцієнтів в розкладі за базисом – контраваріантні компоненти, які є коефіцієнтами відносно основного базису та коваріантні, що є моментами відносно елементів основного базису.

В наших роботах [10]-[11] запропоновано новий підхід до побудови розрахункових одновимірних рівнянь для об’єктів більш складної форми – нетонких пластин змінної товщини. Як показали подальші дослідження удосконалення запропонованої методики полягає в побудові редукованих рівнянь відносно невідомих функцій, які мають більш простий фізичний зміст, аніж ті, що використовувались в [10]-[11]. В даній роботі виконується таке удосконалення.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Автори сучасних публікацій дотримуються традиційних методів побудови редукованих диференційних рівнянь, використовуючи скінченно-різницевий метод на першому етапі, аналітичні або чисельні методи для розв'язання системи звичайних диференційних рівнянь на другому етапі.

Мета та завдання. Побудова розрахункових рівнянь нового типу із орієнтацією на подальше застосування методу дискретної ортогоналізації С.К. Годунова [4] для дослідження НДС нетонких пластин змінної товщини.

Основна частина. При знижені вимірності рівнянь теорії пружності [10] редуковані рівняння можна отримати в коефіцієнтах (вони також є моментами відносно елементів взаємного базису), або в моментах, які відповідно є коефіцієнтами відносно взаємного базису. Ці системи редукованих рівнянь дають однакові розв'язки, оскільки співпадають з точністю до лінійного перетворення. Але для застосування в одних задачах більш зручно користуватися редукованими рівняннями в моментах, в інших рівняннями в коефіцієнтах. Крім того, слід враховувати, що якщо функції основного базису є локально зосередженими, то взаємний базис визначений на всьому відрізку визначення невідомих функцій.

В наших роботах [10]-[11] побудовані редуковані рівняння в моментах для пластин змінної товщини.

Оскільки відповідні рівняння в коефіцієнтах будуються нетривіально, то в даній роботі детально описується процес побудови редукованих рівнянь в коефіцієнтах.

В якості вихідної розглядається плоска задача теорії пружності, визначена в області D, яка віднесена до декартової системи координат (рис. 1).

В якості вихідних рівнянь плоскої задачі теорії пружності розглядаємо систему рівнянь в мішаній формі – відносно переміщень та напружень:

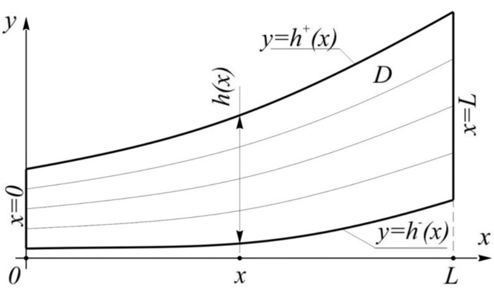

Рис. 1. Розрахункова область D

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}=\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\sigma_x-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y},\\
&\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}=\tau_{xy}-\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y},\\
&\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}=-\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}-X,\\
&\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}=-\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}-Y.
\end{aligned}\tag{1}$$

Тут позначено $\tilde{u}=\mu u$; $\tilde{v}=\mu v$.

До цієї системи приєднується рівняння:

$$\sigma_y=\frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\cdot\frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\sigma_x. \tag{2}$$

Яке дозволяє в редукованих рівняннях виключити σ_y з останнього рівняння системи (1). Слід зазначити, що рівняння (1) - (2) отримані з основної системи рівнянь плоскої задачі теорії пружності виключенням із них компонентів тензора деформації через компоненти тензора напружень за допомогою співвідношень закону Гука.

Передбачається, що тіло, переріз якого займає область D, знаходиться у рівновазі під дією внутрішніх об'ємних сил X та Y та зовнішніх сил і кінематичних впливів на границі тіла. Відповідно на ділянках граничної поверхні тіла задано граничні умови, які випливають з умов рівноваги приграничних ділянок (рис. 2) і мають вигляд:

- на торцевій площині $x = 0$:

$$k_{xx}^{0} \cdot u(0,y) - \sigma_x(0,y) = k_{xx}^{0} \cdot \Delta_{xx}^{0}(y) + q_{xx}^{0}(y),$$
$$k_{xy}^{0} \cdot v(0,y) - \tau_{xy}(0,y) = k_{xy}^{0} \cdot \Delta_{xy}^{0}(y) + q_{xy}^{0}(y); \tag{3}$$

- на торцевій площині $x = L$:

$$k_{xx}^{L} \cdot u(L,y) + \sigma_x(L,y) = k_{xx}^{L} \cdot \Delta_{xx}^{L}(y) + q_{xx}^{L}(y),$$
$$k_{xy}^{L} \cdot v(L,y) + \tau_{xy}(L,y) = k_{xy}^{L} \cdot \Delta_{xy}^{L}(y) + q_{xy}^{L}(y). \tag{4}$$

