УДК 519.6

РІЗНИЦЕВІ СХЕМИ ДЛЯ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ

І.Д. Євзеров[1],
д-р техн. наук, провідний науковий співробітник

Ю.Д. Гераймович[2],
канд. техн. наук, старший науковий співробітник

Д.В. Марченко[3]

В.Г. Ремньов[3]

[1] *ТОВ «ВЕГА КАД», вул. Петра Радченка, буд. 27, м. Київ, 03037*

[2] *Київський національний університет будівництва і архітектури, Повітрофлотський просп., 31, м. Київ, 03680*

[3] *ТОВ «ПРАЙМ КАД», вул. Петра Радченка, буд. 27, м. Київ, 03037*

DOI: 10.32347/2410-2547.2021.107.133-139

Розглядається різницева схема, відома як модифікований метод центральних різниць. Показано зведення методу інтегрування Ньюмарка до розглядуванної різницевої схеми. Описано континуальний та дискретний варіанти дослідження стійкості різницевих схем.

Ключові слова: різницева схема, стійкість різницевої схеми, модифікований метод центральних різниць, метод Ньюмарка.

Вступ. Для розв’язання динамічних задач в програмному комплексі ЛІРА 10.12 використовується різницева схема, відома як модифікований метод центральних різниць. Метою розв'язання динамічних задач є отримання хорошого наближення дійсної динамічної реакції даної конструкції – це питання умов збіжності різницевої схеми, що використовується при чисельному інтегруванні рівнянь руху.

Рішення U лінійної динамічної задачі при всіх можливих переміщеннях V задовольняє відношенню рівності

$$b(U'',V)+c(U',V)+a(U,V)=q(V)\,, \tag{1}$$

де $a(U,V)$, $b(U,V)$, $c(U,V)$ – симетричні позитивно визначені білінійні функціонали можливих робіт внутрішніх і інерційних сил і сил опору руху, вони відповідають матрицями жорсткості, мас і демпфірування, $q(V)$ – лінійний функціонал можливої роботи зовнішніх сил. Переміщення і зовнішні сили залежать від часу t, штрихами позначається диференціювання по t. Додаються початкові умови

$$U(0)=U^0\,,\ U'(0)=U^1\,. \tag{2}$$

Після апроксимації по просторовим змінним (зазвичай застосовується метод скінчених елементів) отримуємо з (1) систему звичайних диференціальних рівнянь

$$MU''+CU'+KU=f\,, \tag{3}$$

де K, M, C – матриці жорсткості, мас і демпфірування, f – зовнішні сили.

Позначимо θ – крок за часом

$$t_n = n \cdot \theta,\ U_n = U(t_n),$$
$$\Delta_n U = U_{n+1} - U_n,\ \delta_n U = \Delta_n / \theta,$$
$$\beta_n U = (U_{n+1} - U_{n-1}) / (2 \cdot \theta) = (\delta_n(U) + \delta_{n-1}(U)) / 2,$$
$$\gamma_n U = (U_{n+1} - 2U_n + U_{n-1}) / \theta^2,$$
$$\alpha_n(\vartheta) U = \vartheta U_{n+1} + (1 - 2\vartheta) U_n + \vartheta U_{n-1},\ 0 \le \vartheta \le 1/2.$$

Різницеву схему модифікованого методу центральних різниць отримуємо з (1) або (3), замінивши значення функцій і похідних в точках t_n відповідними різницевими відношеннями [1]:

$$b(\gamma_n U, V) + c(\beta_n U, V) + a(\alpha_n(\vartheta) U, V) = q_n(V), \tag{4}$$
$$M\gamma_n U + C\beta_n U + K\alpha_n(\vartheta) U = f_n. \tag{5}$$

Початкові умови отримуємо з (2):

$$U_0 = U^0,\ U_{-1} = U^0 - \theta U^1. \tag{6}$$

У 1959 році в [2] запропонована схема, відома як метод Ньюмарка:

$$U_{n+1} = U_n + \theta U'_n + \theta^2((1/2 - \vartheta) U''_n + \vartheta U''_{n+1}),\ 0 \le \vartheta \le 1/2, \tag{7}$$
$$U'_{n+1} = U'_n + \theta((1-\tau) U''_n + \tau U''_{n+1}),\ 0 \le \tau \le 1, \tag{8}$$
$$MU''_{n+1} + CU'_{n+1} + KU_{n+1} = f_{n+1}. \tag{9}$$

Схема (7) – (9) при $\tau = 1/2$ приведена в [3] до схеми (5). Рівняння (9) записується тричі, для $n+1$, n та $n-1$, а (7) і (8) – двічі, для $n+1$ та n. З отриманих семи рівнянь виключаються шість невідомих, перші і другі похідні, і виходить (5).

