

УДК 539.4

## ПРО ВИКОРИСТАННЯ КРИТЕРІЇВ МІЦНОСТІ АНІЗОТРОПНИХ МАТЕРІАЛІВ

**С.О. Пискунов,**  
д-р техн. наук, професор

**Т.А. Бахтваршов**

**К.І. Самофал**

*Національний технічний університет України  
«Київський політехнічний інститут ім. Ігоря Сікорського»  
03056, м.Київ, Берестейський просп., 37*

DOI: 10.32347/2410-2547.2023.110.496-506

Проведено огляд критеріїв міцності анізотропних матеріалів і даних про достовірність їх застосування при визначенні задач несучої здатності композитних матеріалів. Наведені дані свідчать, що для адекватного вибору критерію міцності необхідно урахувати структуру матеріалу, розглядаючи окремо шаруваті і армовані композиційні матеріали, вид напруженого стану та характер прикладання навантаження (стале або циклічне).

Ключові слова: композитні матеріали, анізотропія, критерії міцності, руйнування.

**Вступ.** Композитні матеріали набувають все більш широкого застосування в різних галузях техніки, що обумовлено їх високою ефективністю з точки зору забезпечення міцності і співвідношення ваги конструкцій до величин корисного навантаження на неї. Однією з відмінних властивостей композитних матеріалів є їх анізотропія, що дозволяє, зокрема, максимально використовувати їх міцнісні властивості. Завдяки новим технологіям, зокрема 3-D друку, з'являються нові можливості цілеспрямованого формування структури композитних матеріалів і їх властивостей. Важливим питанням при цьому є забезпечення міцності, яка визначається в залежності від структури композиту в цілому та механічних характеристик його окремих компонентів.

Відомі критерії міцності ґрунтуються на значній кількості експериментальних випробувань та теоретичних досліджень. Більшість з них, які передбачають однакові властивості матеріалів в умовах стиску і розтягу одержано шляхом узагальнення класичних теорій міцності і пластичності ізотропних тіл. До таких критеріїв відносяться критерії Гольденблата-Копнова, Мізеса-Хілла, Норіса-Мак-Кінена, Маріна-Ху, Фішера та інші. В роботі [9] розроблено критерій міцності анізотропних пластичних матеріалів, окремими випадками якого є умови Мізеса-Хілла і Кулона для анізотропних тіл [8]. Варто зауважити, що розробка критеріїв міцності анізотропних матеріалів інтенсивно триває впродовж останніх 50 років, що відображено у статті [14].

Перелік і огляд перелічених та інших критеріїв і певні загальні рекомендації щодо їх використання наведені, наприклад, в роботах [11,

14]. В статті [14] також виконана певна класифікація критеріїв на основі величин, що становлять основу для формування критеріальних виразів і проведений аналіз можливостей, переваг і недоліків критеріїв.

Загальні питання міцності композитних матеріалів, і, зокрема побудови критеріїв їх несучої здатності при статичних і циклічних навантаженнях розглянуті у [4].

Порівняння розрахункових і експериментальних результатів свідчать, що розрахунки, отримані на основі відомих критеріїв граничного стану, як правило, добре узгоджуються з експериментальними даними в певній області напружених станів і тільки для певної групи матеріалів [8], зокрема структури матеріалу. Так, при виборі критерію міцності, з точки зору структури варто розглядати окремо шаруваті і армовані композиційні матеріали, а з точки зору навантаження – статичний або циклічний характер його прикладання.

В даній роботі проведено огляд відомих критеріїв міцності анізотропних матеріалів і аналізу достовірності їх використання при тих чи інших умовах. При цьому, додатково до класифікації критеріїв, запропонованої у [14] в даній роботі проведено розділення критеріїв в залежності від урахування ними пошкоджень матеріалу, накопичених під дією навантажень.

**Критерії міцності непошкоджених анізотропних матеріалів.** При прикладанні сталих навантажень вибір критеріїв обумовлюється насамперед структурою матеріалів та урахуванням в критеріальному виразі різного опору матеріалу розтягу і стиску.

У випадку шаруватих композиційних матеріалів (КМ) оцінка міцності здійснюється із використанням двох підходів. Перший ґрунтується на проведених оцінках міцності кожного шару та відповідного висновку про міцність всього пакету. Другий передбачає визначення міцності всього пакету шарів при його розгляді як умовно однорідного анізотропного матеріалу із деякими характеристиками міцності [7]. Найбільш розповсюдженими в таких оцінках є критерії Мізеса і Гольденבלата-Копнова.