На бокових поверхнях граничні умови запишемо у вигляді:

$$\tau_{xy}(x,h^+)=\sigma_x(x,h^+)\frac{dh^+(x)}{dx}-k_x^+B^+(x)u(x,h^+)+q_x^+(x)B^+(x)+k_x^+B^+(x)\Delta_{yx}^+(x),$$
$$\sigma_y(x,h^+)=\tau_{xy}(x,h^+)\frac{dh^+(x)}{dx}-k_y^+B^+(x)v(x,h^+)+q_y^+(x)B^+(x)+k_y^+B^+(x)\Delta_{yx}^+(x),$$
$$\tau_{xy}(x,h^-)=\sigma_x(x,h^-)\frac{dh^-(x)}{dx}+k_x^-B^-(x)u(x,h^-)-q_x^-(x)B^-(x)-k_x^-B^-(x)\Delta_x^-(x),$$
$$\sigma_y(x,h^-)=\tau_{xy}(x,h^-)\frac{dh^-(x)}{dx}+k_y^-B^-(x)v(x,h^-)-q_y^-(x)B^-(x)-k_y^-B^-(x)\Delta_y^-(x). \tag{5}$$

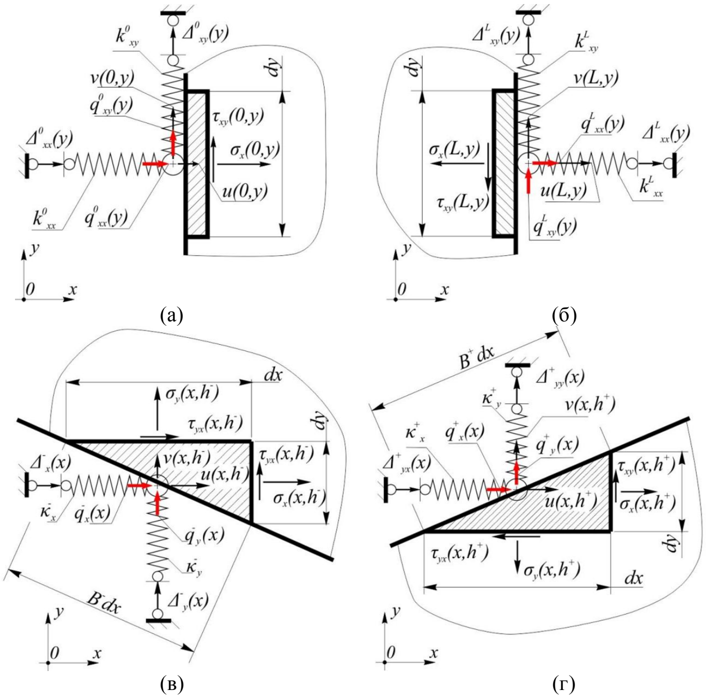

Рис. 2. Граничні умови на бокових поверхнях: (а) ліворуч; (б) праворуч; (в) нижня границя; (г) верхня границя. Граничні умови (3) - (4) є природніми граничними умовами загального вигляду, що необхідно для застосування метода Бубнова-Гальоркіна-Петрова при зниженні вимірності вихідних рівнянь (1) [9]

Кожен вертикальний переріз області *D*, що відповідає конкретному значенню $x \in (0, D)$, ділимо на *N-1* рівних частин:

$$\Delta(x) = \frac{h^+(x) - h^-(x)}{N-1}.$$

Отримані *N* точок для кожного *x* утворюють *N* геометричних місць точок, що є в загальному випадку кривими лініями (рис. 1), рівняння яких має вигляд:

$$\varphi_i(y) = h^-(x) + \Delta(x) \cdot (i-1), (i = \overline{1, N}). \tag{6}$$

В частинному випадку прямокутної області *D* побудовані лінії є прямими, з якими пов'язують назву метода прямих. В даній роботі це криві, і саме із цими лініями пов'яжемо систему локально зосереджених функцій $\varphi_i(x, y)$ (рис. 3).

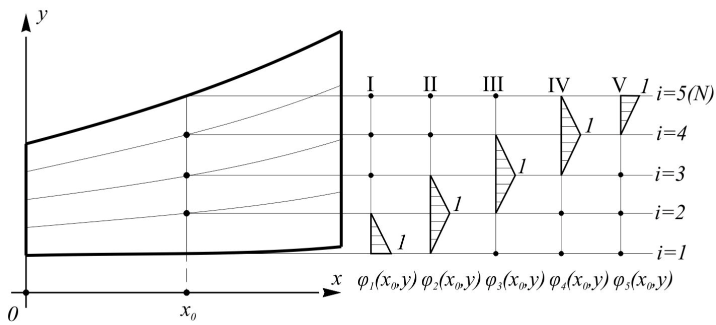

Рис. 3. Локально зосереджені базисні функції

Кожну розрахункову функцію вихідних рівнянь (1) шукаємо наближено як елемент *N*-вимірного лінійного простору із скалярним добутком:

$$(f(x, y), g(x, y)) = \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} f(x, y) \cdot g(x, y) dy, \tag{7}$$

вважаючи залежність усіх функцій від *x* як від параметра.

