УДК 539.3

ДОСЛІДЖЕННЯ ПЕРШОЇ ОСНОВНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ШАРУ З ЦИЛІНДРИЧНОЮ ПОРОЖНИНОЮ

В.Ю. Мірошніков[1],
канд. техн. наук, доцент
Т.В. Денисова[2],
канд. техн. наук, доцент
В.С. Проценко[3],
д-р фіз-мат. наук, професор

[1]*Харківський національний університет будівництва та архітектури, м. Харків*
[2]*Харківский національний економічний університет, м. Харків*
[3]*Національний аерокосмічний університет ім. Н.Є. Жуковського «ХАІ»*

DOI: 10.32347/2410-2547.2019.103.208-218

Розв’язано просторову задачу теорії пружності для шару з повздовжньою циліндричною порожниною, коли на межах шару та на межі порожнини задані напруження. Розв’язок задачі отримано узагальненим методом Фур’є стосовно системи рівнянь Ламе в циліндричних координатах, пов’язаних із циліндром, та декартових координатах, пов’язаних із межами шару. Нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь, які отримані в результаті задоволення граничних умов, вирішено методом зрізання. В результаті були отримані напруження в різних точках пружного тіла. Проведено аналіз напружено – деформованого стану шару від дії зрівноваженого навантаження на його межах.

Ключові слова: циліндрична порожнина в шарі; рівняння Ламе; узагальнений метод Фур’є; нескінчені системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Вступ

При проектуванні конструкцій, деталей машин та споруд досить часто зустрічаються задачі, коли необхідно оцінити міцність пружного середовища в околі циліндричних порожнин чи включень. В якості таких задач можуть бути задачі про деформацію пружного шару з поздовжніми циліндричними порожнинами із заданими на межах тіла навантаженнями.

В науковій літературі розглядаються такі задачі. Так в роботах [1–4] розв’язуються задачі для шару з перпендикулярними до його меж порожнинами. Для розв’язання задач статики просторових пружних тіл у вигляді шару з поздовжніми порожнинами ці методи не можуть бути використані.

Просторові (тривимірні) задачі теорії пружності для тіл, які обмежені канонічними поверхнями (циліндр, конус, куля, еліпсоїд, параболоїд та ін.) вивчалися в роботі [5]. Точні розв’язки в цій роботі отримані виключно методом розділення змінних і методом Фур’є.

З паралельними до меж шару циліндричними порожнинами розглядаються стаціонарні задачі дифракції пружних хвиль в роботах [6–8], де використовується узагальнений метод Фур’є в поєднанні з методом зображень.

Для пружних тіл з декількома граничними поверхнями авторами роботи [9] розвинуто узагальнений метод Фур’є, який базується на основі теорем додавання базисних розв’язків рівняння Ламе.

За допомогою цього методу розв'язані задачі: для шару зі сферичною порожниною [10]; для півпростору з поздовжніми циліндричними порожнинами [11 – 14], для простору і циліндра з циліндричними порожнинами і включеннями в роботі [15]. Задачу для шару з циліндричною порожниною та заданими на граничних поверхнях переміщеннями розглянуто в роботі [16], для шару з пружним включенням в роботі [17], з повздовжньою товстостінною трубою в роботі [18].

Для шару з циліндричною порожниною та заданими на граничних поверхнях напруженнями готових алгоритмів в просторовому варіанті немає, тож проблема розрахунку таких задач є актуальною.

Метою цієї роботи є:

– розробка аналітико-числового методу розрахунку першої основної задачі теорії пружності (на усіх граничних поверхнях задані напруження) для шару з циліндричною порожниною, яка розташована паралельно поверхням шару;

– провести аналіз напружено-деформованого стану тіла від дії зрівноваженого нормального навантаження, прикладеного на межах шару, при вільній від навантаження межі порожнини.

Постановка задачі

В пружному однорідному шарі розташована кругова циліндрична порожнина радіусом R (рис. 1), вісь симетрії якої паралельна граничним поверхням шару.

Порожнину будемо розглядати у циліндричній системі координат (ρ, φ, z), шар у декартовій системі координат (x, y, z), яка однаково орієнтована та поєднана з системою координат циліндра. Верхня межа шару розташована на відстані $y=h$, нижня межа на відстані $y=-\tilde{h}$. Потрібно знайти розв'язок рівняння Ламе $\Delta\vec{U} + (1-2\sigma)^{-1}\nabla div\vec{U} = 0$ за умов, що на межах шару та на межі циліндричної порожнини задані напруження:

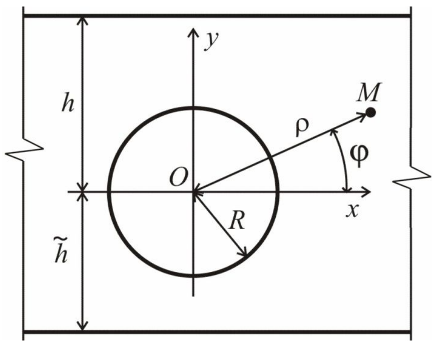

Рис. 1. Шар з циліндричною порожниною

$$F\vec{U}(x,z)\big|_{y=h} = \vec{F}_h^0(x,z)\,,\; F\vec{U}(x,z)\big|_{y=-\tilde{h}} = \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x,z)\,,\; F\vec{U}(\varphi,z)\big|_{\rho=R} = \vec{F}_R^0(\varphi,z)\,,$$

