

УДК 629.01

**ОБМЕЖЕННЯ НА ІНТЕГРАЛЬНІ МІРИ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ
В ЗАДАЧАХ ТОПОЛОГІЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ****В.Ф. Кришталь,**
канд. техн. наук, доцент**І.В. Янчевський,**
д-р фіз.-мат. наук, професор*Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені
Ігоря Сікорського», 03056, Україна, м. Київ-56, пр. Перемоги, 37*

DOI: 10.32347/2410-2547.2023.110.207-228

Топологічною оптимізацією (ТО) називають обчислювальний метод визначення розподілу матеріалу у заданій області проєктування для створення оптимальної форми деталі при заданих граничних умовах. В класичній постановці ТО у якості критерію пошуку зазначеного розподілу обрана мінімізація піддатливості деталі при обмеженнях на об'єм (масу) результату оптимізації. Більш наближеною до прикладного застосування є постановка задачі ТО, що передбачає мінімізацію об'єму деталі з урахуванням умови її міцності. Залучення агрегатних функцій для обчислення інтегральних мір напруженого стану має низку переваг над традиційною перевіркою максимального значення механічного напруження. У даній роботі представлені агрегатні функції, які отримали найбільше застосування в сучасних дослідженнях з питань ТО з урахуванням міцності оптимізованої деталі.

Ключові слова: топологічна оптимізація, механічне напруження, інтегральна міра, агрегатні функції, скінченні елементи.

Вступ. Топологічною оптимізацією називають обчислювальний метод визначення розподілу матеріалу у заданій області проєктування для створення оптимальної форми деталі чи елемента конструкції із заданими граничними умовами. Сучасні підходи до реалізації топологічної оптимізації побудовані на безпосередньому залученні методів математичного аналізу, співвідношень теорії пружності та методу скінченних елементів (МСЕ), який знайшов широке розповсюдження при визначенні напружено-деформованого стану конструктивних елементів як простої, так і складної геометрії.

В цілому, процес пошуку оптимальної топології деталі полягає у ітераційному видаленні або додаванні матеріалу із заданої проєктної геометричної області на основі певної алгоритмічної процедури. У якості критерію пошуку оптимального розподілу матеріалу може бути обрана мінімізація піддатливості конструкції при обмеженнях на об'єм (масу) результату оптимізації [1–6], яка вважається класичною постановкою задачі ТО. Проєктною змінною, за якою проводиться оптимізація, приймається відносна (умовна) густина ρ матеріалу кожного елемента скінченно-елементної моделі [1]. На даний час існує декілька підходів у ТО, які спираються на різні моделі з густиною у якості проєктної змінної:

густина матеріалу елемента може змінюватись неперервно у діапазоні значень від 0 до 1, що реалізовано, наприклад, у методі SIMP (Simplified Isotropic Material with Penalization); густина матеріалу елемента вважається дискретною величиною [7], яка приймає значення або 1 (існування скінченного елемента), або 0 (відсутність скінченного елемента) – методи ESO/BESO (Evolutionary Structural Optimization / Bi-directional Evolutionary Structural Optimization). Додавання або видалення елементів відбувається на підставі аналізу параметрів, залежних від напружено-деформованого стану моделі.

Результатом оптимізації є так званий «чорно-білий» проект – в заповнених матеріалом областях «густина» елементів має дорівнювати одиниці (область елемента позначається чорним кольором), а в порожнинах – нулеві (область елемента позначається білим кольором). Однак, оскільки, наприклад, у SIMP підході кожний елемент вектора густини ρ_e ($e = \overline{1, N}$) може змінюватись в інтервалі $[\rho_{\min}; 1]$, то проміжні її значення штрафуються шляхом піднесення у емпірично обраний степінь $p > 1$ (зазвичай $p = 3$). При цьому, з відносною густиною кожного скінченного елемента пов'язують модуль пружності матеріалу даного елемента [1]:

$$E_e(\rho_e) = \rho_e^p E_0, \quad (1)$$

де E_0 – безрозмірний модуль пружності матеріалу деталі при $\rho = 1$ (зазвичай $E_0 = 1$).

Разом з тим, більш наближеною до прикладного застосування є постановка задач ТО, яка передбачає урахування обмежень на рівень напруженого її стану. Зазначене обмеження математично може бути виражено через умову міцності для кожного елемента SE-моделі деталі

$$\hat{\sigma}_e \leq \sigma_Y \quad (e = \overline{1, N}), \quad (2)$$

де σ_Y – допустиме значення напруження, у якості якого зазвичай приймається границя плинності матеріалу або границя пружності; $\hat{\sigma}_e$ – еквівалентне напруження у e -му скінченному елементі; N – кількість елементів SE-моделі.

Слід зазначити, що обчислення еквівалентного напруження $\hat{\sigma}_e$ в задачах ТО зазвичай спирається на енергетичну теорію міцності (напруження за Мізесом) і визначається у e -му скінченному елементі через компоненти тензора його механічних напружень, для яких у випадку пружних деформацій застосовне наступне матричне співвідношення

$$\langle \sigma_e \rangle = C(E_e) \cdot \langle \varepsilon_e \rangle.$$

Тут $\langle \sigma_e \rangle$, $\langle \varepsilon_e \rangle$ – представлення тензорів механічних напружень і деформацій у вигляді відповідних їм стовпцевих матриць; $C(E_e)$ –

матриця пружних постійних, яка залежить від модуля Юнга E_e (1):

$$C(E_e) = \rho_e^p C(E_0).$$

Еквівалентне напруження $\hat{\sigma}_e$ у деяких роботах з ТО, зокрема у [8, 9], називають мікронапруженням або «локальним» напруженням.

Для уникнення проблем з чисельною точністю обчислень, використовується також нормований аналог умови міцності (2)

$$\hat{s}_e \leq 1 \quad (e = \overline{1, N}), \quad (3)$$

де $\hat{s}_e = \hat{\sigma}_e / \sigma_Y$ – нормоване відносно граничного значення σ_Y еквівалентне механічне напруження.

В якості постановок задач ТО з врахуванням обмежень на напруження можна навести задачі проектування мінімально піддатливої конструкції з обмеженнями на об'єм та напруження [10–11] в скінченних елементах. Задача мінімізації об'єму проектної області при обмеженнях на рівень напруженого стану досліджується у роботах [12–29]. Задачу мінімізації напружень з обмеженнями на об'єм оптимізованої деталі розглянуто у роботах [30–34].

Зазначимо, що підвищений інтерес до розробки ефективних методів проектування деталей оптимальної топології з урахуванням умови їх міцності свідчить про актуальність цих теоретичних досліджень та важливе прикладне значення отриманих результатів.

1. Особливості задач ТО на основі умови міцності проектної деталі.

Автори роботи [3] вказують на низку проблем, які можуть виникати при розв'язанні задач оптимізації з урахуванням умови міцності (3). Однією з проблем є так зване явище «сингулярності» – прямування напруження до нескінченності для малих умовних густин елементів. Другою – локальна природа обмеження напруження (необхідність перевірки виконання умови міцності для кожного елемента SE-моделі).

Проявом проблеми «сингулярності» є те, що алгоритми оптимізації не можуть визначити (ідентифікувати) області, з розмірністю меншою N -вимірному простору проектування, яким може належати оптимальний розв'язок. Це може приводити до оптимального розв'язку локального характеру. Для розв'язання цієї проблеми, потрібно послабити обмеження на напруження для збереження початкової розмірності проектної області і, таким чином, дозволити алгоритмам оптимізації знайти глобальний оптимальний розв'язок.

У якості методів вирішення проблеми «сингулярності», згідно літературних джерел, зазвичай застосовувались методи δ -релаксації (ε -релаксації), qr -релаксації та штрафування («пеналізації»).

Метод δ -релаксації (ε -релаксації) було запропоновано у [12] та розвинуто у статтях [8, 9] на континуальні (неперервні) структури з обмеженням на напруження (умовою міцності) у вигляді

$$\hat{s}_e \leq 1 - \delta + \frac{\delta}{\rho_e} \quad (e = \overline{1, N}). \quad (4)$$

Тут δ – достатньо мале число, таке, наприклад, що $\delta^2 = \rho_{\min}$.