Критерій Мізеса-Хілла в загальному випадку тривимірного напруженого стану має вигляд:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{xxa}^2} + \frac{1}{\sigma_{yya}^2} - \frac{1}{\sigma_{zza}^2} \right) (\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{yya}^2} + \frac{1}{\sigma_{zza}^2} - \frac{1}{\sigma_{xxa}^2} \right) \times \\ & \times (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{zza}^2} + \frac{1}{\sigma_{xxa}^2} - \frac{1}{\sigma_{yya}^2} \right) (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + \\ & + \frac{1}{\tau_{xya}^2} \tau_{xy}^2 + \frac{1}{\tau_{yza}^2} \tau_{yz}^2 + \frac{1}{\tau_{xza}^2} \tau_{xz}^2 = 1, \end{aligned}$$

де тут і далі  $\sigma_{ii}$  і  $\tau_{ij}$  – діючі компоненти напружень, в напрямках, що збігаються з вісями  $i$  і  $j$ ,  $\sigma_{iia}$  і  $\tau_{ija}$  – величини межі міцності на розтяг вздовж вісі  $i$  та межа міцності при зсуві в площині  $iOj$  відповідно.

Зауважимо, що позначення, використані в даній статті для діючих компонент напружень і механічних характеристик композитного матеріалу, подекуди не збігаються з оригінальними, що використані у наукових публікаціях, на які зроблені відповідні посилання. На наш погляд це дозволяє скласти краще уявлення про використання та урахування в критеріальних виразах тих чи інших характеристик матеріалу.

Для односпрямованих волокнистих композитних матеріалів при плоскому напруженому стані цей вираз може бути спрощений і використаний у вигляді [6]:

$$\frac{\sigma_{xx}^2}{\sigma_{xxa}^2} - \frac{\sigma_{xx}\sigma_{yy}}{\sigma_{xxa}^2} + \frac{\sigma_{yy}^2}{\sigma_{yya}^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{\tau_{xya}^2} = 1.$$

Зауважимо, що цей критерій не ураховує різних опір матеріалу розтягу і стиску. Разом з тим в певних випадках він дозволяє описати несучу здатність волокнистого армованого композитного матеріалу в доволі широкому діапазоні зміни характеристик армування. Це, зокрема, показано в роботі [17], де показано задовільний збіг результатів з експериментальними даними в умовах розтягу для композитного матеріалу, виготовленого шляхом 3-D друку при різних кутах орієнтації армуючого графітного волокна (0°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°, 90°) та із різними товщинами шару. Зважаючи на необхідність урахування розташування армуючих волокон, зазначений критерій в цій публікації було використано у вигляді:

$$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_{1ap}^2} + \frac{\sigma_2^2}{\sigma_{2ap}^2} - \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sigma_{1ap}^2} + \frac{\tau_{12}^2}{\tau_{12a}^2} = 1,$$

де  $\sigma_1, \sigma_2, \tau_{12}$  – напруження, що виникають в системі координат, прив'язаній до кута армування композиту і орієнтованій під кутом до напрямку діючого розтягу чого напруження.

Ще одним критерієм міцності, який передбачає однакові межі міцності матеріалу на розтяг і стиск є критерій Фішера, який додатково ураховує різні деформаційні властивості матеріалу у різних напрямках завдяки введенню в рівняння відповідних констант – модуля пружності і коефіцієнта Пуассона [15]:

$$\frac{\sigma_{xx}^2}{\sigma_{xxa}^2} - \frac{1}{2}K \frac{\sigma_{xx}\sigma_{yy}}{\sigma_{xxa}\sigma_{yya}} + \frac{\sigma_{yy}^2}{\sigma_{yya}^2} + \frac{\tau_{xy}^2}{\tau_{xya}^2} = 1,$$

$$K = \frac{E_x(1 + \mu_{yx}) + E_y(1 + \mu_{xy})}{\sqrt{E_x E_y (1 + \mu_{yx})(1 + \mu_{xy})}}.$$

Цей критерій надає занижені значення руйнуючих напружень, а отже забезпечує певний запас міцності.

Для більшості сучасних композитних матеріалів умова рівноміцності при розтягу і стиску виконується доволі рідко. Крім наведених вище до таких критеріїв відноситься ще критерій Ашкеназі [1]. Такі критерії

скоріше використовуються для розв'язання задач міцності композитів при однорідному напруженому стані. Більшого практичного застосування набули критерії, що ураховують різний опір композитного матеріалу розтягу і стиску.

Узагальненням критерію Мізеса-Хілла для цього випадку є критерій О. Хофмана [16], який для випадку плоского напруженого стану має вигляд:

$$\frac{(\sigma_{xx}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy})}{\sigma_{xxap}\sigma_{xxac}} + \frac{\sigma_{yy}^2}{\sigma_{xxap}\sigma_{xxac}} + \frac{(\sigma_{xxac} - \sigma_{xxap})\sigma_{xx}}{\sigma_{xxap}\sigma_{xxac}} + \frac{(\sigma_{yyac} - \sigma_{yyap})\sigma_{xx}}{\sigma_{yyap}\sigma_{yyac}} + \frac{\tau_{xy}^2}{\tau_{xya}^2} = 1,$$

де, додатково до раніше застосованих позначень, зокрема індексу «*a*», що відзначає величини межі міцності, індекс «*p*» або «*c*» при компонентах нормальних напружень відзначає межу міцності при розтягу або стиску відповідно вздовж вісі *i*.