де

$$\begin{aligned} \vec{F}_h^0(x,z) &= \tau_{yx}^{(h)}\vec{e}_1^{(1)} + \sigma_y^{(h)}\vec{e}_2^{(1)} + \tau_{yz}^{(h)}\vec{e}_3^{(1)}\,, \\ \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x,z) &= \tau_{yx}^{(\tilde{h})}\vec{e}_1^{(1)} + \sigma_y^{(\tilde{h})}\vec{e}_2^{(1)} + \tau_{yz}^{(\tilde{h})}\vec{e}_3^{(1)}\,, \\ \vec{F}_R^0(\varphi,z) &= \sigma_\rho^{(R)}\vec{e}_1^{(2)} + \tau_{\rho\varphi}^{(R)}\vec{e}_2^{(2)} + \tau_{\rho z}^{(R)}\vec{e}_3^{(2)}\,, \end{aligned} \tag{1}$$

відомі функції; $\vec{e}_j^{(k)}$ $(j=1,2,3)$ – орти декартової (k=1) і циліндричної (k=2) систем координат, $F\vec{U}\Big| = 2G[\frac{\sigma}{1-2\sigma}\vec{n}\,\mathrm{div}U + \frac{\partial}{\partial n}\vec{U} + \frac{1}{2}(\vec{n}\times rot\vec{U})]$, $G=\frac{E}{2(1+\sigma)}$; σ, E – коефіцієнт Пуассона і модуль пружності шару.

При цьому, виходячи з умов статики, повинні виконуватись рівняння рівноваги

$$\iint\limits_{(\sigma)} \vec{F}(M)\mathrm{d}\sigma = 0,\ \iint\limits_{(\sigma)} \vec{r}\times\vec{F}(M)\mathrm{d}\sigma = 0, \tag{2}$$

де $\sigma=\{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3\}$, σ_1 – площина на y=h, σ_2 – площина на $y=-\tilde{h}$, σ_3 – поверхня циліндра ρ=R, $\vec{F}(M)=\begin{cases}\vec{F}_h^0(x,z)\ на\ \sigma_1\\ \vec{F}_{\tilde{h}}^0(x,z)\ на\ \sigma_2\\ \vec{F}_R^0(\varphi,z)\ на\ \sigma_3\end{cases}$, $\vec{r}$ – радіус вектор т. M.

Усі задані вектори і функції будемо вважати швидко спадаючими до нуля на далеких відстанях від початку координат по координаті z для циліндра та по координатах x і z для меж шару.

Розв'язок задачі

Виберемо базисні розв'язки рівняння Ламе для зазначених систем координат у вигляді [9]:

$$\begin{aligned}&\vec{u}_k^{\pm}(x,y,z;\lambda,\mu) = N_k^{(d)}e^{i(\lambda z+\mu x)\pm\gamma y};\\ &\vec{R}_{k,m}(\rho,\varphi,z;\lambda) = N_k^{(p)}I_m(\lambda\rho)e^{i(\lambda z+m\varphi)};\\ &\vec{S}_{k,m}(\rho,\varphi,z;\lambda) = N_k^{(p)}\left[(\mathrm{sign}\,\lambda)^m K_m(|\lambda|\rho)\cdot e^{i(\lambda z+m\varphi)}\right],\ k=1,2,3;\end{aligned} \tag{3}$$

$$N_1^{(d)}=\frac{1}{\lambda}\nabla;\ N_2^{(d)}=\frac{4}{\lambda}(\sigma-1)\vec{e}_2^{(1)}+\frac{1}{\lambda}\nabla(y\cdot);\ N_3^{(d)}=\frac{i}{\lambda}\mathrm{rot}\left(\vec{e}_3^{(1)}\cdot\right);\ N_1^{(p)}=\frac{1}{\lambda}\nabla;$$

$$N_2^{(p)}=\frac{1}{\lambda}\left[\nabla\left(\rho\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+4(\sigma-1)\left(\nabla-\vec{e}_3^{(2)}\frac{\partial}{\partial z}\right)\right];\ N_3^{(p)}=\frac{i}{\lambda}\mathrm{rot}\left(\vec{e}_3^{(2)}\cdot\right);$$

$$\gamma=\sqrt{\lambda^2+\mu^2}, -\infty<\lambda,\mu<\infty,$$

де σ – коефіцієнт Пуассона; $I_m(x)$, $K_m(x)$ – модифіковані функції Бесселя; $\vec{R}_{k,m}$, $\vec{S}_{k,m}$, k=1, 2, 3 – відповідно внутрішні та зовнішні розв'язки рівняння Ламе для циліндра; $\vec{u}_k^{(-)}$, $\vec{u}_k^{(+)}$ – розв'язки рівняння Ламе для шару.