У відповідному евклідовому просторі система базисних функцій (6) є лінійно-незалежною, але не ортогональною. В зв'язку з цим будемо користуватися розробленим в тензорному численні означеннями, символами та операціями з індексними величинами. По-перше, будемо вважати систему базисних функцій за основний базис, який визначає основний закон перетворення базису (коваріантний, а відповідні індекси розташовані унизу). Будуються матриця компонентів двічі коваріантного метричного тензора:

$$\{g_{ij}\} = (\varphi_i(x, y), \varphi_j(x, y)) = \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \varphi_i(x, y) \cdot \varphi_j(x, y) dy = \frac{1}{\Delta(x)} \{\tilde{g}_{ij}\}, \tag{8}$$

де матриця:

$$\{\tilde{g}_{ij}\} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/6 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 2/3 & 1/6 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/6 & 2/3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2/3 & 1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1/6 & 2/3 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1/6 & 1/3 \end{bmatrix}. \qquad (9)$$

Далі будується взаємний базис $\{\varphi^i\}(i=1,N)$, елементи якого перетворюються за контрваріантним законом (індекс вгорі), і визначається за співвідношенням:

$$g_{ij}(x)\cdot g^{j\alpha}(x) = \delta_{i\cdot}^{\cdot\alpha}, \qquad (10)$$

де $\delta_{i\cdot}^{\cdot\alpha}$ - символ Кронекера, або мішаний метричний тензор,

$$\delta_{i\cdot}^{\cdot\alpha} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } i=\alpha \\ 0, \text{ якщо } i\neq\alpha. \end{cases}$$

Практично при достатньо високому N спочатку треба знаходити матрицю компонентів двічі контрваріантного метричного тензора, як обернену до матриці компонентів двічі коваріантного метричного тензора:

$$\{g^{ij}(x)\} = \{g_{ij}(x)\}^{-1} = \frac{1}{\Delta(x)}\{\tilde{g}_{ij}\}^{-1}. \qquad (11)$$

Далі знаходимо елементи взаємного базису як лінійну комбінацію елементів основного, використовуючи операцію підіймання індексу:

$$\varphi^i(x,y) = g^{ij}(x)\cdot\varphi_j(x). \qquad (12)$$

Тут і далі за індексами, що повторюються, передбачається підсумовування в межах області визначення індексу (узгодження Ейнштейна).

Щоб отримати редуковані рівняння в коефіцієнтах, кожне з вихідних рівнянь (1) множиться на базисну функцію взаємного базису та інтегрується за y в межах від $h^-(x)$ до $h^+(x)$. Для першого рівняння (1) маємо:

$$\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial x},\varphi^i\right) = \frac{\mu}{\lambda+2\mu}\left(\sigma_x,\varphi^i\right) - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\left(\frac{\partial\tilde{v}}{\partial x},\varphi^i\right). \qquad (13)$$

Тут:

$$\left(\sigma_x,\varphi^i\right) = \int_{h^-(x)}^{h^+(x)} \sigma_x(x,y)\cdot\varphi^i(x,y)dy = \sigma_x^i(x)$$

- момент відносно взаємного базису, або коефіцієнт відносно основного базису.

$$\left(\frac{\partial \tilde{v}}{\partial x},\varphi^i\right)=\int\limits_{h^-(x)}^{h^+(x)}\frac{\partial}{\partial y}(\tilde{v}^j_{(x)}(x)\cdot\varphi_j(x,y))\cdot g^{j\alpha}(x)\cdot\varphi_\alpha(x,y)dy=$$
$$=g^{j\alpha}(x)\cdot\tilde{v}^j(x)\int\limits_{h^-(x)}^{h^+(x)}\varphi_\alpha(x,y)\frac{\partial\varphi_j(x,y)}{\partial y}dy=g^{j\alpha}(x)\cdot b_{\alpha j}\cdot\tilde{v}^j(x). \tag{14}$$

Тут позначено:

$$b_{\alpha j}=\int\limits_{h^-(x)}^{h^+(x)}\varphi_\alpha(x,y)\frac{\partial\varphi_j(x,y)}{\partial y}dy\ .$$

Ця числова матриця наведена в роботі [7].

Для обчислення першої складової рівняння (13) необхідно знайти похідну за x від інтеграла зі змінними за x межами інтегрування та такого, підінтегральна функція якого залежить від параметра x.