Як альтернативний метод у роботі [15] представлено так званий підхід qp -релаксації. З метою запобігання сингулярності розв'язку автор пропонує використати обмеження

$$(\hat{\sigma}_e - \rho_e^q \sigma_Y) \cdot \rho_e \leq 0, \quad (5)$$

у якому спочатку у якості показника степеня взяти значення q меншим p (див. (1)), і розв'язати вхідну задачу ТО. Результат отриманої оптимізації стає відправною точкою для нової ітерації з більшим q , яке задовольняє умову $q < p$. Розв'язуючи послідовно задачі зі збільшенням q реалізується т.зв. «процедура продовження» для розв'язання задачі з $q = p$. Як зазначено у роботі [15], qp -підхід дозволяє забезпечити скінченне значення (відсутність розривів) напруження для усього діапазону значень умовної густини ρ_e .

Ще один підхід, підхід штрафування для досягнення «чорно-білого» результату ТО, представлено у роботах [18, 21, 28], відповідно до якого для елементів з проміжними густинами ρ_e еквівалентне напруження \hat{s}_e зменшується на підставі виразу

$$\hat{s}' = \eta(\rho) \cdot \hat{s} = \sqrt{\rho} \cdot \hat{s}. \quad (6)$$

Зазначено, що обраний запис множника $\eta(\rho) = \sqrt{\rho}$ допомагає уникнути проблем із сингулярністю в оптимізації топології на основі критерію міцності, оскільки дозволяє забезпечити нульовий напружений стан в пустотах – $\eta(0) = 0$. Також виконується рівність $\eta(1) = 1$, яка забезпечує узгодження «послабленого» напруження \hat{s}'_e з напруженням \hat{s}_e у твердому матеріалі (при $\rho_e = 1$).

Множник $\eta(\rho)$ (6) також дозволяє компенсувати вплив проміжних значень густини, оскільки функція $\eta(\rho)$ монотонно зростає і для неї виконується нерівність $\rho_e < \eta(\rho_e) < 1$ при $0 < \rho_e < 1$.

Друга складність оптимізації топології на основі критерію обмеженого рівня напруженого стану пов'язана з локальним характером такого обмеження, тобто перевіркою виконання умови міцності для кожної контрольної точки з області проектування. Це значно збільшує час знаходження оптимального результату, оскільки кількість точок у СЕ-постановці задачі ТО може бути досить великою при розв'язанні практичної задачі. Для вирішення цієї проблеми у низці робіт замість перевірки виконання усіх локальних обмежень використовуються т.зв. агрегатні функції, які виражають певну інтегральну міру механічних напружень. Серед основних вимог до зазначених функцій слід відзначити

вимогу до її гладкості та диференційовності, яка необхідна для аналізу чутливості до її аргументів.

Використання агрегатних функцій дає можливість суттєво заощадити час розв'язання задачі ТО, зменшує обчислювальні витрати на визначення чутливості, у певних межах зберігає контроль над напруженим станом. Зазначені переваги компенсують певну втрату точності в результатах оптимізації.

Для обчислення інтегральних мір механічних напружень в задачах ТО використовуються функції P -норми та P -середнього, KS-функції Крайсельмайера-Штайнхаузера (Kreisselmeier-Steinhauser), гладкі функції Гевісайда, середнє зважене максимального напруження та набору перевищених напружень.

2. Інтегральна міра напруженого стану на основі P -норми та P -середнього. Агрегатні функції напруженого стану на основі P -норми (P -norm) та P -середнього (P -mean) використовувались у роботах [9, 10, 14, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 28, 31–33], які присвячені задачам ТО. Вирази цих функцій основою мають норму Мінковського (L_P -норму Лебега)

$$\|\mathbf{x}\|_P = \left(\sum_{e=1}^N |x_e|^P \right)^{1/P} \quad (7)$$

та середнє степеневе значення аргументу

$$M_P(\mathbf{x}) = \left(\frac{1}{N} \sum_{e=1}^N |x_e|^P \right)^{1/P}, \quad (8)$$

які задовольняють граничним переходам

$$\lim_{P \rightarrow \infty} \|\mathbf{x}\|_P = \max_e |x_e|; \quad \lim_{P \rightarrow \infty} M_P(\mathbf{x}) = \max_e |x_e|. \quad (9)$$

Так, у роботах [9, 14] були розглянуті умови міцності проектної деталі на основі P -норми

$$\left\{ \sum_{e=1}^N \max_e \left(0, \frac{\hat{s}_e}{\rho_e^P} + \delta - \frac{\delta}{\rho_e} \right)^P \right\}^{1/P} \leq 1, \quad (10)$$

та P -середнього

$$\left\{ \frac{1}{N} \sum_{e=1}^N \max_e \left(0, \frac{\hat{s}_e}{\rho_e^P} + \delta - \frac{\delta}{\rho_e} \right)^P \right\}^{1/P} \leq 1, \quad (11)$$

записи яких виключають від'ємні значення послаблених критеріїв напруження. Тут δ , як і вище, – деяке мале число.

Виконані авторами [9, 14] числові експерименти демонструють суттєве заощадження часу при використанні вказаних агрегатних функцій при розв'язанні задачі ТО з мінімізацією об'єму конструкції порівняно з підходом перевірки локальних напружень SE-моделі (3). Однак при цьому також показано, що в певних межах втрачається контроль над локальним

напруженим станом і відбувається наближення проекту з інтегральним обмеженням напруження до проекту з мінімізацією піддатливості. Але і в цьому випадку, врахування обмежень напруження в інтегральній формі сприяє зменшенню максимальних значень локальних напружень порівняно з проектом мінімальної піддатливості.

Зазначається також, що функції P -середнього та P -норми дають змогу встановити межі максимального значення послабленого критерію за нижчими або верхніми значеннями, оскільки виконується співвідношення

$$M_P(\mathbf{x}) < \max_e |x_e| < \|\mathbf{x}\|_P.$$

У випадку прямування показника P до нескінченності значення обох функцій зближаються (див. (9)). Однак у вказаних роботах взято $P=4$, оскільки це дозволяє уникати чисельної нестабільності задачі ТО та в певних межах контролювати максимальне значення агрегатної функції. Останнє означає, що при певному встановленому обмеженні інтегрального критерію, максимальне значення напруження після ТО перевищує допустиме. Тобто максимальне значення локальних напружень вище за обмежувальне значення інтегрального критерію ($\max(\hat{s}_e) = \hat{s}_{\max} > 1$).

Авторами статті [19] інтегральна міра напруженого стану на основі функції P -норми була застосована до зібраних у групи локальних обмежень на підставі критеріїв їх сусідства та однакової кількості елементів у вигляді:

$$s_{PN} = \left\{ \sum_{e \in \Omega_k} (\eta(\rho_e) \cdot \hat{s}_e)^P \right\}^{1/P},$$

де функція $\eta(\rho) = \sqrt{\rho}$ відповідає виразу (6), Ω_k – k -а група елементів сітки.

Результати числових розрахунків у [19] проведено з коефіцієнтом P -норми $P=10$. Авторами показана необхідність врахування обмеження напруження в задачах ТО та продемонстровано «процедуру продовження» з метою забезпечення єдиного оптимального розв'язку під час якої параметр агрегації P змінювався від 1 до 16.

Підхід до створення інтегральної міри напружень, який викладено у статті [21], на відміну від попередньої роботи, передбачає використання функції P -середнього (8). В якості моделі матеріалу вибрано підхід із штрафуванням (SIMP). Тут інтегральна міра напруження $s_{PN_k}(x)$ обчислюється у кожній області/«кластері», на які розбивається проект:

$$s_{PN_k} = \left\{ \frac{1}{N_k} \sum_{e \in \Omega_k} (\eta(\rho_e) \cdot \hat{s}_e)^P \right\}^{1/P} \quad (k = \overline{1, m}), \quad (12)$$

де N_k – кількість елементів в k -му кластері Ω_k ; m – кількість кластерів; $\eta(\rho) = \sqrt{\rho}$ – функція «штрафування» напруження (див. також (6)).