Розв'язок задачі представимо у вигляді [16]

$$\vec{U}=\sum_{k=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}B_{k,m}(\lambda)\cdot\vec{S}_{k,m}(\rho,\varphi,z;\lambda)\mathrm{d}\lambda+$$

$$+\sum_{k=1}^{3}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(H_k(\lambda,\mu)\cdot\vec{u}_k^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu)+\tilde{H}_k(\lambda,\mu)\cdot\vec{u}_k^{(-)}(x,y,z;\lambda,\mu)\Big)\mathrm{d}\mu\mathrm{d}\lambda\,, \quad (4)$$

де $\vec{S}_{k,m}(\rho,\varphi,z;\lambda)$, $\vec{u}_k^{(+)}(x,y,z;\lambda,\mu)$ і $\vec{u}_k^{(-)}(x,y,z;\lambda,\mu)$ базисні розв'язки, які задані формулами (3), а невідомі функції $H_k(\lambda,\mu)$, $\widetilde{H}_k(\lambda,\mu)$ і $B_{k,m}(\lambda)$ необхідно знайти із крайових умов.

Для переходу базисних розв'язків між системами координат скористаємось формулами [18].

Для виконання граничних умов на верхній межі шару y=h, вектори $\vec{S}_{k,m}$ в (4) за допомогою формул переходу [18, формула (7)] перепишемо у декартовій системі координат через базисні розв'язки $\vec{u}_k^{(-)}$. Для отриманого вектору знайдемо напруження та прирівняємо (при y=h) заданому $\vec{F}_h^0(x,z)$, представленому через подвійний інтеграл Фур'є.

Для виконання граничних умов на нижній межі шару $y=-\widetilde{h}$, вектори $\vec{S}_{k,m}$ в (4) за допомогою формул переходу [18, формула (7)] перепишемо у декартовій системі координат через базисні розв'язки $\vec{u}_k^{(+)}$. Для отриманого вектору знайдемо напруження та прирівняємо (при $y=-\widetilde{h}$) заданому $\vec{F}_{\widetilde{h}}^0(x,z)$, представленому через подвійний інтеграл Фур'є.

Система з 6 рівнянь має визначник

$$\frac{64\cdot e^{-3x}\cdot\gamma^8\cdot\sigma^6\cdot\Big((3/4+x^2)\cdot(1-e^{2x})+1/4\cdot e^{6x}-1/4\Big)}{\lambda^4}, \quad (5)$$

де $x=\gamma(h+\tilde{h})$.

З отриманих рівнянь знайдемо функції $H_k(\lambda,\mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda,\mu)$ через $B_{k,m}(\lambda)$.

Для виконання граничних умов на циліндрі ρ=R, праву частину (4) за допомогою формул переходу [18, формула (8)] перепишемо у циліндричній системі координат через базисні розв'язки $\vec{R}_{k,m}$, $\vec{S}_{k,m}$. Для отриманого вектору знайдемо напруження та прирівняємо заданому $\vec{F}_R^0(\varphi,z)$, представленому інтегралом та рядом Фур'є. В результаті отримаємо сукупність трьох систем лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення невідомих $B_{k,m}(\lambda)$.

Визначник цієї системи [11]:

$$\begin{aligned}&\text{для } m=0 \quad |\Delta_0|=8(1-\sigma)\cdot x^2\cdot K_1^2(x)\cdot K_2(x),\\ &\text{для } m\ \ge\ 1 \quad |\Delta_m|>4m\cdot K_{m-1}(x)K_m(x)K_{m+1}(x),\ x=|\lambda|\rho,\ \lambda\ne 0.\end{aligned} \quad (6)$$

Знайдені раніше через $B_{k,m}(\lambda)$ функції $H_k(\lambda,\mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda,\mu)$ виключимо з системи рівнянь. В результаті отримаємо сукупність із трьох нескінчених

 ISSN 2410-2547
Опір матеріалів і теорія споруд/Strength of Materials and Theory of Structures. 2019. № 103

систем лінійних алгебраїчних рівнянь другого роду для визначення невідомих $B_{k,m}(\lambda)$.

Для отриманих систем, використовуючи (5) та (6), доведено їх однозначну розв'язність. Більш того, ці системи можна розв'язувати методом зрізання і має місто збіжність наближених рішень до точного.

Знайдені з нескінченної системи рівнянь функції $B_{s,m}(\lambda)$ підставимо у вирази для $H_k(\lambda,\mu)$ і $\tilde{H}_k(\lambda,\mu)$. Цим будуть визначені всі невідомі задачі.

Числові дослідження напруженого стану

Маємо однорідний ізотропний шар (Бетон класу В30) з циліндричною порожниною (рис. 1), коефіцієнт Пуассона σ=0,16, модуль пружності E=3250 кН/см^2. Радіус циліндричної порожнини R=5 см. Верхня та нижня межа шару розташовані відносно центру порожнини на відстані $h=\tilde{h}$ =15 см.