Критерій Гольденבלата-Копнова [5] у розгорнутій формі має вигляд:

$$P_{11}\sigma_{11} + P_{22}\sigma_{22} + P_{33}\sigma_{33} + (P_{1111}\sigma_{11}^2 + P_{2222}\sigma_{22}^2 + P_{3333}\sigma_{33}^2 + P_{1122}\sigma_{11}\sigma_{22} + P_{1133}\sigma_{11}\sigma_{33} + P_{2233}\sigma_{22}\sigma_{33} + 4P_{1212}\tau_{12}^2 + 4P_{1313}\tau_{13}^2 + 4P_{2323}\tau_{23}^2)^{1/2} - 1 = 0,$$

де  $P_{ij}$  і  $P_{ijkl}$  – компоненти тензорів міцності, які визначаються за формулами:

$$P_{ii} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sigma_{iiap}} - \frac{1}{\sigma_{iiac}} \right); \quad P_{iii} = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{\sigma_{iiap}} + \frac{1}{\sigma_{iiac}} \right); \quad P_{ijj} = \frac{1}{4\tau_{ij}^2};$$

$$P_{ijij} = \frac{1}{8} \left[ \left( \frac{1}{\sigma_{iiap}} + \frac{1}{\sigma_{iiac}} \right)^2 + \left( \frac{1}{\sigma_{jjap}} + \frac{1}{\sigma_{jjac}} \right)^2 - \left( \frac{1}{\tau_{ija45}} + \frac{1}{\tau_{ija45}} \right)^2 \right],$$

де  $\tau_{ija45}$  і  $\overline{\tau_{ija45}}$  – межі міцності при зсуві в основному і діагональному напрямках.

При використанні цього критерію для оцінки міцності пакету шарів в якості напружень і меж міцності вздовж координат використовують усереднені значення діючих і руйнуючих напружень в пакеті. При пошаровій оцінці міцності матеріалу ці напруження потрібно розглядати в місцевій системі координат кожного шару, яка пов'язана з напрямком його армування і повернута на певний кут відносно основної системи координат. Проведене в роботі [7] співставлення форм межових кривих для пакету і внутрішньої огинаючої межових кривих для шарів, отриманих за цими двома критеріями свідчить, що у випадку використання критерію Мізеса-Хілла спостерігається значна відмінність, яка є максимальною для

структури, отриманої при повороті шарів на  $45^\circ$ . Критерій Гольденבלата-Копнова забезпечує набагато кращий збіг, а для структури з поворотом шарів на  $45^\circ$  зазначені криві збігаються. Це обумовлено урахуванням у критерії Гольденבלата-Копнова двох додаткових характеристик міцності при зсуві матеріалу, повернутого на кут  $45^\circ$ . В той же час в статті відзначено, при завантаженні нормальними напруженнями лише в одному напрямку і зсувом, результати добре узгоджуються при використанні обидвох зазначених критеріїв.

Ще один критерій, який дозволяє урахувати різний опір композиційного матеріалу розтягу і стиску – критерій [18]:

$$\begin{aligned} & \sigma_{xx} \left( \frac{1}{\sigma_{xxap}} - \frac{1}{\sigma_{xxac}} \right) + \sigma_{yy} \left( \frac{1}{\sigma_{yyap}} - \frac{1}{\sigma_{yyac}} \right) + \sigma_{zz} \left( \frac{1}{\sigma_{zzap}} - \frac{1}{\sigma_{zzac}} \right) + \\ & + \frac{\sigma_{xx}^2}{\sigma_{xxap}\sigma_{xxac}} + \frac{\sigma_{yy}^2}{\sigma_{yyap}\sigma_{yyac}} + \frac{\sigma_{zz}^2}{\sigma_{zzap}\sigma_{zzac}} + \frac{\tau_{xy}^2}{\tau_{xya}^2} + \frac{\tau_{xz}^2}{\tau_{xza}^2} + \frac{\tau_{yz}^2}{\tau_{yza}^2} - \\ & - F_{xy}\sigma_{xx}\sigma_{yy} - F_{xz}\sigma_{xx}\sigma_{zz} - F_{yz}\sigma_{yy}\sigma_{zz} = 1, \end{aligned}$$

де  $F_{ij} = 1/\sqrt{\sigma_{iiaap}\sigma_{iiaac}\sigma_{jjap}\sigma_{jjac}}$ ,  $i, j = x, y, z$ ,  $i \neq j$ .