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{h^-(x)}^{h^+(x)}u(x,y)\cdot\varphi^i(x,y)dy=\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{h^-(x)}^{h^+(x)}u(x,y)\cdot g^{ij}(x)\cdot\varphi_j(x,y)dy=$$
$$=\frac{dh^+(x)}{dx}\cdot u(x,h^+(x))\cdot g^{ij}(x)\cdot\varphi_j(x,h^+(x))-$$
$$-\frac{dh^-(x)}{dx}\cdot u(x,h^-(x))\cdot g^{ij}(x)\cdot\varphi_j(x,h^-(x))+$$
$$+\int\limits_{h^-(x)}^{h^+(x)}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\cdot\varphi^i(x,y)dy+\int\limits_{h^-(x)}^{h^+(x)}u(x,y)\frac{\partial g^{ij}(x)}{\partial x}\cdot\varphi_j(x,y)dy+$$
$$\int\limits_{h^-(x)}^{h^+(x)}u(x,y)\cdot g^{ij}(x)\frac{\partial\varphi_j(x,y)}{\partial x}dy,$$

з якого випливає основне співвідношення:

$$\int\limits_{h^-(x)}^{h^+(x)}\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}\cdot\varphi^i(x,y)dy=\frac{du^i(x)}{dx}+\frac{1}{\Delta(x)}\cdot\frac{d\Delta(x)}{dx}\cdot u^i(x)-$$
$$-g^{ij}(x)\cdot d_{j\alpha}(x)\cdot u^\alpha(x)-\frac{dh^+(x)}{dx}\cdot g^{iN}(x)\cdot u^N(x)+\frac{dh^-(x)}{dx}\cdot g^{i1}(x)\cdot u^1(x). \tag{15}$$

Тут матриця

$$d_{j\alpha}(x)=\int\varphi^i(x,y)\cdot\frac{\partial\varphi_j(x,y)}{\partial x}dy=\frac{1}{\Delta(x)}\cdot\frac{d\Delta(x)}{dx}=d_{j\alpha}$$

наведена в роботі [9].

Використовуючи отримані співвідношення (13), (14), (15), отримуємо перше редуковане рівняння:

$$\frac{d\tilde{u}^i(x)}{dx}=-\frac{1}{\Delta(x)}\cdot\frac{d\Delta(x)}{dx}\tilde{u}^i(x)+g^{ij}(x)\cdot d_{j\alpha}(x)\cdot\tilde{u}^\alpha(x)+$$
$$+\frac{dh^+(x)}{dx}\cdot g^{iN}(x)\cdot u^N(x)-\frac{dh^-(x)}{dx}\cdot g^{i1}(x)\cdot u^1(x)-$$

$$-\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\cdot g^{ij}(x)\cdot b_{j\alpha}(x)\cdot u^{\alpha}(x)+\frac{\mu}{\lambda+2\mu}\cdot\sigma_x^i(x). \tag{16}$$

Аналогічно отримуємо друге редуковане рівняння:

$$\frac{d\tilde{v}^i(x)}{dx}=-g^{ij}(x)\cdot b_{j\alpha}\cdot\tilde{u}^{\alpha}(x)-\frac{1}{\Delta(x)}\cdot\frac{d\Delta(x)}{dx}\tilde{v}^i+g^{ij}(x)\cdot d_{j\alpha}(x)\cdot\tilde{v}^{\alpha}(x)+$$
$$+\frac{dh^+(x)}{dx}\cdot g^{iN}(x)\cdot\tilde{v}^N(x)-\frac{dh^-(x)}{dx}\cdot g^{i1}(x)\cdot\tilde{v}^1(x)+\tau_{xy}^i. \tag{17}$$

Зниження вимірності третього рівняння має одну особливість. Після множення скалярно на $\varphi^i(x,y)$ в третьому вихідному рівнянні є складова

$$\left(\frac{\partial\tau_{xy}(x,y)}{\partial y},\varphi^i\right)=\int_{h^-(x)}^{h^+(x)}\frac{\partial\tau_{xy}(x,y)}{\partial y}\cdot\varphi^i(x,y)dy.$$

Яку не можна безпосередньо інтегрувати, використовуючи розклад напруження за базисом [12], оскільки спочатку необхідно «пом'якшити» інтегрування, переносячи похідну від напруження на базисну функцію за допомогою інтегрування частинами:

