УДК 624.04:519.853:519.688

ЩОДО ОПТИМАЛЬНОЇ ТОПОЛОГІЇ ПІДПІРНОЇ СТІНКИ

Є.А. Єгоров,
д-р техн. наук, професор

О.Є. Кучеренко,
канд. техн. наук

Придніпровська державна академія будівництва та архітектури, Дніпро

DOI: 10.32347/2410-2547.2022.108.369-376

Розглядається задача пошуку оптимальної топології підпірної стінки, досліджується принципова можливість вдосконалення типового рішення при розрахунках параметрів такого типу споруд. Пропонується алгоритмічна схема розв’язування задачі з урахуванням варіативної топології. При пошуку топології конструкції використовується метод штрафування для твердого ізотропного тіла (Solid Isotropic Material with Penalization - SIMP) з подальшим застосуванням спеціальних фільтрів для визначення найбільш прийнятного розв’язку. Запропонований авторами алгоритм ілюструє, що практично завжди можна отримати більш вигідне за матеріаломісткістю рішення.

Ключові слова: підпірна стінка, топологія, оптимізація, дискретизація, фільтр, еволюційна структурна оптимізація, метод SIMP.

Вступ. Задача визначення оптимальних параметрів конструкції - одна з найважливіших проблем, що виникає при проектуванні найрізноманітніших споруд. Існує велика кількість теоретичних та прикладних наукових праць, присвячених цьому питанню, але універсального рецепта не існує, тому кожна нова задача потребує окремого аналізу [1].

В статті розглядається задача визначення оптимальної топології перерізу підпірної стінки. Такі конструкції широко застосовуються в будівництві для закріплення ґрунтових масивів від зсуву. Зазвичай для них використовують типові конфігурації, які піддаються певним модифікаціям з урахуванням тих чи інших умов їх функціювання [2]. При цьому принципово конструкція підпірної стінки практично не змінюється, що пов’язано, в тому числі, і з технологією її виготовлення. Варто зазначити, що останнім часом виникли суттєво інші методи зведення будівель і споруд [3]. Ці методи актуалізували і значно розширили межі застосування різноманітних оптимізаційних алгоритмів для пошуку більш ефективних конструктивних рішень.

Проблема пошуку оптимальної топології ізотропного твердого тіла досить широко висвітлена насамперед у зарубіжній літературі. Зазвичай для її розв’язання застосовують два підходи:

1) дискретний – еволюційна структурна оптимізація (evolutionary structural optimization – ESO) та її численні модифікації [4];

2) градієнтний (solid isotropic material with penalization - SIMP), в основі якого лежить визначення оптимальної «густини» матеріалу в певній частині твердого тіла.

Еволюційна структурна оптимізація більш проста в своїй реалізації [5]. Вона базується на ідеї поступового видалення матеріалу (рис. 1), якій непотрібен або неефективно використовується згідно певних критеріїв.

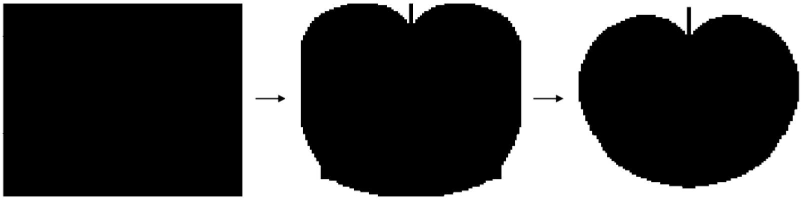

Рис. 1. Послідовне видалення матеріалу за методом ESO [6].

За допомогою такого підходу розв'язуються задачі, пов'язані з мінімізацією напружень та переміщень елементів конструкції, максимізації жорсткості при розтягуванні-стисненні [4].

Метод топологічної оптимізації SIMP, запропонований Bendsoe [7], має більш складну математичну основу. Кожному елементу твердого тіла e надається проектна змінна x_e, яку можна розуміти як густину матеріалу елемента. Вводиться поняття віртуального модуля Юнга, який для кожного елемента апроксимується так [8]:

$$E_e(x_e) = E_{\min} + x_e^p (E_0 - E_{\min}), \quad (1)$$

де p – штраф, який зазвичай дорівнює 3; $E_{\min}$ – мале значення модуля, яке вводиться з тим, щоб уникнути сингулярності матриці жорсткості; E_0 – модуль Юнга матеріалу. При виконанні умови $0 \le x_e^p \le 1$ розрахований модуль E_e варіюється між певним мінімальним значенням $E_{\min}$ і звичайним модулем Юнга E_0.