Автори приходять до висновку, що застосування функції P -середнього у порівнянні з P -нормою має позитивний ефект, оскільки відбувається масштабування граничного значення, що виявляється корисним для збіжності задач оптимізації. Зокрема, це дозволяє уникнути проблем на перших ітераціях, коли у деяких точках може бути дуже високе напруження.

У роботі [25] також використовується функція P -середнього (8) для створення «уніфікованого підходу агрегації та релаксації» в оптимізації топології з обмеженнями на напружений стан. Відповідно до запропонованого підходу, задачу мінімізації об'єму проектної деталі з набором «локальних» обмежень

$$\bar{g}_e = \rho_e (\hat{s}_e - 1) \leq 0 \quad (e = \overline{1, N}),$$

замінених на вирази

$$\bar{g}_e - \bar{g}_{\min} \leq -\bar{g}_{\min},$$

де $\bar{g}_{\min} = \min(\bar{g}_e) = -1$, переформульовано в еквівалентну задачу оптимізації з використанням агрегації обмежень. Аргументами агрегатної функції є невід'ємні ліві частини вказаних нерівностей, що дозволяє обмеження на рівень напруженого стану подати так:

$$S_{PM}^L = \left(\frac{1}{N} \sum_e (\bar{g}_e + 1)^P \right)^{1/P} \leq 1. \quad (13)$$

У роботі [25] показано, що застосування агрегатної функції S_{PM}^L робить доступними сингулярні оптимальні розв'язки без додаткових методів послаблення обмежень, що зменшує кількість параметрів. Одночасно зазначено, що використання в умові міцності інтегральної міри S_{PN}^U у формі P -норми

$$S_{PN}^U = \left(\sum_e (\bar{g}_e + 1)^P \right)^{1/P} \leq 1, \quad (14)$$

не дозволяє отримати оптимальний розв'язок у підпросторі меншої розмірності без додаткових методів релаксації (див. (10)–(12)) як у [9, 18], що є наслідком виконання умови

$$S_{PM}^L \leq \max(f_e) \leq S_{PN}^U \quad (e = \overline{1, N}).$$

Авторами [25] на конкретних прикладах показано, що збільшення параметра агрегації P до значень 20...40 дає кращі результати, але для великих значень параметра агрегатна функція стає нелінійною і прийнятий алгоритм оптимізації може сходиться до локальних мінімумів зі зростанням об'єму. Окрім цього, відбувається суттєве збільшення кількості ітерацій.

Також продемонстровано, що при подрібненні SE-сітки дещо збільшується максимальне напруження і, відповідно, різниця з допустимим напруженням ($\hat{s}_e > 1$). Цю проблему пропонується вирішити

за допомогою стратегій нормування, як це зроблено в [18] та розглянуто далі в п. 6.

Дослідження поведінки агрегатних функцій на основі P -норми та P -середнього в залежності від розподілу значень їх аргументів було проведено у роботі [35], окремі результати якого представлено на рис. 1.

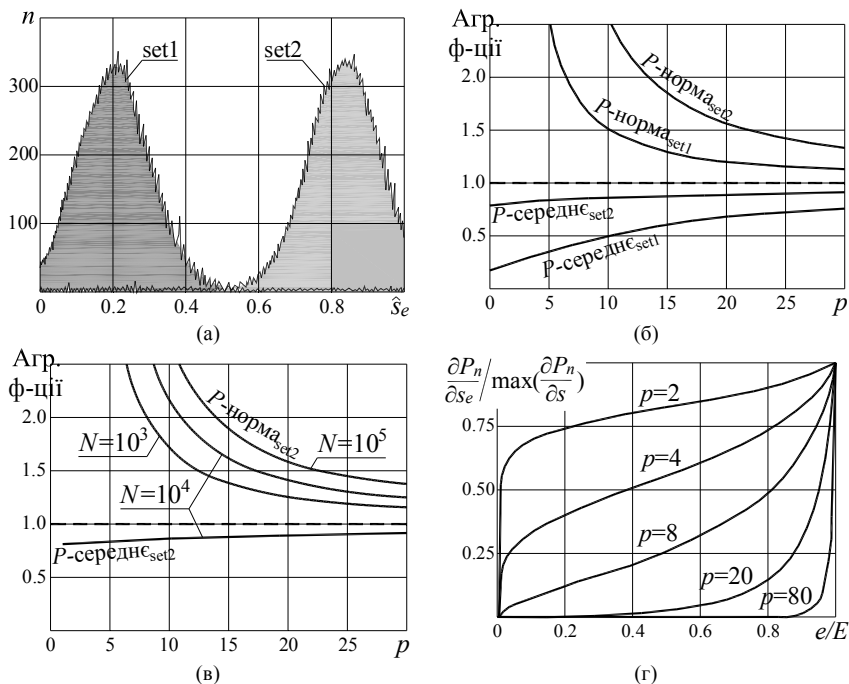


Рис. 1. Залежність агрегатних функцій P -норми і P -середнього від значень аргументів

Зокрема, на рис. 1 (б) представлено результат агрегації зображених на рис. 1 (а) двох наборів аргументів set1 і set2 за допомогою функцій P -норми та P -середнього. Зазначається, що функція P -норми (7) з параметром $P > 12$ забезпечує кращу апроксимацію максимуму коли аргументи розташовані переважно на низьких значеннях (set1). І навпаки, коли аргументи знаходяться на вищих значеннях (set2) функція P -середнього (8) забезпечує краще наближення до максимуму навіть для низьких показників P . З цього слідує, що P -середнє менш чутливе до зміни показника P , коли аргументи розміщуються на вищих значеннях, оскільки наближення P -середнього дещо покращується зі зростанням P .

Також у роботі [35] проаналізована залежність агрегатних функцій від кількості даних – чим більша кількість даних, тим нижча ефективність функції P -норми (рис. 1 (в)). Це не стосується значень P -середнього, оскільки воно має коефіцієнт масштабування N , який розміщує функцію навколо середнього арифметичного незалежно від кількості аргументів.

Важлива властивість описаних у даному пункті агрегатних функцій полягає в тому, що вони надають інформацію про чутливість, яка використовується алгоритмами оптимізації. На рис. 1 (г) показано, що зі збільшенням P чутливість агрегатної функції наближається до чутливості функції $\max(s)$, для якої лише одне відмінне від нуля значення чутливості.

На підставі низки проведених чисельних розрахунків автори [35] сформулювали наступні висновки:

- P -середнє не залежить від розміру SE-сітки: при порівнянні топологій, отриманих з різними дискретизаціями, але з однаковим параметром P , можна побачити, що проекти практично однакові;
- P -середнє знижує найбільш критичне обмеження і тому конструкції, отримані на основі P -середнього, мають кращі конструктивні характеристики у порівнянні з результатом для P -норми.

3. Інтегральна міра напруженого стану на основі функції Крайсельмайєра-Штайнхаузера. В загальному випадку функція Крайсельмайєра-Штайнхаузера (KS-функція) [36] може бути подана у формі

$$G_{KS} = \frac{1}{\mu} \ln \sum_i \exp(\mu x_i),$$

де x_i – аргументи функції; μ – деяка додатна стала ($\mu > 0$).

Зауважимо, що KS-функція задовольняє наступному граничному переходу –

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} G_{KS} = \max_i(x_i).$$

Однією з перших робіт, в якій для задач ТО з мінімізацією напруження та обмеженнями об'єму було використано інтегральну міру напруженого стану на основі KS-функції в якості цільової функції, є робота [30]

$$G_{KS} = \frac{1}{\mu} \ln \sum_e \exp(\mu \hat{s}_e), \quad (15)$$

у якій μ названо безвимірним параметром агрегації та прийнято рівним $\mu = 20$.