$$\int_{h^-(x)}^{h^+(x)}\frac{\partial\tau_{xy}(x,y)}{\partial y}\cdot\varphi^i(x,y)dy=\int_{h^-(x)}^{h^+(x)}\frac{\partial\tau_{xy}(x,y)}{\partial y}\cdot g^{ij}(x)\cdot\varphi_j(x,y)dy=$$
$$=g^{ij}(x)\int_{h^-(x)}^{h^+(x)}\frac{\partial\tau_{xy}(x,y)}{\partial y}\cdot\varphi_j(x,y)dy=$$
$$=g^{ij}(x)\left[\tau_{xy}(x,y)\cdot\varphi_j(x,y)\Bigg|_{h^-(x)}^{h^+(x)}-\int_{h^-(x)}^{h^+(x)}\tau_{xy}(x,y)\frac{\partial\varphi_j(x,y)}{\partial y}\cdot dy\right]=$$
$$=g^{ij}(x)\left[\tau_{xy}^N(x)\cdot\delta_{j\cdot}^{\cdot N}-\tau_{xy}^1(x)\cdot\delta_{j\cdot}^{\cdot 1}-\int_{h^-(x)}^{h^+(x)}\tau_{xy}^{\alpha}(x)\cdot\varphi_{\alpha}(x,y)\frac{\partial\varphi_j(x,y)}{\partial y}\cdot dy\right]=$$
$$=g^{iN}(x)\cdot\tau_{xy}^N(x)-g^{i1}(x)\cdot\tau_{xy}^1(x)-g^{ij}(x)\cdot b_{\alpha j}\cdot\tau_{xy}^{\alpha}(x).$$

Редукуючи першу складову третього рівняння системи (1) аналогічно до редукування першого рівняння остаточно отримуємо третє редуковане рівняння:

$$\frac{\partial\sigma_x^i(x)}{\partial x}=-\frac{1}{\Delta(x)}\cdot\frac{d\Delta(x)}{dx}\cdot\sigma_x^i(x)+g^{ij}(x)\cdot d_{j\alpha}(x)\cdot\sigma_x^{\alpha}(x)+$$
$$+\frac{dh^+(x)}{dx}\cdot g^{iN}(x)\cdot\sigma_x^N(x)-\frac{dh^-(x)}{dx}\cdot g^{i1}(x)\cdot\sigma_x^1(x)- \tag{18}$$
$$-g^{iN}(x)\cdot\tau_{xy}^N(x)+g^{i1}(x)\cdot\tau_{xy}^1(x)+g^{ij}(x)\cdot b_{\alpha j}(x)\cdot\tau_{xy}^j(x)-XX^i(x).$$

Складові четвертого рівняння системи (1) редукуються аналогічно відповідним складовим третього рівняння, але після редукування з отриманого рівняння необхідно виключити $\sigma_y^i(x)$, скориставшись співвідношенням (2), яке попередньо редукується:

$$\sigma_y^i(x) = \frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \cdot g^{ij}(x) \cdot b_{j\alpha}(x) \cdot \tilde{v}^{\alpha}(x) + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \cdot \sigma_x^i(x). \quad (19)$$

Остаточно отримуємо четверте редуковане рівняння:

$$\frac{d\tau_{xy}^i(x)}{dx} = g^{iN}(x) \cdot B^+(x) \cdot k_y^+ \cdot \tilde{v}^N(x) + g^{i1}(x) \cdot B^-(x) \cdot k_y^- \cdot \tilde{v}^1(x) +$$
$$+\frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} \cdot g^{iN}(x) \cdot b_{\alpha j}(x) \cdot g^{\alpha\beta}(x) \cdot b_{\beta\gamma}(x) \cdot \tilde{v}^{\gamma}(x) + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} \cdot g^{ij}(x) \cdot b_{\alpha j}(x) \cdot \sigma^{\alpha}(x) -$$
$$-\frac{1}{\Delta(x)} \cdot \frac{\partial \Delta(x)}{\partial x} \cdot \tau_{xy}^i(x) + g^{ij}(x) \cdot d_{\alpha j}(x) \cdot \tau_{xy}^{\alpha}(x) - YY^i(x). \quad (20)$$

Праві частини третього та четвертого редукованих рівнянь мають вигляд:

$$\begin{aligned} XX^i(x) &= X^i + q^{iN}(x) \cdot \left[B^+(x) \cdot q_x^+(x) + B^+(x) \cdot k_x^+ \cdot \Delta_x^+(x) \right] + \\ &+ q^{i1}(x) \cdot \left[B^-(x) \cdot q_x^-(x) + B^-(x) \cdot k_x^- \cdot \Delta_x^-(x) \right], \\ YY^i(x) &= Y^i + q^{iN}(x) \cdot \left[B^+(x) \cdot q_y^+(x) + B^+(x) \cdot k_y^+ \cdot \Delta_y^+(x) \right] + \\ &+ q^{i1}(x) \cdot \left[B^-(x) \cdot q_y^-(x) + B^-(x) \cdot k_y^- \cdot \Delta_y^-(x) \right]. \end{aligned} \quad (21)$$

Вони враховують усі можливі зовнішні впливи (крім температури) від зовнішнього середовища – об'ємні силові впливи $X(x,y)$ та $Y(x,y)$, поверхневі впливи - силові $q_x(x,y)$, $q_y(x)$, та кінематичні $\Delta_x(x)$, $\Delta_y(x)$ на бокові поверхні $y = h^-(x)$, $y = h^+(x)$.