Умовами збіжності різницевої схеми є [4] апроксимація і стійкість. Застосувавши розкладання Тейлора, отримаємо, що різницеві відношення $\beta_n U$, $\gamma_n U$, $\alpha_n(\vartheta) U$ (і тільки вони) апроксимують $U'(t_n)$, $U''(t_n)$, $U(t_n)$ з похибкою, пропорційною θ^2. Таким чином, похибка апроксимації методу Ньюмарка пропорційна θ^2 тільки при $\tau = 1/2$.

Методи дослідження стійкості різницевих схем проілюструємо на рівнянні (1). Дотримуючись [1, 4-7], покладемо $V = U'$ і застосуємо очевидні рівності

$$d/dt(b(U', U')/2 = b(U'', U'),$$
$$d/dt(a(U, U)/2 = a(U, U'). \tag{10}$$

Позначимо $I(U) = (b(U', U') + a(U, U))/2$, застосуємо в правій частині нерівність Коші і проінтегруємо отриману нерівність. Тоді

$$I(U(T)) \le K_0 \int_0^T I(U(t)) dt + K_1, \tag{11}$$

де K_0, K_1 додатні константи. З леми Гронуолла [6, 7] випливає обмеженість $I(U)$.

Аналогічно, покладемо в (4) $V = \beta_n U$, застосуємо очевидні рівності

$$b(\gamma_n U, \beta_n U) = (b(\delta_n U, \delta_n U) - b(\delta_{n-1} U, \delta_{n-1} U))/(2 \cdot \theta), \tag{12}$$

$$\begin{aligned} a(\alpha_n(\vartheta)U, \beta_n U) = \big(& a(U_{n+1}, U_{n+1}) - a(U_{n-1}, U_{n-1}) + \\ & + (1-2\vartheta)(-a(\varDelta_n U, \varDelta_n U) + a(\varDelta_{n-1} U, \varDelta_{n-1} U)) \big) / (4\theta) \end{aligned} \tag{13}$$

і складемо отримані рівності від $n = 0$ до $n = N$. Застосувавши нерівність Коші і справедливу при $1/4 \le \vartheta \le 1/2$ нерівність

$$a(U_{n+1}, U_{n+1}) + a(U_n, U_n) - (1-2\vartheta) a(\Delta_n U, \Delta_n U,) \ge 0,$$

отримаємо аналогічну (11) нерівність (заміна інтеграла на суму). Тоді стійкість схеми (5), тобто обмеженість $I(U_n)$ при $1/4 \le \vartheta \le 1/2$ випливає з дискретного варіанту леми Гронуолла [1, 4].

Інші докази стійкості схеми (5) наведені в [3] та [8].

Відзначимо на завершення, що в програмному комплексі ЛІРА 10.12 схема (5) застосовується при $\vartheta = 1/2$. У цьому випадку другий доданок в правій частині (13) дорівнює нулю, доказ стійкості спрощується.

Висновки. Безумовна практична працездатність модифікованого методу центральних різниць і простота посилок, що лежать в його основі дозволяють успішно застосовувати його до широкого кола динамічних задач.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Тремольер Р.* Численное исследование вариационных неравенств. – М.: Мир, 1979. – 574 с.
2. *Newmark N.M.* A method of computation for structural dynamics. – A.S.C.E. Journal of engineering, mechanics division. – Vol. 85, 1959, pp. 67 – 94.
3. *Maghdid D.* Stability and accuracy of Newmark's method. – Master thesis, Lund University, 2016.
4. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
5. *Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э.* Теория колебаний. – М.: Наука, 1981, – 568 с.
6. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. – М.: Наука, 1980. – 383 с.
7. *Ладыженская О.А.* Краевые задачи математической физики. –- М.: Наука, 1969. – 407 с.
8. *Tremolieres R.* Inequations variationelles: existence, approximation, resolution. These, Universite de Paris. 1972.