Певні підходи до вибору параметра μ подано у статтях [16, 17, 20, 25].

У роботах [16, 17] для задачі мінімізації маси деталі було запропоновано подати обмеження інтегральної міри напруженого стану у формі, яка дозволяє уникати великих розрахункових значень KS-функції

$$G_{KS} = \frac{1}{\mu} \ln \sum_e \exp\left(\mu \frac{\hat{s}_e - \hat{s}_{\max} \varphi_e}{\hat{s}_{\max} \varphi_e}\right) \leq \frac{1}{\mu} \ln N, \quad (16)$$

де $\varphi_e = 1 - \delta + \delta/\rho_e$ – коефіцієнт релаксації напруження; \hat{s}_{\max} – максимальне значення нормованого еквівалентного напруження ($\hat{s}_{\max} = \max(\hat{s})$), $\mu^{-1} \ln N$ – максимальне значення інтегральної міри.

Як зазначено у [16, 17], у випадку прямування μ до нескінченності обмеження (16) стає еквівалентним обмеженню з найбільшим значенням \hat{s}_{\max} . Але зростання параметру μ посилює нелінійність лівої частини (16), що потребує обґрунтованого вибору його значення.

Значення інтегральної міри G_{KS} у (16) в залежності від параметра μ за умови, що для 50% скінченних елементів прийнято $\hat{s}_e = 0.9$, зображено на рис. 2,а. Тут різні криві відповідають різним значенням \hat{s}_e для решти елементів SE-моделі. На рисунку 2,б через V_Y позначено частку скінченних елементів з порушеним обмеженням на напруження ($\hat{s}_e = 1.1 > 1$). У решти елементів вважається, що $\hat{s}_e = 0.9$. На цьому рисунку криві відповідають значенням інтегральної міри G_{KS} для зростаючого відсотка V_Y порушених обмежень на напруження.

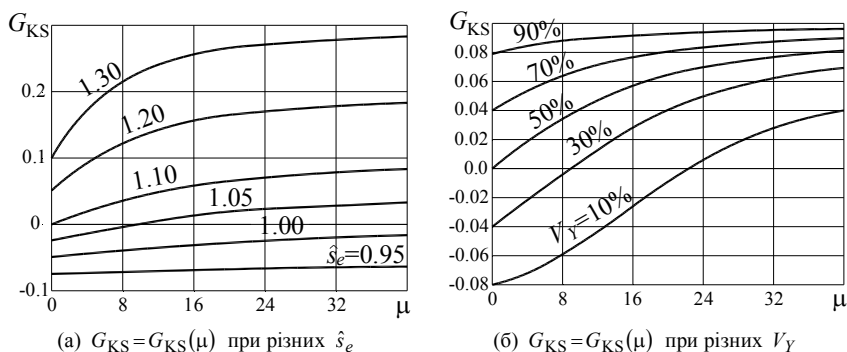


Рис. 2. Залежність інтегральної міри G_{KS} від параметра μ [16]

З рис. 2(б) слідує, що для малих μ обмеження (16) може задовольнятися, хоча має місце багато порушених локальних обмежень ($\hat{s}_e > 1$). Проведені авторами чисельні експерименти свідчать про доцільність вибору значень μ з діапазону від 20 до 30.

Автори зазначеної публікації також пропонують для покращення результатів ТО наприкінці оптимізаційного процесу коефіцієнт μ збільшити.

У якості інтегральної міри напруженого стану у роботі [25] пропонується обирати т.зв. нижню межу KS-функції G_{KS}^L , яку також називають середнім експоненційним. Введене глобальне обмеження замінює набір локальних обмежень

$$\bar{g}_e = \rho_e (\hat{s}_e - 1) \leq 0 \quad (e = \overline{1, N}) \quad (17)$$

і відрізняється від застосованого у роботах [16, 17] обмеження тим, що у показник степеня експоненти входить також відносна густина ρ_e (див. (17)):

$$G_{KS}^L = \frac{1}{\mu} \ln \left(\frac{1}{N} \sum_e \exp(\mu \bar{g}_e) \right) \leq 0.$$

Нижня межа KS-функції G_{KS}^L та її класичне визначення G_{KS} (15), яке називають також верхньою межею KS-функції, пов'язані наступною залежністю

$$G_{KS}^L = \frac{1}{\mu} \ln \left(\sum_e \exp(\mu \bar{g}_e) \right) - \frac{1}{\mu} \ln N = G_{KS} - \frac{1}{\mu} \ln N. \quad (18)$$

У роботі [25] показано, що застосування в обмежені напружень функції G_{KS}^L (18) дозволяє «послабити» область проектування і шукати сингулярні оптимальні рішення. Тобто будь-які інші послаблення обмежень не потрібні, що зменшує залежність задачі від додаткових параметрів.

Автори [25] вказують, що KS-функцію

$$\tilde{G}_{KS} = \frac{1}{\mu} \ln \left(\sum_{e=1}^N \exp(\mu \tilde{g}_e) \right),$$

зібрану з послабленими обмеженнями \tilde{g}_e –

$$\tilde{g}_e = \bar{g}_e - \delta \leq 0 \quad (e=1, N),$$

можна записати через KS-функцію з обмеженнями \bar{g}_e (17) без послаблень:

$$\tilde{G}_{KS} = G_{KS} - \delta,$$

де δ – однаковий для усіх обмежень параметр релаксації.

Порівняння останнього виразу з формулою (18) дозволяє визначити параметр релаксації як

$$\delta = \ln(N)/\mu,$$

тобто використання нижньої межі KS-функції є окремим випадком збирання δ -послаблених обмежень верхньою межею KS-функції.

4. Інтегральна міра напруженого стану на основі функції Гевісайда. У статті [26] запропоновано «безпечний» та «небезпечний» стани скінченного елемента SE-моделі визначити з використанням «гладкого» аналогу $H_\alpha(x)$ функції Гевісайда, який подається у вигляді

$$H_\alpha(x) = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{2}{\pi} \arctg \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right].$$

Тут α ($\alpha=0+$) – параметр, що визначає крутизну функції $H_\alpha(x)$.

Загальне обмеження на напружений стан, спираючись на введену авторами [26] інтегральну міру напруженого стану, можна подати як

$$g_H = \frac{1}{N} \sum_e H_\alpha(\hat{s}_e - 1) \cdot \hat{s}_e^{\eta_h} \leq \delta, \quad (19)$$

де η_h – коефіцієнт компенсації напруження.

З метою досягнення «чорно-білих» проєктів ($\rho_e=1$ або 0) та уникнення сингулярності, нормоване еквівалентне напруження \hat{s}_e штрафується за допомогою множника $\eta(\rho)=\sqrt{\rho}$ [18, 21] –

$$\hat{s}_e = \eta(\rho_e) \cdot s_0,$$

де s_0 – нормоване напруження твердого матеріалу (при $\rho=1$).

Введене обмеження $g_H \leq \delta$ (19) при $\eta_h=0$ приблизно представляє собою об'ємну частку матеріалу, який не задовольняє умові міцності $\hat{s}_e \leq 1$. Для $\eta_h=2$ міра g_H визначається як об'ємна частка квадрата еквівалентного напруження, яка перевищує допустиме значення.

Стосовно параметра Гевісайда, авторами пропонується значення 0.005, оскільки занадто мале значення α зробить функцію $N_\alpha(x)$ дуже крутою і може призвести до високої нестабільності алгоритму оптимізації, а велике α зробить повільним перехід від 0 до 1 і тоді збільшиться вплив на g_H малих напружень.

Малий додатний параметр δ використовується для обмеження значення g_H , оскільки гладка функція $N_\alpha(x)$ вносить невеликий додатний вклад в g_H навіть при напруженнях менших за допустиме. Автори пропонують приймати його значення на підставі наступних міркувань:

- якщо значення δ будуть великі, то тоді порушуються локальні обмеження на напруження ($\hat{s}_e > 1$; $e = \overline{1, N}$);
- якщо δ замалий, то вийде занадто консервативний дизайн.