На верхній межі шару задані напруження $\sigma_y^{(h)} = -F \cdot \sigma_1(z) \cdot \sigma_2(x)$, $\tau_{yx}^{(h)} = \tau_{yz}^{(h)} = 0$, де F=1 кН/см^2 – розподілене навантаження,

$$\sigma_1(z) = \begin{vmatrix} |z| \geq b/2 + c, \ \ \sigma_1(z) = 0 \\ b/2 \leq |z| \leq b/2 + c, \ \ \sigma_1(z) = \dfrac{b/2 + c - |z|}{c} \\ |z| \leq b/2, \ \ \sigma_1(z) = 1 \end{vmatrix},$$

$$\sigma_2(x) = \begin{vmatrix} |x| \geq a/2 + c, \ \ \sigma_2(x) = 0 \\ a/2 \leq |x| \leq a/2 + c, \ \ \sigma_2(x) = \dfrac{a/2 + c - |x|}{c} \\ |x| \leq a/2, \ \ \sigma_2(x) = 1 \end{vmatrix},$$

b=18 см, a=6 см, c=2 см. На нижній межі шару задані напруження $\sigma_y^{(\tilde{h})} = -\left(\frac{F}{2} \cdot \sigma_1(z) \cdot \left(\sigma_2(x-15) + \sigma_2(x+15)\right)\right)$, b=18 см, a=6 см, c=2 см, $\tau_{yx}^{(\tilde{h})} = \tau_{yz}^{(\tilde{h})} = 0$. На поверхні порожнини задані напруження $\sigma_\rho^{(R)} = \tau_{\rho\varphi}^{(R)} = \tau_{\rho z}^{(R)} = 0$.

Умова (2), при заданих напруженнях, виконується.

Нескінченна система рівнянь була зведена до кінцевої — m=6. Обчислення інтегралів виконано за допомогою квадратурних формул Філона (для коливних функцій) і Сімпсона (для функцій без коливань). Точність виконання граничних умов при вказаних значеннях геометричних параметрів 10^{-2}.

На рис. 2 представлений напружений стан на перешийках від циліндричної порожнини до верхньої (рис. 2,(а)) та нижньої (рис. 2,(б)) межі шару вздовж осі y, при z=0, в кН/см^2.

На верхньому перешийку, при заданих σ_ρ на поверхні порожнини та верхній межі шару (рис. 2,(а), лінія 1, y=0см., y=15см.), напруження σ_φ і σ_z (рис. 2,(а), лінії 2 та 3 відповідно) ближче до порожнини мають додатні значення, ближче до верхньої межі шару – від'ємні.

На нижньому перешийку (рис. 2,(б)) всі напруження мають додатні значення, включаючи σ_ρ, яке на нижній поверхні шару та на поверхні порожнини задано нуль, але на самому перешийку набуває ненульових значень.

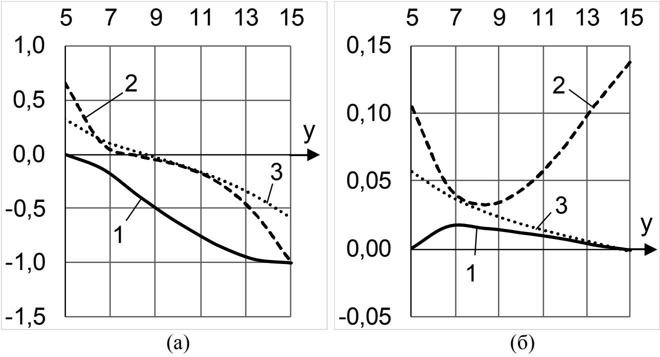

Рис. 2. Напружений стан на перешийках: (а) – від циліндричної порожнини до верхньої межі шару; (б) – від циліндричної порожнини до нижньої межі шару; 1 – σ_ρ; 2 – σ_φ; 3 – σ_z

На рис. 3 представлені напруження на верхній межі шару вдовж осі z, при x=0, в кН/см^2.

Напруження σ_z на верхній межі шару вдовж осі z (рис. 3, лінія 3) мають від’ємні значення в межах навантаження (рис. 3, лінія 1), за межами – додатні.

При ширині навантаження b=18 см. напруження σ_x (рис. 3, лінія 2) досягають значення напружень σ_y при z=0.

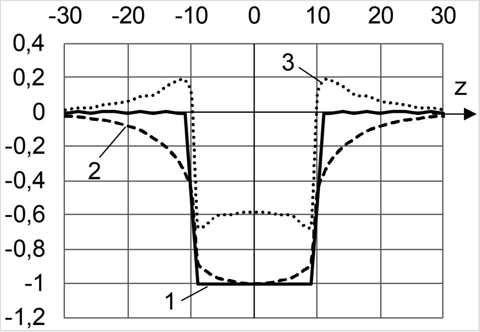

Рис. 3. Напруження на верхній межі шару вздовж осі z при x = 0: 1 – σ_y; 2 – σ_x; 3 – σ_z

На рис. 4 відображені напруження, що виникають на поверхні порожнини при z=0, в кН/см^2.