REFERENCES

1. *Glowinski R., Lions J.-L., Tremolieres R.* Chislennoye issledovaniye variatsionnykh neravenstv (Numerical study of variational inequalities). – M.: Mir, 1979. – 574 s.
2. *Newmark N.M.* A method of computation for structural dynamics. – A.S.C.E. Journal of engineering, mechanics division. – Vol. 85, 1959, pp. 67 – 94.
3. *Maghdid D.* Stability and accuracy of Newmark's method. – Master thesis, Lund University, 2016.
4. *Marchuk G.I., Agoshkov V.I.* Vvedeniye v proyektsionno-setochnyye metody (Introduction to projection-grid methods). – M.: Nauka, 1981. – 416 s.

5. *Andronov A.A., Vitt A.A., Khaykin S.E.* Teoriya kolebaniy (Oscillation theory). – M.: Nauka, 1981, – 568 s.
6. *Duvaut G., Lions J.-L.* Neravenstva v mekhanike i fizike (Inequalities in mechanics and physics). – M.: Nauka, 1980. – 383 s.
7. *Ladyzhenskaya O.A.* Krayevyye zadachi matematicheskoy fiziki (Boundary value problems of mathematical physics). –- M.: Nauka, 1969. – 407 s.
8. *Tremolieres R.* Inequations variationelles: existence, approximation, resolution. These, Universite de Paris. 1972.

Стаття надійшла до редакції 02.10.2021

Євзеров І.Д., Гераймович Ю.Д., Марченко Д.В., Ремньов В.Г.

РІЗНИЦЕВІ СХЕМИ ДЛЯ ЗАДАЧ ДИНАМІКИ

Для розв'язання динамічних задач в програмному комплексі ЛІРА 10.12 використовується різницева схема, відома як модифікований метод центральних різниць. Метою розв'язання динамічних задач є отримання хорошого наближення дійсної динамічної реакції даної конструкції – це питання умов збіжності різницевої схеми, що використовується при чисельному інтегруванні рівнянь руху.

Рішення U лінійної динамічної задачі при всіх можливих переміщеннях V задовольняє відношенню рівності

$$b(U'',V)+c(U',V)+a(U,V)=q(V)\ ,$$

$a(U,V)$, $b(U,V)$, $c(U,V)$ – симетричні позитивно визначені білінійні функціонали можливих робіт внутрішніх і інерційних сил і сил опору руху, вони відповідають матрицями жорсткості, мас і демпфірування, $q(V)$ – лінійний функціонал можливої роботи зовнішніх сил. Після апроксимації по просторовим змінним (зазвичай застосовується метод скінчених елементів) отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь

$$MU''+CU'+KU=f\ ,$$

K, M, C – матриці жорсткості, мас і демпфірування, f – зовнішні сили.

Різницеву схему модифікованого методу центральних різниць отримуємо, замінивши значення функцій і похідних відповідними різницевими відношеннями. Різницеві відношення, що застосовуються в модифікованому методі центральних різниць, апроксимують прискорення $U''(t_n)$, швидкості $U'(t_n)$ та переміщення $U(t_n)$ з похибкою, пропорційною квадрату кроку за часом.

Умовами збіжності різницевої схеми є апроксимація і стійкість. Для дослідження стійкості різницевих схем покладемо $V=U'$ і застосуємо очевидні рівності

$$d/dt(b(U',U')/2=b(U'',U')\ ,$$

$$d/dt(a(U,U)/2=a(U,U')\ .$$

Позначимо $I(U)=(b(U',U')+a(U,U))/2$, застосуємо в правій частині нерівність Коші і проінтегруємо отриману нерівність. Тоді

$$I(U(T))\le K_0\int_0^T I(U(t))dt+K_1\ ,$$

де K_0, K_1 додатні константи. З леми Гроноулла випливає обмеженість $I(U)$. Крім континуального варіанта дослідження стійкості різницевих схем розглянуто і дискретний.