Адаптивна схема обчислення δ для уникнення коливань розрахункових значень встановлює спочатку певне значення $\delta^{(J)}$ на перші п'ятдесят ітерацій, а потім оновлюється кожні десять ітерацій як

$$\delta^{(J+1)} = \min\left(\frac{1}{\hat{s}_{\max}^{(J)}}, 1\right) \cdot \delta^{(J)},$$

де J – номер ітерації оптимізаційного процесу; $\hat{s}_{\max}^{(J)}$ – середнє значення нормованих максимальних напружень за попередні п'ять ітерацій.

У статті [26] встановлено значення $\delta=0.005$ на перших 25 ітераціях і $\delta=0.0025$ на наступних.

Параметр η_h в (19) подібний до параметра P в записі P -норми, причому $N_\alpha(\bar{s}_e-1)$ можна розглядати як вагові коефіцієнти, а обмеження g_H як різновид функції P -норми низького порядку. Великі η_h можна використовувати для послаблення високої концентрації напружень, хоча це збільшить нелінійність задачі оптимізації. При $\eta_h=0$ обмеження напруження g_H змусить матеріал перемикатися між двома

станами – «безпечним» або «небезпечним», що зробить алгоритм оптимізації нестабільним. З точки зору низької нелінійності та збіжності автори пропонують обрати $\eta_h = 2$.

5. Інтегральна міра напруженого стану на основі максимального локального напруження. У роботі [27] запропоновано обмеження для інтегральної міри напруженого стану записувати наступним чином –

$$f_{\sigma} = \hat{s}_{\max} + \sum_{e \in A} (\hat{s}_e - 1)^2 \leq 1, \quad (20)$$

яке враховує як максимальне значення локальних напружень $\hat{s}_{\max} = \max_e (\hat{s}_e)$ ($e = \overline{1, N}$), так і суму квадратів «перевищених напружень» (A – набір номерів скінченних елементів з порушеною умовою міцності, $\hat{s}_e > 1$).

На кожній ітерації обчислюється максимальне напруження і фільтруються елементи з $\hat{s}_e > 1$. При цьому припускається, що положення елементів з \hat{s}_{\max} і з набору A є постійними на поточній ітерації, а функція обмеження f_{σ} є диференційованою. Автори [27] вказують, що запис f_{σ} добре працює навіть для межі максимального напруження.

У статті [27] показано, що умова міцності (20) не потребує встановлення додаткових параметрів і більше підходить для постановки задачі ТО з мінімізацією піддатливості.

6. Нормування інтегральної міри напруженого стану. У статті [18] пропонується виконувати нормування інтегральної міри напруженого стану на основі P -норми. Ця міра є наближенням до максимального значення напруження і записується у вигляді:

$$s_{\max} \approx c \cdot s_{\text{PN}} \leq s'_y, \quad (21)$$

де

$$s_{\text{PN}} = \left(\sum_e v_e \hat{s}_e^P \right)^{1/P}, \quad (22)$$

v_e – відносний об'єм e -го елемента СЕ-сітки; s'_y – послаблена межа напруження.

Параметр c є параметром нормування (масштабування)

$$c^{(J)} = \alpha^{(J)} \frac{s_{\max}^{(J-1)}}{s_{\text{PN}}^{(J-1)}} + [1 - \alpha^{(J)}] \cdot c^{(J-1)}, \quad (23)$$

де $s_{\max}^{(J-1)}$ та $s_{\text{PN}}^{(J-1)}$ визначається з попередньої $J-1$ ітерації; $\alpha^{(J)}$ – коефіцієнт для зменшення коливань між ітераціями $c^{(J)}$ і $c^{(J-1)}$ ($0 < \alpha^{(J)} < 1$).

Окрім цього, автори роботи [18] з метою наближення проекту з обмеженням інтегральної міри напруженого стану (21) до проекту з

обмеженнями на локальні напруження (3), пропонують застосовувати m регіональних обмежень

$$\hat{s}_{\max_k} = \max_{e \in \Omega_k} (\hat{s}_e) \leq s'_{Y_k} \quad (k = \overline{1, m}),$$

де Ω_k – множина елементів k -го регіону (області) проектного простору.

Отже, на кожний регіон k накладається обмеження у формі нормованої P -норми, а саме:

$$s_{\max_k} \approx c_k s_{PN_k} \leq s'_{Y_k} \quad (k = \overline{1, m}),$$

де c_k обчислюється незалежно для кожного регіону з використанням (23), а s_{PN_k} отримується з (22) враховуючи лише скінченні елементи регіону k .

У наведеному в даній роботі чисельному прикладі використання нормованого обмеження напруження (21) з $P=4$ та $m=8$ демонструє більш рівномірний розподіл напруження деталі у порівнянні з проектом з мінімізацією піддатливості.

Нормування інтегральної міри напруженого стану на основі P -норми використано у статті [22], але формулювання умови міцності і інтегральної міри напруження включає відносну густину і подається так:

$$c_k s_{PN_k} = \left(\sum_{e \in \Omega_k} \rho_e \left(\frac{\hat{s}_e}{s'_Y} \right) \right)^{1/P} \leq 1 \quad (k = \overline{1, m}),$$

де ρ_e – відносна густина e -го елемента в області Ω_k .

В роботі [24] представлено ТО конструкції з використанням модифікованого методу корекції обмеження напруженого стану в залежності від функції P -норми та P -середнього. При цьому оптимізаційна задача полягає у мінімізації об'єму результату ТО за умови забезпечення його міцності у вигляді обмеження

$$c \cdot \left(\frac{1}{N_i} \sum_{e \in \Omega} \hat{s}_e^{P1} \right)^{1/P1} \leq 1.$$

Тут c – поправочний коефіцієнт, який визначається у формі

$c = s_{PN}^L / s_{PN}^U$, де міра s_{PN}^U називається «верхньою межею напруження

P -норми», а s_{PN}^L – «нижньою межею напруження P -норми»:

$$s_{PN}^U = \left(\frac{1}{N} \sum_{e \in \Omega} \hat{s}_e^{P1} \right)^{1/P1}; \quad s_{PN}^L = \left(\sum_{e \in \Omega} \hat{s}_e^{P2} \right)^{1/P2}.$$

Агрегатна функція s_{PN}^U застосовується для аналізу чутливості, а функція s_{PN}^L – як обмеження значень напружень.

Значення показника $P1$ функції s_{PN}^U прийнято рівним $P1=6$ на підставі аналізу її збіжності при різних $P1$. Для визначення $P2$ у роботі

[24] запропоновано підхід, згідн з яким у функції s_{PN}^L не враховуються найбільші шість значень обчислених механічних напружень, що забезпечує кращу збіжність результатів розрахунку. На підставі порівняння значень максимального напруження та сформованої таким чином функції s_{PN}^L , авторами [24] робиться висновок про вибір показника $P2$ таким, при якому вказані значення рівні (у статті $P2=8$).

Автори [24] вважають, що запропонований ними метод долає недоліки методу нормування роботи [18] – масштабний коефіцієнт c є наперед визначеним, а евристичний параметр α (17) відсутній.

У роботі [27] для задач ТО запропоновано при накладанні еквівалентного обмеження на значення максимального локального напруження використовувати корекцію інтегральної міри напруження у формі

$$\bar{s}_{KS} = cp \cdot s_{KS} \leq 1,$$

де cp – параметр корекції, а KS-функція має вигляд (15). Для J -ої ітерації оптимізації параметр корекції розраховується за формулою

$$cp^{(J)} = \frac{\max(s_e^{(J)})}{s_{KS}^{(J)}},$$

у якій використовуються значення інтегральної міри та максимального напруження на поточній ітерації, на відміну від параметра нормалізації роботи [18], де відповідні значення беруться з попередньої ітерації.