Заміною константи  $F_{ij}$  на інший, дещо складніший вираз вигляду

$$F_{ij} = \frac{1}{\sigma_{iiaap}\sigma_{iiaac}} + \frac{1}{\sigma_{jjap}\sigma_{jjac}} - \frac{\sigma_{iiaap}\sigma_{iiaac}\sigma_{jjap}\sigma_{jjac}}{\sigma_{xxap}\sigma_{xxac}\sigma_{yyap}\sigma_{yyac}\sigma_{zzap}\sigma_{zzac}},$$

$i, j = x, y, z$ ,  $i \neq j$

на основі виразу критерію Цая-Ву можна отримати вираз для критерію Хофмана.

В статті [13] два останніх співвідношення записані в циліндричній системі координат, що обумовлено особливістю форми розглядуваного об'єкта (композитних циліндрів). Тут відповідні характеристики напруженого стану і міцності взяті в декартовій системі координат. В зазначеній статті проведено аналіз можливостей використання і критеріїв Цая-Ву, Хофмана, Ашкеназі, а також запропонованого авторами модифікованого критерію, який додатково ураховує напруження розтягу під кутом  $45^\circ$  до головних вісей анізотропії. Сформульовано низку правил, яких потрібно дотримуватись, обираючи критерій міцності для композиту. Зокрема відзначено, що для деяких матеріалів жоден з чотирьох проаналізованих критеріїв не є придатним, а в деяких випадках, навіть при задовільненні декількох критеріям сформульованим правилам, отримані з їх використання результати можуть відрізнятись в декілька разів.

Ще один критерій, наведений в статті [14] і названий авторами «Northwestern University (NU) criteria» (згідно назви установи, де він був розроблений у 2008 р.) ураховує різний характер руйнування матеріалу внаслідок різного співвідношення між діючими в різних напрямках напруженнями і формулюється у вигляді серії виразів, які мають однакову структуру, а конкретизація залежить від вигляду напруженого

стану. Наприклад, для випадку трансверсального руйнування ( $|\sigma_{22}| \geq |\sigma_{33}|$ ) з переважною дією розтягу ( $|\sigma_{22}| \geq |\tau_{12}|$  або  $|\sigma_{22}| \geq |\tau_{23}|$  та  $\sigma_{22} \geq 0$ ) пропонується наступний вираз:

$$F_{2t} = \frac{\sigma_{22}}{\sigma_{22ap}} + \left( \frac{E_{22}}{2G_{12}} \right)^2 \left( \frac{\tau_{12}}{\sigma_{22ap}} \right)^2 + \left( \frac{E_{22}}{2G_{23}} \right)^2 \left( \frac{\tau_{23}}{\sigma_{22ap}} \right)^2 \leq 1.$$

Аналогічно сформульовані критеріальні рівняння для переважної дії стиску та зсуву у різних напрямках. Відзначається, що цей критерій має доволі прості вирази, дозволяє урахувати взаємодію між нормальними та зсувними напруженнями в площині, але дає консервативний прогноз руйнування волокон і матриці при розтягу.

Різноманітність та частота використання в практичних застосуваннях критеріїв міцності анізотропних матеріалів проаналізована в статті [11]. Найбільш згадуваними, згідно здійсненому автором аналізу даних, наведених у Google Scholar, є критерії Прагера, Ву, Цай-Ву та Хоффмана, решта критеріїв мають істотно менше застосування. При розгляді критеріїв автори звертають увагу на здатність критеріїв до опису двох груп матеріалів – зі слабкою асиметрією та зі сильною асиметрією характеристик міцності. Загалом в статті проаналізовано критерії міцності Ашкеназі, Мізеса, Маріна-Ху, Прагера, Норіса-Мак-Кінена, Хілла, Хілла-Цая, Цая-Ву, Хоффмана, Норріса, Фішера, Захарова, Малмейстера та Гольденבלата-Копнова. За результатами такого аналізу встановлено, що умови міцності для матеріалів зі слабкою асиметрією меж міцності у напрямках структурної симетрії (зокрема Мізеса, Маріна-Ху, Норіса-Мак-Кінена, Хілла, Фішера) є непридатними для опису поверхонь міцності матеріалів зі сильною асиметрією меж міцності, які добре апроксимуються зокрема критерієм Гольденבלата-Копнова [11]. Там також відзначається також, що у випадку складного напруженого стану і загальної різноспрямованої анізотропії властивостей можна сформулювати критерій, який описується поліноміальними рівняннями другого та вищих степенів:

$$\sum_{i,k} L_{ik} \sigma_{ik} + \sum_{i,k,n,m} L_{iknm} \sigma_{ik} \sigma_{nm} + \sum_{i,k,n,m,p,q} L_{iknmpq} \sigma_{ik} \sigma_{nm} \sigma_{pq} - 1 = 0,$$

де  $L_{ik}$ ,  $L_{iknm}$ ,  $L_{iknmpq}$  – компоненти тензорів міцності другого, четвертого або восьмого рангів відповідно.