Безумовна практична працездатність модифікованого методу центральних різниць і простота посилок, що лежать в його основі дозволяють успішно застосовувати його до широкого кола динамічних задач.

Ключові слова: різницева схема, стійкість різницевої схеми, модифікований метод центральних різниць, метод Ньюмарка.

Yevzerov I.D., Heraimovych Yu.D., Marchenko D.V., Remnev V.G.

DIFFERENCE SCHEMES FOR DYNAMICS PROBLEMS

To solve dynamics problems in the LIRA 10.12 software package, the difference scheme is used, known as modified central difference method. The goal of dynamic problems solving is to get a good approximation of actual dynamic response of a given structure. It's a matter of convergence conditions of the difference scheme used in numerical integration of motion equations.

The solution U of the linear dynamic problem for all possible displacements V satisfies the equations

$$b(U'',V)+c(U',V)+a(U,V)=q(V),$$

$a(U,V)$, $b(U,V)$, $c(U,V)$ – symmetric positive-definite bilinear functionals of possible work of the internal and inertial forces and motion resistance forces, they correspond to stiffness matrices, mass and damping matrices, $q(V)$ – linear functional of possible work of the external forces.

After approximation in spatial variables (usually the finite element method is applied) we obtain the system of ordinary differential equations

$$MU''+CU'+KU=f,$$

K, M, C – stiffness matrices, mass and damping matrices, f – external forces.

Difference scheme of modified central difference method we obtain by replacing the values of functions and derivatives with corresponding difference relations. Difference relations, which are applied in modified central difference method, approximate accelerations $U''(t_n)$, velocities $U'(t_n)$ and displacements $U(t_n)$ with an error proportional to the square of the time step.

Approximation and stability are the convergence conditions of the difference scheme. To study the stability of difference schemes, we assume that $V=U'$ and apply the obvious equations

$$d/dt(b(U',U')/2=b(U'',U'),$$
$$d/dt(a(U,U)/2=a(U,U').$$

Let us denote $I(U)=(b(U',U')+a(U,U))/2$, apply the Cauchy inequality on the right-hand side and integrate the resulting inequality. Then

$$I(U(T))\le K_0\int_0^T I(U(t))dt+K_1,$$

where K_0, K_1 are positive constants. The boundedness $I(U)$ follows from the Gronwall's lemma. In addition to the continual version of study of the difference schemes stability, the discrete version is also considered.

Unconditional practical efficiency of the modified central difference method and the simplicity of its underlying principles allow it to be successfully applied to a wide range of dynamic problems.

Keywords: difference scheme, stability of difference scheme, modified central difference method, Newmark's method.

Евзеров И.Д., Гераймович Ю.Д., Марченко Д.В., Ремнев В.Г.

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ДЛЯ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ

Для решения динамических задач в программном комплексе ЛИРА 10.12 используется разностная схема, известная как модифицированный метод центральных разностей. Целью решения динамических задач является получение хорошего приближения действительной динамической реакции данной конструкции - это вопрос условий сходимости разностной схемы, используемой при численном интегрировании уравнений движения.

Решение U линейной динамической задачи при всех возможных перемещениях V удовлетворяет равенствам

$$b(U'',V)+c(U',V)+a(U,V)=q(V),$$

$a(U,V)$, $b(U,V)$, $c(U,V)$ – симметричные положительно определённые билинейные функционалы возможных работ внутренних и инерционных сил и сил сопротивления движению, они соответствуют матрицам жесткости, масс и демпфирования, $q(V)$ – линейный функционал возможной работы внешних сил.

После аппроксимации по пространственным переменным (обычно применяется метод конечных элементов) получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$MU'' + CU' + KU = f\ ,$$

K, M, C – матрицы жесткости, масс и демпфирования, f – внешние силы.

Разностную схему модифицированного метода центральных разностей получаем, заменив значения функций и производных соответствующими разностными отношениями. Разностные отношения, которые применяются в модифицированном методе центральных разностей, аппроксимируют ускорения $U''(t_n)$, скорости $U'(t_n)$ и перемещения $U(t_n)$ с погрешностью, пропорциональной квадрату шага по времени.