Максимальні від’ємні напруження σ_φ на поверхні порожнини (рис. 4, лінія 2) виникають при φ=0,39 та φ=2,75, додатні при φ=1,57.

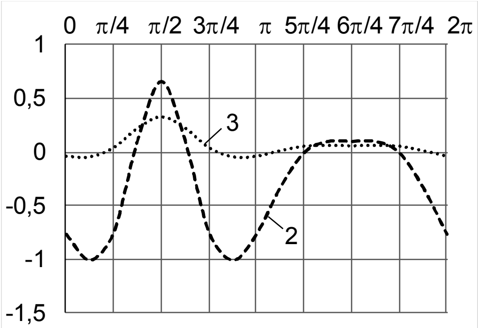

Рис. 4. Напруження на поверхні порожнини: 2 – σ_φ; 3 – σ_z

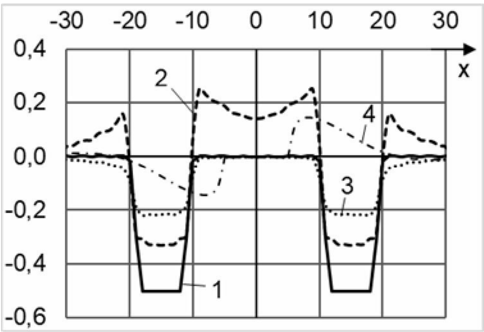

Рис. 5. Напруження на нижній межі шару вздовж осі x: 1 – σ_y при $y=-\tilde{h}$; 2 – σ_x при $y=-\tilde{h}$; 3 – σ_z при $y=-\tilde{h}$; 4 – τ_{xy} при y=0

Максимальні напруження σ_z (рис. 4, лінія 3) виникають в верхній частині порожнини, при φ=1,57.

Нормальні напруження при $y=-\tilde{h}$ та дотичні при y=0 вздовж осі x, при z=0, представлені на рис. 5 в кН/см^2.

На нижній межі шару напруження σ_x вздовж осі x (рис. 5, лінія 2) мають від'ємні значення в межах навантаження, за межами навантаження напруження σ_x набувають додатних значень. Між навантаженнями додатні напруження σ_x збільшуються, але під порожниною спостерігається невелике їх зниження. Таким чином максимальні додатні напруження σ_x виникають між навантаженнями, ближче до місця зосередження цих навантажень.

Напруження σ_z вздовж осі x на нижній межі шару (рис.5, лінія 3) також мають від'ємні значення в межах навантаження, натомість між навантаженнями отримують нульові значення.

Найбільші дотичні напруження τ_{xy} вздовж осі x (рис. 5, лінія 4) традиційно знаходяться на осьовій лінії x (y=0), та є максимальними біля порожнини.

Висновки

Розроблений аналітико-числовий алгоритм розрахунку першої основної просторової задачі теорії пружності для шару з циліндричною порожниною, яка розташована паралельно поверхням шару. Задача зведена до сукупності нескінчених систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

На основі числових досліджень алгебраїчної системи можна стверджувати, що розв'язок цієї системи може бути з будь якою ступінню точності знайдено методом редукції. Це підтверджується високою точністю виконання граничних умов.

Наведені графіки дають картину розподілу напружень на межах шару та поверхні циліндричної порожнини, а також на перешийках між порожниною і межами шару. Максимальні напруження виникають на поверхні циліндричної порожнини та на верхній межі шару, де розташоване навантаження.