Практична реалізація такого рівняння має істотні складнощі, які збільшуються зі зростанням ступенем полінома і обумовлено зростанням кількості коефіцієнтів (компонентів тензорів міцності) при компонентах тензора напружень. Так, при використанні поліномів першого степеня необхідно визначити шість коефіцієнтів, а для поліномів другого, третього та четвертого степенів відповідно 42, 258 та 1554 коефіцієнти [3].

**Критерії міцності композитних матеріалів, побудовані з урахуванням накопичення пошкоджень.** Одним з шляхів побудови критерію міцності, який ураховує зміну фізико-механічних властивостей матеріалу, яка може відбуватись як під дією статичних так і циклічних

навантажень, є концепція ефективних напружень, які змінюються з часом внаслідок накопичення пошкодженості матеріалу. Ця концепція, сформульована первісно стосовно задач повзучості в роботах Л.Качанова та Ю.Работнова (наприклад [12]), передбачає введення до розгляду ефективних напружень  $\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}/(1-D)$ , які пов'язуються з дійсними напруженнями із використанням параметра пошкодженості  $D$ , що змінюється в ході деформування від 0 до 1. Ці підходи, що склали окремий розділ механіки деформівного твердого тіла – механіку континуального руйнування – отримали ґрунтовне експериментальне підтвердження і розповсюджені на широке коло задач деформування і руйнування однорідних ізотропних матеріалів при дії статичних і циклічних навантажень, а також на задачі, що потребують урахування анізотропії накопичення пошкоджень в умовах складного напруженого стану.

В статті [2] показано, що на сьогодні відсутній метод прогнозування стадії розсіяного руйнування композиційних матеріалів з урахуванням анізотропії механічних властивостей, а також не обґрунтовано вибір параметра пошкоджуваності. Для вибору і обґрунтування критерію руйнування з врахуванням параметрів пошкоджуваності та анізотропії використано феноменологічний підхід та основні положення термодинаміки незворотніх процесів і параметр пошкоджуваності Качанова-Работнова. Проведено порівняння двох енергетичних підходів, які базуються на гіпотезі додаткових напружень та термодинаміки незворотніх процесів. На основі проведеного комплексу експериментальних досліджень для пропорційних та непропорційних траєкторій циклічного навантаження в умовах плоского напруженого стану встановлено рівноцінність цих підходів для прогнозування міцності. Показано, що для розрахунку довговічності елементів конструкцій необхідно враховувати порогове значення параметра пошкоджуваності на рівні границі витривалості композитного матеріалу та сформульовано вирази для критерію Мізеса, але з урахуванням параметра пошкодженості матеріалу.

В роботі [10], використовуючи припущення про зв'язок швидкості накопичення пошкодженості з енергією деформування, для випадку багаточиклового навантаження запропоновано записати кінетичне рівняння пошкодженості у наступному вигляді:

$$\frac{dD}{dN} = m \cdot k(R) \cdot (W_{e\max})^n = m \cdot k(R) \cdot \left( \frac{1}{2} \frac{\sigma_{ij}}{(1-D)} \varepsilon_{ij} \right)^n = m \cdot k(R) \cdot \left( \frac{C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{ij}}{2(1-D)} \right)^n,$$

де  $m$  і  $n$  – константи матеріалу, які визначаються за результатами експериментальних випробувань на втомне руйнування і залежать в тому числі від структури композита, зокрема способу його армування і орієнтації армування відносно напрямку діючого навантаження;  $N$  – кількість циклів навантаження,  $k(R)$  – функція, яка залежить від

параметру цикла  $R = \sigma_{1 \min} / \sigma_{1 \max}$ , для симетричного циклу  $k(R) = 1$ ;

$C_{ijkl}$  – тензор пружних констант непошкодженого композиту.

Отримане таким чином рівняння пошкодженості може бути проінтегровано чисельно або в замкненому вигляді, що дозволить визначити кількість циклів до руйнування  $N$ .