Условиями сходимости разностной схемы являются аппроксимация и устойчивость. Для исследования устойчивости разностных схем положим $V = U'$ и применим очевидные равенства

$$d/dt(b(U',U')/2 = b(U'',U'),$$
$$d/dt(a(U,U)/2 = a(U,U').$$

Обозначим $I(U) = (b(U',U') + a(U,U))/2$, применим в правой части неравенство Коши и проинтегрируем полученное неравенство. Тогда

$$I(U(T)) \le K_0 \int_0^T I(U(t))dt + K_1\ ,$$

где K_0, K_1 положительные константы. Из леммы Гронуолла следует ограниченность $I(U)$. Кроме континуального варианта исследования устойчивости разностных схем рассмотрен и дискретный.

Безусловная практическая работоспособность модифицированного метода центральных разностей и простота лежащих в его основе посылок позволяют успешно применять его к широкому кругу динамических задач.

Ключевые слова: разностная схема, устойчивость разностной схемы, модифицированный метод центральных разностей, метод Ньюмарка.

УДК 519.6
Євзеров І.Д., Гераймович Ю.Д., Марченко Д.В., Ремньов В.Г. **Різницеві схеми для задач динаміки** // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – Київ: КНУБА, 2021. – Вип. 107. – С. 133-139.– Engl.
Розглянуто континуальний і дискретний варіанти дослідження стійкості різницевих схем.
Табл. 0. Іл. 0. Бібліогр. 8 назв.

UDC 519.6
Yevzerov I.D., Heraimovych Yu.D., Marchenko D.V., Remnev V.G. **Difference schemes for dynamics problems** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – K.: KNUBA, 2021. – Issue 107. – P. 133-139.
Continual and discrete versions of studying the stability of difference schemes are described.
Tabl. 0. Fig. 0. Ref. 8.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *доктор технічних наук, провідний науковий співробітник, директор ТОВ «ВЕГА КАД» ЄВЗЕРОВ Ісаак Данилович*
Адреса робоча: 03037 *Україна, м. Київ, вул. Петра Радченка, буд. 27, ТОВ «ВЕГА КАД», ЄВЗЕРОВУ Ісааку Даниловичу*
Робочий тел.: *+38(044) 520-05-23;*
Мобільний тел.: *+38(067) 238 73 23;*
E-mail: *ide@lira.com.ua*
ORCID ID: *http://orcid.org/0000-0003-3414-9930*

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *кандидат технічних наук, старший науковий співробітник, докторант Київського національного університету будівництва і архітектури ГЕРАЙМОВИЧ Юрій Дмитрович*
Адреса робоча: *03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, відділ докторантури та аспірантури, ГЕРАЙМОВИЧУ Юрію Дмитровичу*
Робочий тел.: *+38(044) 246-16-20;*
Мобільний тел.: *+38(067) 238-73-19;*
E-mail: *yury_geraimovich@ukr.net*
ORCID ID: *http://orcid.org/0000-0002-5605-5276*

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *технічний директор ТОВ «ПРАЙМ КАД» МАРЧЕНКО Дмитро Володимирович*
Адреса робоча: 03037 *Україна, м. Київ, вул. Петра Радченка, буд. 27, ТОВ «ПРАЙМ КАД», МАРЧЕНКУ Дмитру Володимировичу*
Робочий тел.: *+38(044) 246-16-20;*
Мобільний тел.: *+38(067) 238 73 12;*
E-mail: *mdv@lira.com.ua*
ORCID ID: *https://orcid.org/0000-0002-4377-5098*

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): *інженер-програміст ТОВ «ПРАЙМ КАД» РЕМНЬОВ Владислав Геннадійович*
Адреса робоча: 03037 *Україна, м. Київ, вул. Петра Радченка, буд. 27, ТОВ «ПРАЙМ КАД», РЕМНЬОВУ Владиславу Геннадійовичу*
Робочий тел.: *+38(044) 520-05-23;*
Мобільний тел.: *+38(067) 725 60 60;*
E-mail: *vladyslav@lira.com.ua*
ORCID ID: *https://orcid.org/0000-0003-1441-3423*