1. Постановка задачі. Для демонстрації роботи запропонованого алгоритму розглядається підпірна стінка із суцільним перерізом у вигляді прямокутника. По всій своїй висоті вона знаходиться під тиском ґрунту. Для спрощення задачі будемо вважати, що цей тиск змінюється лінійно від 0 до 1, що в цілому відповідає гідростатичному тиску. З позиції теорії пружності така задача може розглядатися як плоска [9], і визначення оптимальної топології підпірної стінки зводиться до пошуку оптимальної конфігурації її перерізу.

Розрахункова схема в такому випадку буде мати вигляд, наведений на рис. 2.

2. Визначення топологічної схеми. Задача пошуку оптимальної топології з позицій математичного програмування формулюється у такому вигляді:

$$\begin{aligned} &\min F^T u(x), \\ &K(x)u(x) = F, \\ &V(x) = fV_0, \end{aligned} \quad (2)$$

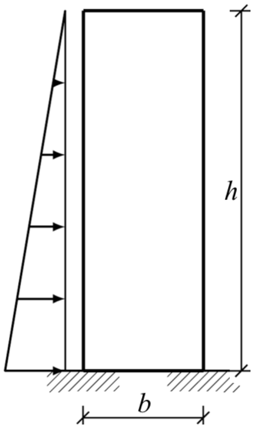

Рис. 2. Підпірна стінка зі змінним навантаженням

де $F \in R^n$ – вектор зовнішніх сил; $u(x)$ – вектор переміщень; $K(x)$ – матриця жорсткості, яка будується з використанням віртуальних модулів, які визначаються за формулою (1); V_0 – початковий об’єм твердого тіла; $V(x)$ – кінцевий об’єм; f – частка об’єму матеріалу, який необхідно зберегти; x – вектор, кожен елемент якого знаходиться в межах [0, 1], та визначає, які дискретні елементи твердого тіла необхідно зберегти. При цьому цільову функцію можна інтерпретувати як роботу зовнішніх сил з деформації системи, тобто розв’язування задачі полягає в пошуку максимально жорсткого тіла об’ємом $V(x)$. У загальному випадку така задача не є опуклою та розв’язується за допомогою чисельних методів (наприклад, метод Ньютона).

Після розв’язування задачі (2) виконуються розрахунки конструкції на безпеку, що у загальному випадку зводиться до наступної нерівності:

$$R - Q \geq 0\,, \tag{3}$$

де R – несуча здатність системи, Q – узагальнений ефект від зовнішніх навантажень та впливів.

3. Узагальнений алгоритм розв‘язування задачі. Для визначення конфігурації системи розіб’ємо область, визначену геометричними параметрами структури, зображеної на рис. 2, на n скінчених елементів, при цьому на початку роботи алгоритму проектні змінні $x_i = 1$ для i=1,…, n. Після розв’язання задачі (2) з урахуванням умови (3) певна частина дискретних елементів буде видалена, тобто проектна змінна цих елементів дорівнюватиме 0. Узагальнений алгоритм представлений на рис. 3.

4. Оптимальна топологія підпірної стінки та проблема «шахової дошки». Для розв‘язування оптимізаційної задачі (2) за алгоритмом, наведеним на рис. 3, було створено застосунок на мові Python 3.7. При цьому для розв‘язання систем лінійних рівнянь та обробки матриць використовувалися модулі Numpy [10] та Scipy [11]. Для фільтрації двовимірних зображень було долучено модуль Skimage.

Відношення висоти перерізу h до його основи b приймалося рівним 3:1 (рис. 2). Загальна площа перерізу розбивалася на 30*90=2700 двовимірних елементів з чотирма вузлами кожний. При цьому вважалося, що $E_0 = 1$, $E_{\min} = 10^{-9}$, модуль Пуасона $\nu = 0.3$.