Для уникнення стрибкоподібної зміни параметра cp впродовж ітераційного процесу і, відповідно, поганої збіжності результату, автори [27] пропонують записувати параметр корекції у вигляді

$$cp^{(J)} = cp^{(J-1)} + q^{(J)} \left(\frac{\max(s_e^{(J)})}{s_{KS}^{(J)}} - cp^{(J-1)} \right),$$

де q – коефіцієнт керування ($0 < q < 1$).

Введена схема корекції напруження також може використовувати інтегральну нормовану міру напруженого стану формі P -норми:

$$s_{PN} = \left(\sum_e \hat{s}_e^P \right)^{1/P}.$$

Автори [27] стверджують, що запропонована схема обмежень заснована на точній корекції функції (KS-функції або функції P -норми) і дозволяє використовувати вказаний підхід в задачах оптимізації з мінімізацією об'єму. На думку авторів, зазначена міра на основі KS-функції забезпечує більш швидку збіжність оптимальної топології, ніж міра напруженого стану на основі функції P -норми.

Зазначимо, що у роботі [28] також було використано параметр нормування (23), але інтегральна міра s_{PM} визначалась на основі функції P -середнього з урахуванням підходу δ -релаксації.

7. Блочний критерій обмежень локальних напружень. В якості компромісу між обмеженням на механічні напруження в кожному елементі скінченно-елементної сітки (локальне обмеження) та обмеженням для певної інтегральної міри напруженого стану СЕ-моделі може бути застосований підхід групування локальних обмежень в декілька інтегральних мір. В літературі зустрічаються підходи збирання локальних обмежень у блоки, регіональні та кластерні підходи.

У статті [17], зокрема, запропоновано групувати скінченні елементи $e = \overline{1, N}$ у відносно невелику кількість K блоків (груп елементів) $\{B\}$ ($b = \overline{1, K}$) таким чином, щоб усі отримані блоки містили однакову кількість елементів, а елементи кожного блоку не були розрізненими. Локальні обмеження, що відповідають усім елементам кожного блоку, об'єднуються в одну нерівність:

$$G_{KS}^b(\rho) = \frac{1}{\mu} \ln \sum_{e \in B} \exp(\mu(\hat{s}_e - 1)) - \frac{1}{\mu} \ln(n) \leq 0,$$

де $n = N/K$ – кількість елементів у блоках.

У цій статті на прикладі для Γ -подібної області вказується, що отриманий на основі запропонованого підходу розв'язок з $\mu = 20$ і $K = 100$ досить добре збігається з аналітичним. Тут зазначається, що кількість блоків K і значення параметра μ відіграють набагато важливішу роль, ніж підхід, прийнятий для об'єднання елементів у блоки для розглянутої сітки.

Групування елементів за т.зв. регіонами застосовано також у роботі [18]. Для забезпечення кращого контролю локального напруження регіони не повинні бути пов'язані, а елементи, які складають кожен область, не повинні бути суміжними. Автори виявили, що прийом, названий ними «підходом переплетення», дає найкращі результати серед різних підходів у формуванні регіонів на основі фізичного розташування, розподілу напруження або певного зв'язку елементів та інше. Щоб визначити області «переплетення», елементи сортуються за рівнем напруження на поточній J -ій ітерації проектування:

$$\{e_1, e_2, \dots, e_N : \hat{s}_{e_1}^{(J)} \leq \hat{s}_{e_2}^{(J)} \leq \dots \leq \hat{s}_{e_N}^{(J)}\},$$

а потім формують регіони як набір напружень узятих зі зростаючої послідовності їх значень через певну кількість елементів. Тобто k -ий регіон це є послідовність

$$\Omega_k = \{e_k, e_{k+m}, e_{k+2m}, \dots\} \quad (k = \overline{1, m}).$$

У статті [21] представлено два підходи до сортування точок оцінки в кластери. У першому підході, який називається «кластеризацією рівня напружень», загальна кількість N точок оцінки напруження сортується в порядку спадання їхнього рівня напруження і розподіляється на n кластерів. Перші N/n точок створюють кластер 1, наступні N/n точок – кластер 2, і т.д. Останній кластер має найменшу кількість точок. Цей підхід дає великі

варіації різних значень інтегральних мір $s_{PN_k}(x)$, але в середині кожного кластера напруження максимально близькі один до одного. Як позитивний ефект вказується на те, що обмеження напружень для низькорівневих кластерів, у більшості задач, зрештою стають неактивними.

«Підхід розподіленого напруження» (другий підхід) збігається з підходом переплетення, наведеним у [18]. Така кластеризована міра напруження буде нижчою, ніж за умови використання першого підходу.

Результати розв'язання у [21] чисельних прикладів, в яких показник степеня P -норми приймався рівним 8, кількість кластерів дорівнювала 10, показали, що «підхід рівня напружень» і рекластеризація (оновлення кластерів на кожній ітерації) дають кращий локальний контроль напруження та більш рівномірний розподіл напруження ніж «підхід розподіленого напруження».

8. Мінімізація нерівномірності розподілу напруженого стану. У роботі [29] запропоновано альтернативну умову міцності для задач ТО, яка орієнтована на мінімізацію нерівномірності розподілу напруженого стану серед СЕ з ненульовою відносною густиною ($\rho_e > \rho_{\min}$). Зокрема, замість класичного критерію (3) ставиться задача пошуку мінімуму відношення

$$\|\hat{s} - \bar{s}\|_1 / \|\bar{s}\|_1 \rightarrow \min, \quad (24)$$

де \bar{s} – лінійна апроксимація впорядкованих значень $\hat{s}_e > 0$, коефіцієнти якої визначаються методом найменших квадратів; $\|f\|_1$ – норма вектора f у метриці L_1 ($\|f\|_1 = \sum_e |f_e|$).

З геометричної точки зору умова (24) означає мінімізацію відношення площі $\|\hat{s} - \bar{s}\|_1$ області між еквівалентними напруженнями \hat{s}_e і лінійною їх апроксимацією \bar{s}_e до площі трапеції $\|\bar{s}\|_1$ під прямою \bar{s}_e .

Автори [29] зазначають, що запропонований критерій (24) дозволяє зменшити вплив локальних пікових значень напружень на результат оптимізації і забезпечити кращу його рівномірність. До недоліків даного критерію автори відносять необхідність пошуку оптимального результату на усьому діапазоні можливих значень осередненої густини розрахункової області. У якості принципкових переваг запропонованого критерію зазначаються зменшена кількість вхідних даних, забезпечення кращої рівномірності оптимізованої топології і нечутливість результату до похибок у обчисленнях.

Висновки. Підвищений інтерес до розробки ефективних методів проектування деталей оптимальної топології з урахуванням умови її міцності, свідчить про актуальність цих теоретичних досліджень та важливе прикладне значення отриманих результатів.

При розв'язанні задач ТО з урахуванням обмеження на рівень напруженого стану однією з суттєвих проблем є локальний характер

напруження. Для вирішення цієї проблеми замість контролю напружень у кожній точці скінченно-елементної моделі деталі вводиться обмеження на певну інтегральну міру напруженого стану деталі, яка обчислюється із залученням певних агрегатних функцій. Зазначені функції мають бути гладкими та диференційованими. Їх використання дає можливість суттєво заощадити час розв'язання задачі ТО, зменшує обчислювальні витрати та забезпечити стійкість обчислювального процесу.

До найбільш поширених агрегатних функцій в задачах ТО слід віднести функції на основі P -норми та P -середнього. Наявні в літературі результати чисельних експериментів показали, що проекти з умовою міцності на основі P -норми близьки до проектів з мінімальною піддатливістю, а проекти з обмеженням у формі P -середнього займають проміжне місце між розв'язком з мінімальною піддатливістю та розв'язком з обмеженнями на локальні напруження. При цьому, агрегатні функції на основі P -середнього мають певні переваги, оскільки вони менш чутливі до параметра агрегації P та кількості аргументів, менш чутливі до розміру SE-сітки і дозволяють розширити область пошуку оптимального результату без різноманітних методів послаблення обмежень, що зменшує залежність розв'язку від додаткових коефіцієнтів. Окрім цього, з метою наближення результату оптимізації з обмеженням інтегральної міри напруженого стану до результату з обмеженнями на локальні напруження пропонується застосовувати т.зв. регіональні обмеження, а параметр агрегації P збільшувати при реалізації ітераційного процесу оптимізації.