Подальші дослідження цього напрямку актуальні для шару з поздовжньою циліндричною трубою із заданими на граничних поверхнях напруженнями.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гузь А.Н., Космодамианский А.С., Шевченко В.П. и др.* Механика композитов. Том 7. Концентрация напряжений. Київ: Наук. думка. – 1998. – С. 114 – 137.
2. *Vaysfel'd N., Popov G., Reut V.* The axisymmetric contact interaction of an infinite elastic plate with an absolutely rigid inclusion. Acta Mech. 2015. vol. 226. P. 797–810. doi: https://doi.org/10.1007/s00707-014-1229-7
3. *Попов Г.Я., Вайсфельд Н.Д.* Осесимметричная задача теории упругости для бесконечной плиты с цилиндрическим включением при учете ее удельного веса. Прикладная механика. 2014. Т. 50, № 6. С. 27–38.
4. *Bobyleva T.* Approximate Method of Calculating Stresses in Layered Array / Procedia Engineering. – 2016. – Vol.153. – P.103 – 106. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.087
5. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.* Пространственные задачи теории упругости и пластичности. Равновесие упругих тел канонической формы. – Київ: Наук.думка. – 1985. – 280 с.
6. *Гузь А.Н., Кубенко В. Д., Черевко М.А.* Дифракция упругих волн. –Київ: Наук. Думка. – 1978. – 307 с.
7. *Гринченко В.Т., Мелешко В. В.* Гармонические колебания и волны в упругих телах. – Київ: Наук. Думка. – 1981. – 284 с.
8. *Волчков В.В., Вуколов Д.С., Сторожев В.И.* Дифракция волн сдвига на внутренних туннельных цилиндрических неоднородностях в виде полости и включения в упругом слое со свободными гранями/ Механика твердого тела. – 2016. – Вып. 46. – С. 119 – 133.
9. *Николаев А.Г., Проценко В.С.* Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости. – Харьков: Нац. аэрокосм. университет им. Н.Е. Жуковского «ХАИ», 2011. – 344 с.
10. *Проценко В.С., Николаев А.Г.* Пространственная задача Кирша / Математические методы анализа динамических систем. – 1982. – Вып. 6. – С. 3 – 11.
11. *Проценко В.С., Украинец Н.А.* Применение обобщенного метода Фурье к решению первой основной задачи теории упругости в полупространстве с цилиндрической полостью / Вісник Запорізького національного університету. 2015. Вып. 2. С. 193–202.
12. *Николаев А.Г., Орлов Е.М.* Решение первой осесимметричной термоупругой краевой задачи для трансверсально-изотропного полупространства со сфероидальной полостью / Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – 2012. – Вип.20. – С. 253-259.
13. *Miroshnikov V.Yu.* First basic elasticity theory problem in a half-space with several parallel round cylindrical cavities / Journal of Mechanical Engineering. – 2018. – Vol. 21, № 2. – P. 12 – 18.
14. *Protsenko V., Miroshnikov V.* Investigating a problem from the theory of elasticity for a half-space with cylindrical cavities for which boundary conditions of contact type are assigned / Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2018. – Vol 4, № 7 (94). – P. 43 – 50.
15. *Николаев А.Г., Танчик Е.А.* Упругая механика многокомпонентных тел. – Харьков: Нац.аэрокосм.ун-т им. Н.Е. Жуковского «ХАИ». – 2014. – 272 с.
16. *Miroshnikov V.Yu.* The study of the second main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity / Strength of Materials and Theory of Structures. – 2019. – №102. – P. 77–90. https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.102.77-90
17. *Miroshnikov V.Yu., Medvedeva A.V., Oleshkevich S. V.* Determination of the Stress State of the Layer with a Cylindrical Elastic Inclusion / Materials Science Forum. – 2019. – Vol. 968. – pp. 413-420. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.413
18. *Miroshnikov V.* Investigation of the Stress Strain State of the Layer with a Longitudinal Cylindrical Thick-Walled Tube and the Displacements Given at the Boundaries of the Layer

/ Journal of Mechanical Engineering. – 2019. – Vol. 22, N 2. – P. 44-52. https://doi.org/10.15407/pmach2019.02.044.