**Висновки.** Питання вибору критеріїв міцності для анізотропних матеріалів не має єдиного універсального вирішення. Разом з тим, накопичений впродовж тривалого часу досвід дозволив сформулювати низку рекомендацій, наприклад [11, 14]. При цьому спеціальна експериментальна і розрахункова перевірка є потрібною для часткових випадків. Зважаючи на значну кількість критеріїв для випадку статичних навантажень, для здійснення кінцевих висновків про несучу здатність композиту варто проводити оцінку за декількома критеріями і обирати найбільш консервативний результат. Цей підхід є доцільним також і зважаючи на те, що переважна частина критеріїв, використовуваних в розрахунковій практиці не ураховують накопичення пошкоджень, які можуть суттєво зменшувати показники міцності. Розробка таких критеріїв потребує проведення додаткових спеціальних експериментальних досліджень, але є перспективною з точки зору уточнення отримуваних висновків щодо несучої здатності виробів з композитних матеріалів при різному характері прикладання зовнішніх навантажень.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ашкенази Е.К., Ганов Э.В.* Анизотропия конструкционных материалов. Справочник. – Л. Машиностроение, 1980. – 247 с.
2. *Бобир М.І.* Критерій граничного стану композиційних матеріалів // *Mechanics and Advanced Technologies.* – 2022. – Vol. 6, No. 3. – P.229-236.
3. *Божидарник В.В., Сулим Г.Т.* Елементи теорії пластичності та міцності. – Львів, Світ. – 1999.
4. *Божидарник В.В., Андрейків О.Е., Сулим Г.Т.* Механіка руйнування, міцність і довговічність неперервно армованих композитів: монографія у 2-х т. – Львів, 2007.
5. *Гольденблат І.І., Коппов В. А., Бажанов В.Л.* Длительная прочность в машиностроении. – М.: Машиностроение, 1977. – 460 с.
6. *Гребенюк С.Н. Мелашенко О.П.* Использование различных критериев для оценки прочности волокнистых композитов // *Збірник наукових праць Харківського університету Повітряних Сил.* – 2012, Випуск 3(32). – С.134-136.
7. *Карпов Я.С., Ставиченко В.Г.* Сравнительный анализ подходов к оценке прочности слоистых композиционных материалов // *Проблемы прочности.* – 2008, № 4. – С.36-42.
8. *Ковальчук Б.І., Кулік О.В.* Критерій граничного стану пластичних анізотропних // *Вісник КПІ: серія «Машинобудування».* - № 63, 2011. – С.6-9.
9. *Лебедев А.А., Ковальчук Б. И., Гигиняк Ф. Ф., Ламашевский В. П.* Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии / Под общ. ред. А. А. Лебедева. - Киев: Издательский дом «Ин Юре», 2003. - 540 с.
10. *Моваггар А., Львов Г.И.* Энергетическая модель усталостной прочности композиционных материалов // Тематический выпуск Вестника НТУ «ХПИ» «Динамика и прочность машин». – Х.: НТУ «ХПИ», 2010. – № 37. – С. 111-122.
11. *Поберейко С.Б., Яковенко А.А., Мисик М.М., Куцинець Ю.П.* Порівняльний аналіз результатів теоретичних досліджень граничного напруженого стану анізотропних матеріалів // *Науковий вісник НЛТУ.* – №27(9) – С.128-132.
12. *Работнов Ю.Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М: Наука, 1966. – 752 с.



13. *Ромащенко В.А.* Оценка прочности композитных и металлокомпозитных цилиндров при импульсном нагружении. Сообщение 1. Правила выбора и сравнительный анализ различных критериев прочности анизотропных материалов // Проблемы прочности. – 2012. – №4. – С.42-57.
14. *Чжэн Цз., Махарадж К., Лю Цз., Чай Х., Лю Х., Деар Дж. П.* Сравнительное изучение критериев разрушения для предсказания начала повреждения в волокнисто-армированных композитах // Механика композитных материалов.— 2022. — Т. 58, № 1. — С. 175—196.
15. *Fisher H.* How to predict structural behavior of R.P. Laminates. – Mod. Plast., 1960. – № 6. – P. 65-68.
16. *Onkar A. K., Upadhyay C. S., and Yadav D.* Probabilistic failure of laminated composite plates using the stochastic finite element method // Comp. Struct. – 2007. – 77. – P. 79 – 91.
17. *Shukaev S., Rubashevskiy V.* Effect of constructive parameters on tensile strength of 3D-printed PLA-graphite composite // ACTA TECHNICA NAPOCENSIS-Series: APPLIED MATHEMATICS, MECHANICS, and ENGINEERING. – Vol.65. – 2022. – P.239-244.
18. *Tsai S.W., Wu E.M.* A general theory of strength for anisotropic materials // J.Comp.Mater. – 1971 – Vol.5. – P.58-80.