Параметр f – відношення об’єму, що залишається, до базового (початкового) – може бути довільним. Але треба враховувати той факт, що чим меншими будуть значення f, тим більшими будуть максимальні напруження в перерізі, геометрія якого визначається цим алгоритмом, тобто тим міцніше повинен бути матеріал, який треба буде застосовувати у стінці з оптимальною топологією.

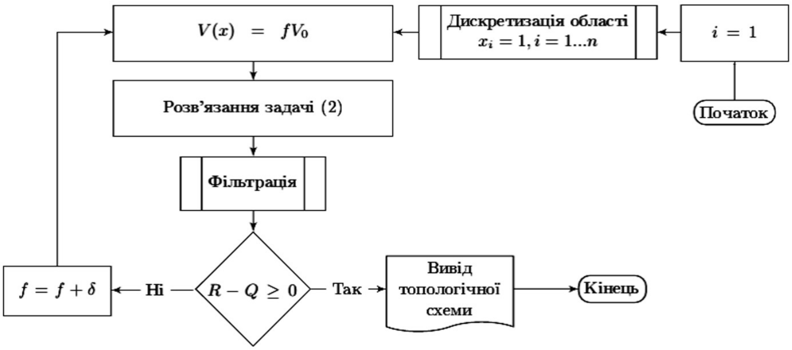

Рис. 3. Блок-схема розв’язування задачі пошуку конфігурації системи

На рис. 4 наведено графік залежності відносної міцності матеріалу σ_v/σ_{v_0} (тобто відношення максимального напруження за фон Мізесом у перерізі з оптимальною топологією до напруження в базовій структурі) від параметру *f*.

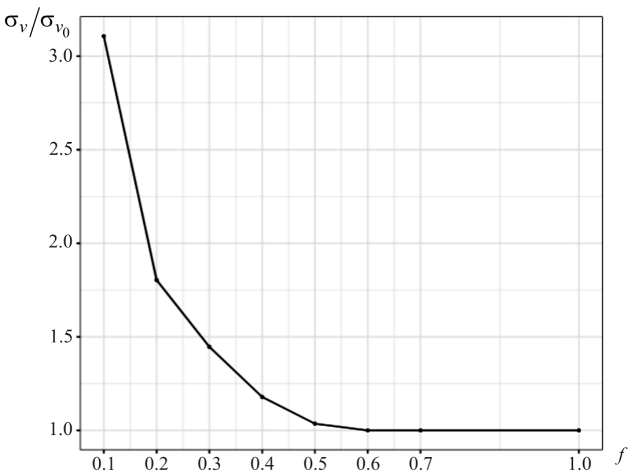

Рис. 4. Залежність між часткою збереженого об’єму та відношень напружень

В прикладі, що розглядається, параметр *f* визначався, зважаючи на те, щоб максимальні напруження в новому (оптимальному) перерізі не перевищували відповідні напруження базової структури.

У результаті розрахунків знайдено топологію перерізу стінки, яку наведено на рис. 5. Така топологічна схема серед іншого демонструє проблему «шахової дошки» - чергування чорних та білих клітин: на схемі наявні такі елементи, щодо яких не зрозуміло, необхідно їх видалити чи

Рис. 5. Топологічна структура перерізу підпірної стінки

зберегти. Ця проблема частково вирішується за допомогою обробки двовимірних зображень із застосуванням певних фільтрів, як-от «середнє», «медіана» та інші.

Стосовно розв‘язуваної задачі розглядалися стандартні фільтри, запропоновані в роботі [12] та деякі інші. Ефективність їх застосування визначалася за двома критеріями: 1) наявність «шахової дошки»; 2) жорсткість структури за отриманою схемою, тобто за значенням цільової функції $F^T u$.

У таблиці 1 наведено дані чисельних експериментів з різними типами фільтрів. Найбільш ефективним в даному випадку виявився фільтр Гауса, який дозволяє уникнути ефекту «шахової дошки» при найменшому значенні цільової функції. Тому конфігурацію, яка визначається таким чином, доцільно вважати найбільш прийнятною.