З граничних умов загального вигляду на торцях $x = 0$ та $x = L$ отримуємо граничні умови для редукованих рівнянь також за допомогою проекційного методу. Оскільки при вибраному вигляді вихідних рівнянь ці умови є алгебраїчними рівняннями, то вони дуже просто переходять до редукованих, якщо кожне із них помножити на $\varphi^i(x,y)$ та проінтегрувати за y:

- при $x = 0$

$$\begin{aligned} k_{xx}^0 \cdot u^i(0) - \sigma_x^i(0) &= k_{xx}^0 \cdot \Delta_{xx}^{0,i} + q_{xx}^{0,i}, \\ k_{xy}^0 \cdot v^i(0) - \tau_{xy}^i(0) &= k_{xy}^0 \cdot \Delta_{xy}^{0,i} + q_{xy}^{0,i}; \end{aligned} \quad (22)$$

- при $x = L$

$$\begin{aligned} k_{xx}^L \cdot u^i(L) + \sigma_x^i(L) &= k_{xx}^L \cdot \Delta_{xx}^{L,i} + q_{xx}^{L,i}, \\ k_{xy}^L \cdot v^i(L) - \tau_{xy}^i(L) &= k_{xy}^L \cdot \Delta_{xy}^{L,i} + q_{xy}^{L,i}. \end{aligned} \quad (23)$$

Редуковані граничні умови дозволяють ставити граничні задачі для редукованих рівнянь.

Висновок. За допомогою проекційного метода та розкладу за базисом в лінійному N - вимірному евклідовому просторі з використанням тензорної символіки на основі вихідних рівнянь теорії пружності побудовано редуковані рівняння в коефіцієнтах, які пропонується використовувати для наближеного розв'язку досить складних задач теорії пружності за допомогою методу дискретної ортогоналізації С.К. Годунова.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Канторович Л.В.* Приближенные методы высшего анализа/ Л.В. Канторович, Крылов В.И. – М. – М.: Гостехиздат, 1949. – 709с.
2. *Канторович, Л.В*. Один прямой метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла // Известия Академии наук СССР. Серия 7. Отделение математических и естественных наук. - М. ; Л., 1933. – Вып. 5. - С. 647-652. - Отд. оттиск.
3. *Винокуров Л.П.* Прямые методы решения пространственных и контактных задач для массивов и фундаментов. – Харьков. Изд-во Харьк. Ун-та, 1956. – 279 с.
4. *Годунов С.К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / С.К. Годунов // Успехи математических наук. – Т.16. – 1961. - Вып.3. С.171-174.
5. *Шкелев Л.Т.* Метод прямых и его использование для определения напряженного и деформированного состояний пластин и оболочек / Л.Т. Шкелев, Ю.А. Морсков, Т.А. Романова, А.Н. Станкевич – Киев: Национальная академия наук Украины, Институт механики им. С.П. Тимошенко, Технический центр, 2002. – 177с.
6. Применение метода прямых для определения напряженного и деформированного состояния пространственных и пластинчатых конструктивных элементов: монография / Л.Т. Шкелев [и др.]. - К.: КНУСА, 2004. – 136 с.
7. *Станкевич А.М.* До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих / А.М. Станкевич., В.К. Чибіряков., Л.Т. Шкельов // Містобудування та територіальне планування. – 2010. – Вип. 36. – С. 413-423.
8. *Чибіряков В.К.* Модифікований метод прямих в задачах статики та динаміки масивних конструкцій / В.К. Чибіряков., А.М. Станкевич., Д.В. Левківський., В.Д. Мельничук // Вісник ОДАБА. – 2016. – Вип. 61. – Одеса. – С.412-423.
9. *Чибіряков В.К.* Зниження вимірності рівнянь статики товстої пластини змінної товщини узагальненим методом прямих / В.К. Чибіряков., А.М. Станкевич., А.А. Стащук // Опір матеріалів і теорія споруд. – Вип. 85. К.; КНУБА. – 2012. - С.58-67.
10. *Чибіряков В.К.* Узагальнений метод прямих в задачах теорії пружності для областей складної форми / В.К. Чибіряков., А.М. Станкевич., А.О. Краснеєва., О.А. Шорін // Вісник ОДАБА. – 2017. – Вип. 67. – Одеса. – С.71-76.
11. *Чибіряков В.К.* Про одну розрахункову модель для дослідження деформацій дамб і гребель та обґрунтування точності геодезичних спостережень / В.К. Чибіряков., А.М. Станкевич., В.С. Старовєров., Г.С. Акчуріна., О.А. Шорін // Інженерна геодезія. – 2016. – Вип. 63. – К.; КНУБА – С.21-30.
12. *Марчук Г.И.* Введение в проекционно-сеточные методы./Г.И. Марчук., В.И. Агошков. – М.; Наука. Главная редакция физико-математической литературы. 1981. – 416с.