## REFERENCES

1. *Ashkenazy Ye.K., Hanov E.V.* Anizotropiya konstruktsionnykh materialov. Spravochnik. [Anisotropy of structural materials. Directory]– L. Mashynostroenyie, 1980. – 247 p. [in Russian].
2. *Bobyry M.I.* Kryterii hranychnoho stanu kompozytsiynykh materialiv [Criterion of the limit state of composite materials] // Mechanics and Advanced Technologies. – 2022. – Vol. 6, No. 3. – P.229-236 [in Ukrainian].
3. *Bozhydarnyk V.V., Sulym H.T.* Elementy teorii plastychnosti ta mitsnosti. [Elements of the theory of plasticity and strength]– Lviv, Svit. – 1999. [in Ukrainian].
4. *Bozhydarnyk V.V., Andreikiv O.E., Sulym H.T.* Mekhanika ruinovannia, mitsnist i dovhovichnist neperverno armovanykh kompozytiv: monohrafiia.[ Fracture mechanics, strength and durability of permanently reinforced composites: monograph] – Lviv, 2007. [in Ukrainian].
5. *Goldenblat, I. I., Bazhanov, V. L., Kopnov, V. A.* Dlitelnaya prochnost v mashinostroyenii [Long-term strength in mechanical engineering]. – Moscow: Mashinostroyeniye, 1977. – 460 p. [in Russian].
6. *Hrebeniuk S.N., Melashchenko O.P.* Yspolzovaye razlychnykh kryteryev dlia otsenky prochnosti voloknystikh kompozytov [Using of Different Criteria to Evaluate the Strength of Fiber Composites] // Collection of scientific works of Kharkiv Air Force University. – 2012, Issue 3(32). – P.134-136. [in Russian].
7. *Karpov Ya.S., Stavychenko V.H.* Sravnytelnyi analiz podkhodov k otsenke prochnosti sloystykh kompozytsionnykh materialov [Comparative analysis of approaches to assessing the strength of layered composite materials] // Strength of materials. – 2008, № 4. – PP.36-42. [in Russian].
8. *Kovalchuk B.I., Kulik O.V.* Kryterii hranychnoho stanu plastychnykh anizotropnykh materialiv [Criterion of the limiting state of plastic anisotropy materials] // Bulletin of KPI: "Mechanical Engineering" series. - No. 63, 2011. – PP.6-9. [in Russian].
9. *Lebedev A.A., Kovalchuk B. Y., Hyhyniak F. F., Lamashevskiy V. P.* Mekhanycheskiye svoystva konstruktsionnykh materialov pry slozhnom napriazhenom sostoianny [Mechanical properties of structural materials under complex stress state ] / Under the municipality ed. A. A. Lebedev. - Kyiv: "In Yure" Publishing House, 2003. – 540 p. [in Russian].
10. *Movahhar A., Lvov H.Y.* Enerhetycheskaia model ustalostnoi prochnosti kompozytsionnykh materialov [Energy model of fatigue strength of composite materials] // Thematic issue of the Bulletin of the NTU "Khpy" "Dynamics and strength of machines". – Kh.: NTU "Khpy", 2010. – No.37. – PP. 111-122. [in Russian].
11. *Pobereiko S.B., Yakovenko A.A., Mysyk M.M., Kunynets Yu.P.* Porvniialnyi analiz rezul'tativ teoretychnykh doslidzhen hranychnoho napruzhenoho stanu anizotropnykh materialiv [Comparative analysis of the results of theoretical studies of the ultimate stress state of anisotropic materials] // Scientific Bulletin of UNFU – No. 27(9). - P. 128-132. [in Russian].
12. *Rabotnov Yu.N.* Polzuchest elementov konstruktsyi [Creep of structural elements].– Moscow: Nauka, 1966. – 752 p. [in Russian].

13. Romashchenko V.A. Otsenka prochnosti kompozytnykh y metallokompozytnykh tsylindrov pry ympulsnom nahruzhenyy. Soobshchenye 1. Pravyla vybora y sravnytelnyi analiz razlychnykh kryteryev prochnosti anizotropnykh materyalov [Evaluation of the strength of composite and metal-composite cylinders under impulse loading. Message 1. Selection rules and comparative analysis of various strength criteria of anisotropy materials] // Strength of materials. - 2012. - №4. - PP.42-57. [in Russian].
14. Zheng J., Maharaj C., Liu J., Chai H., Liu H., Dear. J. P. Sravnytelnoe yzuchenye kryteryev razrusheniya dlia predskazaniya nachala povrezhdeniya v voloknysto-armyrovannykh kompozytakh [Comparative study of failure criteria for predicting the onset of damage in fiber-reinforced composites] // MECHANICS OF COMPOSITE MATERIALS. – 2022. – Vol. 58, No.1. – P.175–196.
15. Fisher H. How to predict structural behavior of R.P. Laminates. – Mod. Plast., 1960. – № 6. – P. 65-68.
16. Onkar A. K., Upadhyay C. S., and Yadav D. Probabilistic failure of laminated composite plates using the stochastic finite element method // Comp. Struct. – 2007. – 77. – P. 79 – 91.
17. Shukaev S., Rubashevskiy V. Effect of constructive parameters on tensile strength of 3D-printed PLA-graphite composite // ACTA TECHNICA NAPOCENSIS-Series: APPLIED MATHEMATICS, MECHANICS, and ENGINEERING. – Vol.65. – 2022. – P.239-244.
18. Tsai S.W., Wu E.M. A general theory of strength for anisotropic materials // J.Comp.Mater. – 1971 – Vol.5. – P.58-80.