Таблиця 1

Фільтр	Топологія	«Шахова дошка»	Цільова функція
Convolve		Так	15536
Median		Ні	15902
Gabor		Ні	15942
Gaussian		Ні	15658
Coiflet		Так	15703
Closing		Так	15774
Erosion		Так	16412
Opening		Так	15652
Mean		Так	15678

Окремий інтерес становлять «еволюційні» перетворення перерізу підпірної стінки при зміненні параметра f, що їх наведено на рис. 6. Як бачимо, конфігурація перерізу, що оптимізується, поступово змінюється від суцільного до наскрізного.

6. Аналіз оптимальної структури в Ansys. Для подальшого аналізу отриманої моделі її параметри описано на мові APDL та експортовано у систему скінченного-елементного аналізу Ansys Mechanical.

Визначено, що при використанні матеріалу з однаковою міцністю в перерізі з оптимальною топологією максимальні напруження не перевищують відповідні напруження в базовій моделі при f_{min}=0.6, що саме й забезпечує виконання умови (3).

На рис. 7 наведено фрагмент підпірної стінки у тривимірному виді.

Рис. 6. Варіанти топології перерізу при частці збереженого матеріалу 70%, 30%, 10%

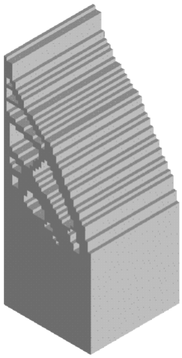

Рис. 7. Тривимірна модель фрагменту підпірної стінки

Висновки. Запропонований авторами підхід до визначення оптимальної топології перерізу підпірної стінки може ефективно застосовуватися для будь-яких конструкцій (наприклад, для контрфорсів тієї ж підпірної стінки), напружено-деформований стан яких відповідає плоскій задачі теорії пружності. Варто зазначити, що цей же підхід узагальнюється й щодо тривимірних задач.

Оптимальні топології перерізів зазвичай будуть значно складнішими у виготовлені. Але зараз ця проблема принципово вирішується (наприклад, за допомогою тривимірного друку із застосуванням 3D- принтерів), і тому наразі такі труднощі не є перешкодою для впровадження в практику будівництва оптимальних конструктивних рішень і відповідних методик їх пошуку.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Єгоров Є.А., Кучеренко О.Є.* Нелінійна оптимізація топології просторових стержневих систем // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2018. – Вип. 100. – С. 105-114.
2. *Безухов Н.И.* Подпорные стенки. – М.: Гос. изд-во, 1931. – 95 с.
3. *Pan Y., Zhang Y., Zhang D.* 3D printing in construction: state of the art and applications. – Int J Adv ManufTechnol. – 2021. – Vol. 115. – P. 1329-1348.
4. *Huang X., Xie Y.* A further review of ESO type methods for topology optimization.– Struct Multidisc Optim. – 2010. – Vol. 41. – P. 671–683.
5. *Xie Y., Steven G.* Evolutionary structural optimization for dynamic problems. – Comput Struct. – 1996. – Vol. 58. – No. 6. – P. 1067–1073.
6. Xia L., Xia Q., Huang X. Bi-directional Evolutionary Structural Optimization on Advanced Structures and Materials: A Comprehensive Review. – Arch Computat Methods Eng. – 2018 – Vol. 25. – P. 437–478.
7. *Bendsøe M.P.* Optimal shape design as a material distribution problem. – Structural Optimization. – 1989. – Vol. 1. – No. 4. – P. 193–202.
8. *Andreassen E., Clausen A., Schevenels M.* Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code. – Struct Multidisc Optim. – 2011. – Vol. 43. – P. 1–16.
9. Кац А.М. Теория упругости. – СПб.: Издательство «Лань», 2002. – 208 с.

10. *Harris C.R., Millman K.J., van der Walt S.J.* Array programming with NumPy. – Nature. – 2020. – Vol. 585. – P. 357–362.
11. *Virtanen P., Gommers R., Oliphant T.E.* SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. – Nature Methods. – 2020. – Vol. 17. – P. 261–272.
12. *Lazarov B.S., Sigmund O.* Filters in topology optimization based on Helmholtz-type differential equations. – International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2011. – Vol. 86. – P. 765–781.