REFERENCES

1. *Kantorovich L.V.* Priblizhennye metody vyshego analiza (The approximate method of the highest analysis)/ L.V. Kantorovich, V.I. Krylov. – M. – M.: Gostekhizdat, 1949. – 709s.
2. *Kantorovich L.V.* Odin pryamoi metod priblizhennogo resheniya zadachi o minimum dvoinogo integral (The one straight method of the approximate solution the task with a double integral minimum) // Izvestiya Akademii nauk SSSR. Seriya 7. Otdelenie matematicheskikh I estestvennykh nauk. - M. ; L., 1933. – Vyp. 5. - S. 647-652. - Otd. ottisk.
3. *Vinokurov L.P.* Pryamye metody resheniya prostranstvennykh i kontaktnykh zadach dlya massivov i fundamentov(The direct method to solve the space and contact problem for the massive and base). – Kharkov. Izd-vo Khar. Un-ta, 1956. – 279 s.
4. *Godunov S.K.* O chislennom reshenii kraevykh zadach dlya system lineinykh obyknovennykh differentsialnykh uravnenii(About numerical solution boundary tasks for the system of ordinary differential equations) / S.K. Godunov // Uspekhi matematicheskikh nauk. – T.16. – 1961. - Vyp.3. S.171-174.
5. *Shkeliov L.T.* Metod pramykh i ego ispolzovanie dlya opredeleniya napryazhennogo i deformirovannogo sostoyaniya plastin i obolochek(Applications method of lines to define the tension-deformation state of the plates and encasement) / *L.T. Shkeliov*, Yu.A. Morskov, T.A. Romanova, A.N. Stankevich – Kiev: Natsionalnaya akademiya nauk Ukrainy, Institut mekhaniki im. S.P. Timoshenko, Tekhnicheskii tsentr, 2002. – 177s.
6. Primenenie metoda pryamykh dlya opredeleniya napryazhennogo i deformirovannogo sostoyaniya prostranstvennykh i plastinchatykh konstruktivnykh elementov(Applications

method of lines to define the tension-deformation state of the space construction and the plate construction elements): monografiya / L.T. Shkeliov [i dr.]. - К.: KNUSA, 2004. – 136 s.
7. *Stankevich A.M.* Do znyzhennya vymirnosti granychnykh zadach teorii pruzhnosti za metodom pryamykh(Dimensional reduction a boundary conditions of the theory of elasticity in the method of lines) / A.N. Stankevich., V.K. Chybiryakov., L.T. Shkeliov // Mistobuduvannya ta terytorialne planuvannya. – 2010. – Vyp. 36. – S. 413-423.
8. *Chybiryakov V.K.*. Modifikovanyi metod pryamykh v zadachakh statyki ta dynamiki masyvnykh konstruktsii(The modified method of lines in problems of a statics and dynamics of the massive construction) / V.K. Chybiryakov., A.M. Stankevich., D.V. Levkivskyi., V.D. Melnichuk // Visnyk ODABA. – 2016. – Vyp. 61. – Odesa. – S.412-423.
9. *Chybiryakov V.K* Znyzhennya vymirnosti rivnyann statyki tovstoi plastyny zminnoi tovshyny uzagalnenym metodom pryamykh (Dimensional reduction static equations of large plate of variable thickness by generalized method of "lines") / V.K. Chybiryakov., A.M. Stankevich., A.A. Stashchuk // Opir materialiv i teoriya sporud. – Vyp. 85. К.; KNUBA. – 2012. - S.58-67.
10. *Chybiryakov V.K.* Uzagalnenyi metod pryamykh v zadachakh teorii pruzhnosti dlya oblastei sklsdnoi formy(Generalized method of lines in tasks of the theory of elasticity in irregular shape area) / V.K. Chybiryakov., A.M. Stankevich., A.O. Krasneeva., O.A. Shorin // Visnyk ODABA. – 2017. – Vyp. 67. – Odesa. – S.71-76.
11. *Chybiryakov V.K.* Pro odnu rozrakhunkovu model dlya doslidzhennya deformatsii damb i grebel ta obgruntuvannya tochnosti geodezichnykh sposterezhen(About one computational model for research strain of dams and justification accuracy of geodetic observations) / V.K. Chybiryakov., A.M. Stankevich., V.S. Staroverov., G.S. Akchurina., O.A. Shorin // Inzhenerna geodeziya. – 2016. – Vyp. 63. – К.; KNUBA – S.21-30.
12. *Marchuk G.I.*. Vvedenie v proektsionno setochnye metody (Introduction in the projection-mesh method)./ G.I. Marchuk., V.I. Agoshkov. – M.; Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoi literatury. 1981. – 416s.