REFERENCES

1. *Guz' A.N., Kosmodamianskiy A.S., Shevchenko V.P. and others.* Mekhanika kompozitov (Mechanics of composites). Vol 7. Kontsentratsiya napryazheniy (Concentration of stresses). Kiev: Nauk. Dumka. – 1998. – P. 114 – 137. (In Russian).
2. *Vaysfel'd N., Popov G., Reut V.* The axisymmetric contact interaction of an infinite elastic plate with an absolutely rigid inclusion / Acta Mech. – 2015. – vol. 226. – P. 797–810. doi: https://doi.org/10.1007/s00707-014-1229-7
3. *Popov G., Vaysfel'd N.* Osesimmetrichnaya zadacha teorii uprugosti dlya beskonechnoy plity s tsilindricheskim vklyucheniyem pri uchete yeye udel'nogo vesa (The axisymmetric problem of the theory of elasticity for an infinite plate with a cylindrical inclusion, taking into account its specific gravity) / Prikladnaya mekhanika (Applied mechanics). – 2014. – Vol. 50, № 6. – P. 27–38.
4. *Bobyleva T.* Approximate Method of Calculating Stresses in Layered Array / Procedia Engineering. – 2016. – Vol.153. – P.103 – 106. https://doi.org/10.1016/j.proeng.2016.08.087
5. *Grinchenko V.T., Ulitko A.F.* Prostranstvennyye zadachi teorii uprugosti i plastichnosti. Ravnovesiye uprugikh tel kanonicheskoy formy (Spatial Problems of the Theory of Elasticity and Plasticity. Equilibrium of elastic bodies of canonical form). – Kiyev: Naukova Dumka. – 1985.– 280 p. (in Russian).
6. *Guz' A.N., Kubenko V.D. , Cherevko M.A.* Difraktsiya uprugikh voln (Diffraction of elastic waves). – Kiev: Nauk. Dumka. – 1978. – 307 p. (In Russian).
7. *Grinchenko V.T., Meleshko V.V.* Garmonicheskiye kolebaniya i volny v uprugikh telakh (Harmonic vibrations and waves in elastic bodies). – Kiev: Nauk. Dumka. – 1981. – 284 p. (In Russian).
8. *Volchkov V.V., Vukolov D.S., Storogev V.I.* Difraktsiya voln sdviga na vnutrennikh tunnel'nykh tsilindricheskikh neodnorodnostyakh v vide polosti i vklyucheniya v uprugom sloye so svobodnymi granyami (Diffraction of shear waves by internal tunneling cylindrical non-homogeneities in the form of a cavity and inclusion in an elastic layer with free faces) / Mekhanika tverdogo tela (Solid mechanics). – 2016. – Vol. 46. – P. 119 – 133. (In Russian).
9. *Nikolaev A.G., Protsenko V.S.* Obobshchennyy metod Fur'ye v prostranstvennykh zadachakh teorii uprugosti (Generalized Fourier method in spatial problems of the theory of elasticity). – Kharkov: Nats. aerokosm. universitet im. N.Ye. Zhukovskogo «KHAI» (National Aerospace University "KhAI"), 2011. – 344 c. (In Russian).
10. *Protsenko V.S., Nikolaev A.G.* Prostranstvennaya zadacha Kirsha (Kirsch spatial problem) / Matematicheskiye metody analiza dinamicheskikh sistem (Mathematical methods for analyzing dynamic systems). – 1982. – Vol. 6. – P. 3 – 11. (In Russian).
11. *Protsenko V.S., Ukrainec N.A.* Primeneniye obobshchennogo metoda Fur'ye k resheniyu pervoy osnovnoy zadachi teorii uprugosti v poluprostranstve s tsilindricheskoy polost'yu (Application of the generalized Fourier method to the solution of the first main problem of the theory of elasticity in a half-space with a cylindrical cavity) / Visnyk Zaporiz□koho natsional□noho universytetu (Bulletin of Zaporizhzhya National University). 2015. Vol. 2. P. 193–202. (In Russian).
12. *Nikolaev A.G., Orlov E.M.* Resheniye pervoy osesimmetrichnoy termouprugoy krayevoy zadachi dlya transversal'no-izotropnogo poluprostranstva so sferoidal'noy polost'yu (Solution of the first axisymmetric thermoelastic boundary value problem for a transversely isotropic half-space with a spheroidal cavity) / Problemy obchyslyuval□noyi mekhaniky i mitsnosti konstruktsiy (Problems of Computational Mechanics and Strength of Structures). – 2012. – Vol.20. – P. 253-259. (In Russian).
13. *Miroshnikov V.Yu.* First basic elasticity theory problem in a half-space with several parallel round cylindrical cavities / Journal of Mechanical Engineering. – 2018. – Vol. 21, № 2. – P. 12 – 18.
14. *Protsenko V., Miroshnikov V.* Investigating a problem from the theory of elasticity for a half-space with cylindrical cavities for which boundary conditions of contact type are assigned / Eastern-European Journal of Enterprise Technologies. – 2018. – Vol 4, № 7 (94). – P. 43 – 50.

15. *Nikolaev A.G., Tanchyk E.A.* Uprugaya mekhanika mnogokomponentnykh tel (Elastic mechanics of multicomponent bodies). – Kharkov: Nats. aerokosm. universitet im. N.Ye. Zhukovskogo «KHAI» (National Aerospace University "KhAI"). – 2014. – 272 p. (In Russian).
16. *Miroshnikov V. Yu.* The study of the second main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity / Strength of Materials and Theory of Structures. – 2019. – №102. – P. 77–90. https://doi.org/10.32347/2410-2547.2019.102.77-90
17. *Miroshnikov V.Yu., Medvedeva A.V., Oleshkevich S.V.* Determination of the Stress State of the Layer with a Cylindrical Elastic Inclusion / Materials Science Forum. – 2019. – Vol. 968. – pp. 413-420. https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/MSF.968.413
18. *Miroshnikov V.* Investigation of the Stress Strain State of the Layer with a Longitudinal Cylindrical Thick-Walled Tube and the Displacements Given at the Boundaries of the Layer / Journal of Mechanical Engineering. – 2019. – Vol. 22, N 2. – P. 44 – 52. https://doi.org/10.15407/pmach2019.02.044

Стаття надійшла 25.09.2019 р.

Miroshnikov V.Yu., Denisova T.V., Protsenko V.S.

INVESTIGATION OF THE FIRST MAIN PROBLEM OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR A LAYER WITH A CYLINDRICAL CAVITY

An analytic - numerical algorithm for solving a substantially spatial problem of the theory of elasticity for a layer with a longitudinal cylindrical cavity and the conditions of the first principal problem, given on the boundary surfaces, is developed.

The solution is based on the generalized Fourier method applied to the Lame equation system. The cavity is considered in the cylindrical coordinate system, the layer - in Cartesian. By satisfying the boundary conditions and using special formulas for the transition between coordinate systems for basic solutions, we create infinite systems of linear algebraic equations, which are solved by the method of cutting. The numerical study of the determinant gives reason to claim that this system of equations has a single solution. As a result, stresses were obtained at different points in the elastic body.