REFERENCES

1. Egorov E.A., Kucherenko A.E. Nonlinear topology optimization of space truss-like structures // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2018. – Issue 100. – P. 105-114.
2. *Bezuhov N.I. Podpornye stenki.* Moscow: Gos. izd-vo, 1931, 95 pp.
3. *Pan Y., Zhang Y., Zhang D.* 3D printing in construction: state of the art and applications. – Int J Adv Manuf Technol. – 2021. – Vol. 115. – P. 1329-1348.
4. *Huang X., Xie Y.* A further review of ESO type methods for topology optimization.– Struct Multidisc Optim. – 2010. – Vol. 41. – P. 671–683.
5. *Xie Y., Steven G.* Evolutionary structural optimization for dynamic problems. – Comput Struct. – 1996. – Vol. 58. – No. 6. – P. 1067–1073.
6. Xia L., Xia Q., Huang X. Bi-directional Evolutionary Structural Optimization on Advanced Structures and Materials: A Comprehensive Review. – Arch Computat Methods Eng. – 2018 – Vol. 25. – P. 437–478.
7. *Bendsøe M.P.* Optimal shape design as a material distribution problem. – Structural Optimization. – 1989. – Vol. 1. – No. 4. – P. 193–202.
8. *Andreassen E., Clausen A., Schevenels M.* Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code. – Struct Multidisc Optim. – 2011. – Vol. 43. – P. 1–16.
9. *Kats A.M.* Teoriya uprugosti. Saint Petersburg: Izdatelstvo "Lan", 2002, 208 pp.
10. *Harris C.R., Millman K.J., van der Walt S.J.* Array programming with NumPy. – Nature. – 2020. – Vol. 585. – P. 357–362.
11. *Virtanen P., Gommers R., Oliphant T.E.* SciPy 1.0: Fundamental Algorithms for Scientific Computing in Python. – Nature Methods. – 2020. – Vol. 17. – P. 261–272.
12. *Lazarov B.S., Sigmund O.* Filters in topology optimization based on Helmholtz-type differential equations. – International Journal for Numerical Methods in Engineering. – 2011. – Vol. 86. – P. 765–781.

Стаття надійшла 09.02.2022

Єгоров Є.А., Кучеренко О.Є.

ЩОДО ОПТИМАЛЬНОЇ ТОПОЛОГІЇ ПІДПІРНОЇ СТІНКИ

Розглядається задача визначення оптимальної топології перерізу підпірної стінки, для розв'язання якої застосовується метод топологічної оптимізації SIMP. При цьому ізотропне тверде тіло розбивається на n чотирикутних скінчених елементів, і кожному такому елементу e ставиться у відповідність проектна змінна x_e, яку можна розуміти як густину матеріалу. Вводиться поняття віртуального модуля Юнга, який для кожного елемента апроксимується так: $E_e(x_e) = E_{\min} + x_e^p(E_0 - E_{\min})$, де p – штраф, який зазвичай дорівнює 3; $E_{\min}$ – мале значення модуля, яке вводиться з тим, щоб уникнути сингулярності матриці жорсткості; E_0 – модуль Юнга матеріалу. При виконанні умови $0 \le x_e^p \le 1$ E_e варіюється між певним мінімальним значенням $E_{\min}$ і звичайним модулем Юнга E_0. Для демонстрації роботи алгоритму розглядається підпірна стінка із суцільним перерізом у вигляді прямокутника з відношенням висоти до основи рівним 3:1. По всій своїй висоті вона знаходиться під тиском ґрунту, який змінюється лінійно від 0 до 1, що в цілому відповідає гідростатичному тиску. З позиції теорії пружності така задача може розглядатися як плоска. Проблема пошуку оптимальної топології зводиться до розв'язання задачі математичного програмування $F^T u(x) \to \min_u$ при виконанні певних умов (тут F – вектор зовнішніх сил, $u(x)$ – вектор переміщень, x – вектор, елементи якого знаходяться в межах [0, 1]). Цільову функцію можна інтерпретувати як роботу зовнішніх сил з деформації системи, тобто розв'язування задачі полягає в пошуку максимально жорсткого тіла певного об'єму. Для розв'язування оптимізаційної задачі було створено застосунок на мові Python 3.7 з використанням бібліотек Numpy та Scipy. Для усунення проблеми «шахової дошки» (чергування чорних та білих клітин) застосовувався фільтр Гауса з пакету Skimage. Параметри отриманої моделі описано на мові APDL та експортовано у систему скінченного-елементного аналізу Ansys

Mechanical для подальшого аналізу. Визначено, що при долі збереженого об'єму, що дорівнює 60%, максимальні напруження за фон Мізесом в структурі з оптимальною топологією не перевищують цей показник в підпірній стінці з прямокутним перерізом.