Стаття надійшла 21.05.2018

Shorin A.A.

ABOUT ONE VERSION OF ONE-DIMENSIONS EQUATIONS FOR RESEARCH STRESS-STRAIN STATE OF NON THIN PLATE WITH VARIABLE THICKNESS

The Method of lines is one of the oldest combined approaches to the solutions of tasks in the structural mechanic. This method was founded at the beginning of 1930 by academician L.V. Kantorovich, the method has kept all the main features in our time – assumed function a continuous by one variable and a discrete by another variable.

At the first stage in the classic method of lines, the dimension of the space coordinates assumed equations has reduced with the help of finite-difference method. At the second stage, reduced equations are solving by an analytic or numerical method.

In works of V.K. Chybiryakov and A.M. Stankevich is offered at the first stage in the method of lines for reduction equations apply a projective method of Bubnov-Galerkin-Petrov, which ability is wider in particular for more effective use at the second stage of modern numerical methods.

This version of reduced dimensions in our work allows generalizing the method of lines for objects more irregular shape instead of a classic version. In this work, more convenient version of reduction one dimension equations (equations in coefficients) is constructed. Corresponding boundary conditions include power and kinematic impact from an environment. The boundary task is set, which we suggest solving by the method of discrete orthogonalization of S.K. Godunov.

In this article are considered the version of use generalized method of lines for the solution of tasks of the theory of elasticity in a flat region which have an irregular shape. The area is limited to two straight lines parallel to one of the coordinate axes, and two curves which are a function graph of other coordinate.

Keywords: theory of elasticity, method of line, numerical-analytic method, method of projections, one-dimension boundary task, flat deformation, tension-deformation state, reduction equations, method of discrete orthogonalization, the plate of variable thickness.

Шорин А.А.

ПРО ОДИН ВАРИАНТ ОДНОМЕРНЫХ РАСЧЕТНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ НДС НЕТОНКИХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ

В статье рассматривается обобщение метода прямых на исследование напряженно-деформированного состояния пластин достаточно сложной формы в постановке плоской задачи теории упругости (плоская деформация или плоское напряженное состояние), которые ранее не рассматривались классическим вариантом метода прямых. Построена система расчетных уравнений, поставлены граничные задачи, которые предлагается решать эффективным численным методом дискретной ортогонализации С.К. Годунова.

Ключевые слова: теория упругости, метод прямых, численно-аналитический метод, проекционный метод, одноразмерные граничные задачи, плоская деформация, напряженно-деформированное состояние, редуцированные уравнения, метод дискретной ортогонализации, пластина переменной толщины.

УДК 539.3

Шорін О.А. **Про один варіант одновимірних розрахункових рівнянь для дослідження НДС нетонких пластин змінної товщини** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 191-201.

Розглядається узагальнення методу прямих на дослідження напружено-деформованого стану пластин досить складної форми, в постановці плоскої задачі теорії пружності, які раніше не розглядалися класичним варіантом методу прямих. Побудовано систему розрахункових рівнянь, поставлено граничні задачі, які передбачається розв'язувати ефективним чисельним методом дискретної ортогоналізації С.К. Годунова.

Табл. 0. Іл. 3. Бібліогр. 12 назв.

Shorin A.A. **About one version of one-dimensions equations for research stress-strain state of non thin plate with variable thickness** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2018. – Issue 100. – P. 191-201. – Ukr.

The generalization of the method of straight lines to the study of the stress-strain state of plates of a rather complex shape in the formulation of a plane problem of the theory of elasticity, which was not previously considered by the classical version of the method of straight lines, is considered. A system of computational equations is constructed, boundary problems are posed, which are proposed to be solved by an effective numerical method of discrete orthogonalization of Godunov.

Tables 0. Fig. 3. Ref. 12.

Шорин О.А. **Об одном варианте одномерных расчетных уравнений для исследования НДС нетонких пластин переменной толщины** // Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-тех. сборн. – К.: КНУСА, 2018. - Вып. 100. - С. 191-201.

Рассматривается обобщение метода прямых на исследование напряженно-деформированного состояния пластин достаточно сложной формы в постановке плоской задачи теории упругости, которые ранее не рассматривались классическим вариантом метода прямых. Построена система расчетных уравнений, поставлены граничные задачи, которые предлагается решать эффективным численным методом дискретной ортогонализации С.К. Годунова.

Табл. 0. Ил. 3. Библиогр. 12 назв.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *аспірант, ШОРІН Олексій Анатолійович*
Адреса робоча: *03037, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31,Київський Національний Університет Будівництва та Архітектури, Шорін Олексій Анатолійович*
Робочий тел.: *+38(044)2415441*
Мобільний тел.: *+38(098) 9526246*
E-mail: shorin@i.ua