У даній роботі також наведено стислий опис таких агрегатних функцій, як функція Крайсельмайера-Штайнхаузера, згладжена функція Гевісайда, міра перевищених напружень та міра нерівномірності розподілу напруженого стану.

Велика кількість наявних в літературі варіантів математичного формулювання обмежень для інтегральних мір напруженого стану проєктованих деталей свідчить про те, що питання розробки універсального та ефективного методу проєктування деталей з врахуванням критерію її міцності, як більш наближеного до інженерних практик проєктування, залишається відкритим. Той факт, що в багатьох публікаціях автори розглядають одночасно декілька варіантів обмежень на напружений стан і аналізують їх переваги та недоліки, лише ускладнює формулювання висновку про найбільш раціональний шлях пошуку універсального алгоритму. Тому при проєктуванні деталей з оптимальною топологією вважаємо, що доцільним є застосування декількох критеріїв з наступним уточненням розрахунком напружено-деформованого стану оптимізованої деталі. Перелік найбільш ефективних на даний час критеріїв і подано у даному огляді.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ / REFERENCES

1. *Bendsoe M. P.* Optimization of Structural Topology, Shape, And Material. – Berlin: Springer-Verlag, 1995. – 273 p. DOI: 10.1007/978-3-662-03115-5
2. *Sigmund O.* A 99 line topology optimization code written in Matlab // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2001. – Vol. 21, Iss. 2. – P. 120-127. DOI: 10.1007/s0015800501
3. *Bendsoe M. P., Sigmund O.* Topology optimization: theory, methods and applications. – Berlin: Springer-Verlag, 2004. – 370 p. DOI: 10.1007/978-3-662-05086-6_2.
4. *Andreassen E., Clausen A., Schevenels M., Lazarov B., Sigmund O.* Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code // Struct. Multidisc. Optim. – 2011. – Iss. 43. – P. 1-16. DOI: 10.1007/S00158-010-0594-7.
5. *Liu K., Tovar A.* An efficient 3D topology optimization code written in MatLab // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2014. – Vol. 50, Iss. 6. – P. 1175-1196. DOI: 10.1007/s00158-014-1107-x.
6. *Ferrari F., Sigmund O.* A new generation 99 line Matlab code for compliance topology optimization and its extension to 3D // Struct. Multidisc. Optim. – 2020. – Vol. 62, Iss. 4. – P. 2211-2228. DOI: 10.1007/s00158-020-02629-w.
7. *Huang X., Xie Y.M.* Evolutionary Topology Optimization of Continuum Structures: Methods and Applications. – John Wiley & Sons, Ltd, 2010. – 223 p. DOI:10.1002/9780470689486
8. *Duysinx P., Bendsoe M.P.* Topology optimization of continuum structures with local stress constraints // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. – 1998. –Vol. 43, Iss. 8. – P. 1453-1478. DOI: 10.1002/(SICI)1097-0207(19981230)43:8<1453::AID-NME480>3.0.CO;2-2.
9. *Duysinx P., Sigmund O.* New developments in handling stress constraints in optimal material distribution. Conference Paper. 7th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization. 1998. DOI: [10.2514/6.1998-4906](https://doi.org/10.2514/6.1998-4906).
10. *De Leon D.M., Alexandersen J., O. Fonseca J.S., Sigmund O.* Stress-constrained topology optimization for compliant mechanism design // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2015. – Vol. 52. – P. 929-943. DOI: 10.1007/S00158-015-1279-Z.
11. *Kim N., Dong T., Weinberg D.H., Dalidd J.* Generalized optimality criteria method for topology optimization // Appl. Sci. – 2021. – Iss. 11. – P. 3175. DOI: 10.3390/app11073175.
12. *Cheng G., Guo X.* ϵ -relaxed approach in structural topology optimization // Structural optimization. – 1997. – Vol. 13. – P. 258-266. DOI: 10.1007/BF01197454.
13. *Poon N.M.K., Martins J.R.R.A.* An adaptive approach to constraint aggregation using adjoint sensitivity analysis // Struct. Multidisc. Optim. – 2007. – Vol. 34. – P. 61-73. DOI: 10.1007/s00158-006-0061-7.
14. *Duysinx P., Miegroet L.V., Lemaire E., Bruls O., Bruyneel M.* Topology and generalized shape optimisation: why stress constraints are so important // Int. J. for Simulation and Multidisciplinary Design Optimization. – 2008. – Vol. 2. DOI: 10.1051/IJSMDO/2008034.
15. *Bruggi M.* On an alternative approach to stress constraints relaxation in topology optimization // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2008. – Vol. 36. – P. 125-141. DOI: 10.1007/S00158-007-0203-6.
16. *Paris J., Navarrina F., Colominas I., Casteleiro M.* Topology optimization of continuum structures with local and global stress constraints // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2009. – Vol. 39. – P. 419-437. DOI: 10.1007/S00158-008-0336-2.
17. *Paris J., Navarrina F., Colominas I., Casteleiro M.* Block aggregation of stress constraints in topology optimization of structures // Adv. Eng. Softw. – 2010. – Vol. 41, Iss. 3. – P. 433-441. DOI: 10.1016/j.advengsoft.2009.03.006.
18. *Le C.H., Norato J.A., Bruns T.E., Ha C., Tortorelli D.* Stress-based topology optimization for continua // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2010. – Vol. 41. – Iss. 4. – P. 605-620. DOI: 10.1007/S00158-009-0440-Y.
19. *Lee E., James K.A., Martins J.R.* Stress-constrained topology optimization with design-dependent loading // Structural and Multidisciplinary Optimization. – 2012. – Vol. 46. – P. 647-661. DOI: 10.1007/S00158-012-0780-X.