Ключові слова: підпірна стінка, топологія, оптимізація, дискретизація, фільтр, еволюційна структурна оптимізація, метод SIMP.

Yegorov Y., Kucherenko O.

OPTIMAL TOPOLOGY OF RETAINING WALL

This paper intends to present an approach to the problem of the optimal cross-section topology of a retaining wall. We use the Solid Isotropic Material with Penalization (SIMP) method to solve this problem. An isotropic solid is divided into n quadrilateral finite elements, and each such element e is associated with a design variable x_e which might be regarded as a material density. The notion of a virtual Young's modulus is introduced, and for each element it can be approximated as follows: $E_e(x_e) = E_{\min} + x_e^p (E_0 - E_{\min})$, where p is a penalty, which is usually equal to 3; $E_{\min}$ is a small value of the modulus, which we use in order to avoid the singularity of a stiffness matrix; E_0 is the Young's modulus of the material. Thus when the condition $0 \le x_e^p \le 1$ is satisfied E_e varies between a certain minimum value $E_{\min}$ and the usual Young's modulus E_0. We regard a retaining wall with a solid cross-section in the form of a rectangle with a height to base ratio of 3:1 to demonstrate the proposed approach. Along its entire height the wall is under the pressure of soil, which varies linearly from 0 to 1. In general, this corresponds to hydrostatic pressure. From the standpoint of the theory of elasticity such a problem can be considered as planar. The problem of the optimal topology shrinks to the mathematical programming problem in the form of $F^T u(x) \to \min_u$ under certain conditions (here F is a vector of external forces, $u(x)$ is a vector of displacements, x is a vector of densities). The objective function can be interpreted as the work done by external forces to deform the system, thus we tend to find the stiffest body of a certain volume. To solve mathematical programming problem we use Python programming language, and Numpy and Scipy packages. To eliminate the "checkerboard problem" (alternation of black and white cells) we apply a Gaussian filter from the Skimage package. The parameters of the obtained model are described in ANSYS Parametric Design Language and exported to Ansys Mechanical for further analysis. It is determined that the maximum von Mises stress in the structure with the optimal topology and the prescribed volume fraction of 60% does not exceed this value in the retaining wall with a base rectangular cross section.

Keywords: retaining wall, topology, optimization, discretization, filter, evolutionary structural optimization, SIMP method.

УДК 624.04:519.853:519.688
Єгоров Є.А., Кучеренко О.Є. **Щодо оптимальної топології підпірної стінки** // Опір матеріалі і теорія споруд: наук.-тех. Збірн. – К: КНУБА, 2022 – Вип. 108. – С. 369-376.
Розглядається задача пошуку оптимальної топології перерізу підпірної стінки, яка розв'язується як задача математичного програмування із застосуванням SIMP методу.
Табл. 1. Іл. 7. Бібліогр. 12 назв.

Yegorov Y., Kucherenko O. **Optimal topology of retaining wall** // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientificand-technical collected articles. – K.: KNUBA, 2022. – Issue 108. – P. 369-376.
The problem of optimal topology of a retaining wall cross-section is considered as a mathematical programming problem using the SIMP method.
Tab. 1. Fig. 7. Ref. 12.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри металевих конструкцій ЄГОРОВ Євгеній Аркадійович.
Адреса робоча: 49600. м. Дніпро, вул. Чернишевського, 24а, ДВНЗ "Придніпровська державна академія будівництва та архітектури", ЄГОРОВ Євгеній Аркадійович.
Мобільний тел.: +380679451816
E-mail: evg_egorov@ukr.net
ORCID ID: http://orcid.org/0000-0003-2993-0570

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук (PhD) КУЧЕРЕНКО Олександр Євгенович.
E-mail: akch7@cryptolab.net