Cutting parameters were chosen so that the accuracy of the boundary conditions reaches 10-2. As the cutoff parameter increases, the accuracy of boundary conditions increases, but the duration of the calculation increases.

The numerical solution of the problem is performed for a layer with a cylindrical cavity and a normal balanced load at the boundary of the layer. The analysis of the stress state gives grounds to state:

1. The solution of the algebraic system of equations can be found with any degree of accuracy by the method of reduction, which is confirmed by the high accuracy of boundary conditions.

2. The presence of a cavity gives rise to a redistribution of stresses, in which maximum values occur on the surface of the cavity, and tensile stresses occur at the top of the layer (which is compressed without a cavity).

This method can be used in the calculation of structures, the calculation scheme of which is a layer with a cylindrical cavity, under given boundary conditions in the form of balanced stresses. Stress analysis enables the selection of geometric characteristics at the initial design stage.

Keywords: cylindrical cavity in a layer; Lame's equation; generalized Fourier method; infinite systems of linear algebraic equations.

Мирошников В.Ю., Денисова Т. В., Проценко В.С.

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЕРВОЙ ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ СЛОЯ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОЛОСТЬЮ

Решена пространственная задача теории упругости для слоя с продольной цилиндрической полостью, когда на границах слоя и на границе полости заданы напряжения. Решение задачи получено обобщенным методом Фурье относительно системы уравнений Ламе в цилиндрических координатах, связанных с цилиндром, и декартовых координатах, связанных с границами слоя. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, полученные в результате удовлетворения граничных условий, решено методом редукции. В результате были получены напряжения в различных точках упругого тела. Проведен анализ напряженно - деформированного состояния слоя от воздействия уравновешенной нагрузки на его границах.

Ключевые слова: цилиндрическая полость в слое, уравнения Ламе, обобщенный метод Фурье, бесконечные системы линейных алгебраических уравнений.

УДК 539.3
Мірошніков В.Ю., Денисова Т. В., Проценко В.С. **Дослідження першої основної задачі теорії пружності для шару з циліндричною порожниною** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2019. – Вип. 103. – С. 208-218.

Досліджено напружено – деформований стан шару з циліндричною порожниною, коли на межах шару та на межі порожнини задані напруження.
Табл. 0. Іл. 5. Бібліогр. 18 назв.

UDC 539.3
Miroshnikov V.Yu., *Denisova T.V., Protsenko V.S.* **The study of the first main problem of the theory of elasticity for a layer with a cylindrical cavity** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific and technical collected articles. - Kyiv: KNUBA, 2019. - Issue 103. - P. 208-218. – Ukr.

The stress - deformed state of a layer with a cylindrical cavity is investigated, when stresses are specified at the boundaries of the layer and at the boundary of the cavity.
Tabl. 0. Fig. 5. Ref. 18.

УДК 539.3
Мирошников В.Ю., Денисова Т. В., Проценко В.С. **Исследование первой основной задачи теории упругости для слоя с цилиндрической полостью** // Сопротивление материалов и теория сооружений: науч.-техн. сборн. - К.: КНУСА, 2019. - Вып. 103. - С. 208-218.

Исследовано напряженно - деформированное состояние слоя с цилиндрической полостью, когда на границах слоя и на границе полости заданы напряжения.
Табл. 0. Ил. 5. Библиогр. 18 назв.

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): *Кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри будівельної механіки Харківського національного університету будівництва та архітектури Мірошніков Віталій Юрійович*
Адреса робоча: *61002, Україна, м. Харків, вул.Сумська 40, Харківський національний університет будівництва та архітектури, Мірошнікову Віталію Юрійовичу*
Робочий тел.: *+38 057 7062063*
Мобільний. тел.: *+38* 067 7893333
E-mail: m0672628781@gmail.com
ORCID ID: http://orcid.org/0000-0002-9491-0181

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): *Кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики та економіко-математичних методів Харківського національного економічного університету імені Семена Кузнеця Денисова Тетяна Володимирівна*
Адреса робоча: *61166, Україна, м. Харків, пр. Науки, 9а, Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця, Денисовій Тетяні Володимирівні*
Мобільний. тел.: *+380936997803*
E-mail: tetiana.denysova@hneu.net
ORCID ID: http://orcid.org/0000-0001-7254-0901

Автор (вчена ступень, вчене звання, посада): *Доктор фізико – математичних наук, професор кафедри математики та системного аналізу Національного аерокосмічного університету ім. Н.Є. Жуковського «ХАІ» Проценко Володимир Сидорович*
Адреса робоча: 61070, *Україна, м. Харків, вул. Чкалова 17, Національний аерокосмічний університет ім. Н.Є. Жуковського «ХАІ», Проценко Володимиру Сидоровичу*
Мобільний. тел.: *+38093 6433575*
E-mail: prots_vl@ukr.net
ORCID ID: http://orcid.org/0000-0001-9174-7617