20. Luo Y., Wang M.Y., Kang Z. An enhanced aggregation method for topology optimization with local stress constraints // *Computer Methods in Appl. Mech. and Eng.* – 2013. – Vol. 254. – P. 31-41 DOI: 10.1016/j.cma.2012.10.019.
21. Holmberg E., Torstenfelt B., Klarbring A. Stress constrained topology optimization // *Struct. Multidisc. Optim.* – 2013. – Vol. 48, Iss. 1. – P. 33-47. DOI: 10.1007/s00158-012-0880-7.
22. Jeong S.H., Park S., Choi D., Yoon G.H. Toward a stress-based topology optimization procedure with indirect calculation of internal finite element information // *Comput. Math. Appl.* – 2013. – Vol. 66. – P. 1065-1081. DOI: 10.1016/j.camwa.2013.07.008.
23. Biyikli E., To A.C. Proportional topology optimization: A new non-sensitivity method for solving stress constrained and minimum compliance problems and its implementation in MATLAB // *PLoS ONE.* – 2015. – Vol. 10, Iss. 12. – P. e0145041. DOI: 10.1371/journal.pone.0145041.
24. Lee K.Y., Ahn K., Yoo J. A novel P-norm correction method for lightweight topology optimization under maximum stress constraints // *Computers & Structures.* – 2016. – Vol. 171. – P. 18-30. DOI: 10.1016/J.COMPSTRUC.2016.04.005.
25. Verbart A., Langelaar M., Keulen F.V. A unified aggregation and relaxation approach for stress-constrained topology optimization // *Structural and Multidisciplinary Optimization.* – 2017. – Vol. 55. – P. 663-679. DOI: 10.1007/S00158-016-1524-0.
26. Wang C., Qian X. Heaviside projection-based aggregation in stress-constrained topology optimization // *Int. J. for Numerical Methods in Engineering.* – 2018. – Vol. 115. – P. 849-871. DOI: 10.1002/nme.5828.
27. Yang D., Liu H., Zhang W., Li S.C. Stress-constrained topology optimization based on maximum stress measures // *Computers & Structures.* – 2018. – Vol. 198. – P. 23-39. DOI: 10.1016/J.COMPSTRUC.2018.01.008.
28. Da Silva G.A., Aage N., Beck A.T., Sigmund O. Local versus global stress constraint strategies in topology optimization: A comparative study // *Int. J. for Numerical Methods in Engineering.* – 2021. – Vol. 122. – P. 6003-6036. DOI: 10.1002/nme.6781.
29. Yanchevskiy I.V., Kryshchal V.F. Integral criterion of the non-uniformity of stress distribution for the topology optimization of 2D-models // *J. of Mech. Eng.* – 2021. – Vol. 24, Iss. 1. – P. 65-74. DOI: 10.15407/pmach2021.01.065.
30. Yang R., Chen C.J. Stress-based topology optimization // *Structural optimization.* – 1996. – Vol. 12. – P. 98-105. DOI: 10.1007/BF01196941.
31. Kiyono C.Y., Vatanabe S.L., Silva E., Reddy J. A new multi-p-norm formulation approach for stress-based topology optimization design // *Composite Structures.* – 2016. – Vol. 156. – P. 10-19. DOI: 10.1016/J.COMPSTRUCT.2016.05.058.
32. Lian H., Christiansen A.N., Tortorelli D.A., Sigmund O., Aage N. Combined shape and topology optimization for minimization of maximal von Mises stress // *Struct. Multidisc. Optim.* – 2017. – Vol. 55, Iss. 5. – P. 1541-1557. DOI: 10.1007/s00158-017-1656-x.
33. Deng H., Vulimiri P.S., To A.C. An efficient 146-line 3D sensitivity analysis code of stress-based topology optimization written in MATLAB // *Optimization and Engineering.* – 2021. – Vol. 23. – P. 1733-1757. DOI: 10.1007/s11081-021-09675-3.
34. Kranz M., Lüdeker J.K., Kriegesmann B. An empirical study on stress-based fail-safe topology optimization and multiple load path design // *Struct. Multidisc. Optim.* – 2021. – Vol. 64. – P. 2113-2134. DOI: 10.1007/s00158-021-02969-1.
35. Fernández E., Collet M., Alarcón P., Bauduin S., Duysinx P. An aggregation strategy of maximum size constraints in density-based topology optimization // *Structural and Multidisciplinary Optimization.* – 2019. – Vol. 60, Iss. 5. – P. 2113-2130. DOI: 10.1007/s00158-019-02313-8.
36. Kreisselmeier G., Steinhauser R. Systematic control design by optimizing a vector performance index // *Int. Federation of Active Controls Symposium on Computer-Aided Design of Control Systems, Zurich, Switzerland.* – 1979. – P. 113-117. DOI: 10.1016/B978-0-08-024488-4.50022-X.

Кришталь В.Ф., Янчевський І.В.

ОБМЕЖЕННЯ НА ІНТЕГРАЛЬНІ МІРИ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ В ЗАДАЧАХ ТОПОЛОГІЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ

Топологічною оптимізацією (ТО) називають обчислювальний метод визначення розподілу матеріалу у заданій області проєктування для створення оптимальної форми деталі при заданих граничних умовах. Підвищений інтерес до розробки ефективних методів проєктування деталей оптимальної топології свідчить про актуальність цих теоретичних досліджень та важливе прикладне значення отриманих результатів. В класичній постановці ТО у якості критерію пошуку зазначеного розподілу обрана мінімізація піддатливості деталі при обмеженнях на об'єм (масу) результату оптимізації. Більш наближеною до прикладного застосування є постановка задачі ТО, що передбачає мінімізацію об'єму деталі з урахуванням умови її міцності. Залучення агрегатних функцій для обчислення інтегральних мір напруженого стану має низку переваг над традиційною перевіркою максимального значення механічного напруження: суттєве заощадження часу розв'язання задачі ТО, зменшення обчислювальних витрат та забезпечення стійкості обчислювального процесу. У даній роботі представлені і проаналізовано спеціалізацію прикладного застосування агрегатних функцій, які отримали найбільше застосування в сучасних дослідженнях з питань ТО з урахуванням міцності оптимізованої деталі. Зокрема, описано функції Р-норми та Р-середнього, функції Крайсельмайера-Штайнхаузера, склажена функція Гевісайда, міра перевищених напружень та міра нерівномірності розподілу напруженого стану. Велика кількість наявних в літературі варіантів математичного формулювання обмежень для інтегральних мір напруженого стану проєктованих деталей свідчить про те, що питання розробки універсального та ефективного методу проєктування деталей з урахуванням критерію її міцності залишається відкритим.

Ключові слова: топологічна оптимізація, механічне напруження, інтегральна міра, агрегатні функції, скінченні елементи.

Kryshstal V.F., Yanchevskiy I.V.

CONSTRAINTS ON INTEGRAL MEASURES OF STRESS STATE IN TOPOLOGY OPTIMIZATION PROBLEMS

Topology optimization (TO) is a computational method of determining material distribution in a given design area to create the optimal shape of a part under given boundary conditions. The increased interest in the development of effective methods of designing parts of the optimal topology testifies to the relevance of these theoretical studies and the important applied value of the obtained results. In the classic formulation of maintenance, the minimization of the flexibility of the part under restrictions on the volume (mass) of the optimization result is chosen as a criterion for finding the specified distribution. Closer to practical application is the formulation of the maintenance problem, which involves minimizing the volume of the part, taking into account the condition of its strength. The inclusion of aggregate functions for the calculation of integral measures of the stress state has a number of advantages over the traditional check of the maximum value of mechanical stress: significant saving of time for solving the maintenance problem, reduction of computational costs and ensuring the stability of the computational process. This work presents and analyzes the specialization of the applied application of aggregate functions, which have been most widely used in modern research on maintenance issues, taking into account the strength of the optimized part. In particular, the P-norm and P-mean functions, the Kreiselmeyer-Steinhausner functions, the smoothed Heaviside function, the measure of exceeded stresses, and the measure of uneven distribution of the stress state are described. The large number of options available in the literature for the mathematical formulation of limitations for integral measures of the stress state of designed parts indicates that the issue of developing a universal and effective method of designing parts, taking into account the criterion of its strength, remains open.

Keywords: topology optimization, mechanical stress, integral measure, aggregate functions, finite elements.

УДК 629.01

Кришталь В.Ф., Янчевський І.В. Обмеження на інтегральні міри напруженого стану в задачах топологічної оптимізації // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2023. – Вип. 110. – С. 207-228.

Представлені агрегатні функції, які отримали найбільше застосування в сучасних дослідженнях з питань топологічної оптимізації з урахуванням міцності оптимізованої деталі.

Табл. 0. Лл. 2. Бібліогр. 36 назв.

UDC 629.01

Kryshstal V.F., Yanchevskiy I.V. Constraints on integral measures of stress state in topology optimization problems // Strength of Materials and Theory of Structures: Science-and-technical collected articles. – Kyiv: KNUBA, 2023. – Issue 110. – P. 207-228.

Aggregate functions are presented, which have been most widely used in modern research on topology optimization, taking into account the strength of the optimizing part.

Tabl. 0. Figs. 2. Refs. 36.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент кафедри динаміки і міцності машин та опору матеріалів КРИШТАЛЬ Володимир Федорович.

Адреса робоча: 03056, Україна, м. Київ-56, пр. Перемоги, 37, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», КРИШТАЛЮ Володимир Федоровичу.

Роб. тел.: + 38 (044) 204-95-35;

E-mail: v.kryshstal@kpi.ua

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-5597-2435>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор фізико-математичних наук, професор кафедри динаміки і міцності машин та опору матеріалів ЯНЧЕВСЬКИЙ Ігор Владиславович.

Адреса робоча: 03056, Україна, м. Київ-56, пр. Перемоги, 37, Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського», ЯНЧЕВСЬКОМУ Ігорю Владиславовичу.

Роб. тел.: + 38 (044) 204-95-35;

E-mail: i.yanchevskiy@kpi.ua

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0002-7113-2276>