Стаття надійшла 11.06.2023

*Пискунов С.О., Бахтаваршоев Т.А., Самофал К.І.*

#### **ПРО ВИКОРИСТАННЯ КРИТЕРІВ МІЦНОСТІ АНІЗОТРОПНИХ МАТЕРІАЛІВ**

Однією з відмінних властивостей композитних матеріалів є їх анізотропія, що дозволяє, зокрема, максимально використовувати їх міцнісні властивості. Завдяки новим технологіям, зокрема 3-D друку, з'являються нові можливості цілеспрямованого формування структури композитних матеріалів і їх властивостей. Важливим питанням при цьому є забезпечення міцності, яка визначається в залежності від структури композиту в цілому та механічних характеристик його окремих компонентів. В статті проведено огляд відомих критеріїв міцності (Гольденבלата-Копнова, Мізеса-Хілла, Фішера, Хофмана, Цая-Ву та інших), зв'язку між ними та даних про достовірність застосування при тих чи інших умовах навантажень. Частина з них передбачають однакові властивості матеріалів в умовах стиску і розтягу та одержано шляхом узагальнення класичних теорій міцності і пластичності ізотропних тіл. Більшого практичного застосування набули критерії, що ураховують різний опір композитного матеріалу розтягу і стиску, що є притаманним багатьом композитним матеріалам. При виборі критерію міцності, з точки зору структури варто розглядати окремо шаруваті і армовані композиційні матеріали, а з точки зору навантаження – статичний або циклічний характер його прикладання. Перелічені вище критерії не ураховують накопичення пошкоджень у матеріалі, які виникають під дією зовнішніх навантажень. Кількість таких відомих критеріїв є обмеженою, оскільки на сьогодні відсутній метод прогнозування стадії розсіяного руйнування композиційних матеріалів з врахуванням анізотропії механічних властивостей, а також не обґрунтовано вибір параметра пошкоджуваності. Зазначається перспективність розробки таких критеріїв для уточнення отримуваних висновків щодо несучої здатності виробів з композитних матеріалів при різному характері прикладання зовнішніх навантажень.

**Ключові слова:** композитні матеріали, анізотропія, критерії міцності, руйнування.

*Pyskunov S.O., Bakhtavarshoev T.A., Samofal K.I.*

#### **ON THE USE OF STRENGTH CRITERIA OF ANISOTROPIC MATERIALS**

One of the distinctive properties of composite materials is their anisotropy, which allows, in particular, to use of their strength properties maximum. Thanks to new technologies, in particular 3-D printing, there are new opportunities for purposeful formation of the structure of composite materials and their properties. An important issue here is ensuring strength, which is determined depending on the structure of the composite as a whole and the mechanical characteristics of its individual components. The article reviews well-known strength criteria (Goldenblatt-Kopnov, Mises-Hill, Fisher, Hoffman, Tsai-Wu, and others), the relationship between them, and data on the reliability of their application under certain load conditions. Some of them assume the same properties of materials under conditions of compression and tension and are obtained by generalizing the classical theories of strength and plasticity

of isotropic bodies. The criteria that take into account the different resistance of the composite material to tension and compression, which is inherent in many composite materials, have gained greater practical application. When choosing a strength criterion, from the point of view of structure, it is worth considering separately layered and reinforced composite materials, and from the point of view of load - the static or cyclic nature of its application. The criteria listed above do not take into account the damage accumulation in the material that occurs under the influence of external loads. The number of such known criteria is limited, because today there is no method for predicting the stage of scattered fracture of composite materials taking into account the anisotropy of mechanical properties, and the choice of the damage parameter is not justified. The perspective of developing such criteria for clarifying the received conclusions regarding the load-bearing capacity of products made of composite materials under different types of application of external loads is noted.

**Keywords:** composite materials, anisotropy, strength criteria, destruction.

УДК 539.4

*Пискунов С.О., Бахтаваришов Т.А., Самофал К.І. Про використання критеріїв міцності анізотропних матеріалів // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2023. – Вип. 110. – С. 496-506.*

*Проведено огляд критеріїв міцності анізотропних матеріалів і даних про достовірність їх застосування при визначенні задач несучої здатності композитних матеріалів. Розглянуті критерії без урахуванням та з урахуванням пошкодженості матеріалу.*

*Табл. 0. Іл. 0. Бібліогр. 18 назв.*

UDC 539.4

*Pyskunov S.O., Bakhtavarshoev T.A., Samofal K.I. On the use of strength criteria of anisotropic materials // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-&Technical collected articles – Kyiv: KNUBA, 2023. – Issue 110. – P. 496-506.*

*An overview of the strength criteria of anisotropic materials and data on the reliability of their use in determining the problems of the load-bearing capacity of composite materials was conducted. Considered criteria without taking into account and taking into account damage to the material.*

*Tabl. 0. Fig. 0. Ref. 18.*

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** професор, доктор технічних наук, завідувач кафедри динаміки і міцності машин та опору матеріалів НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського» Пискунов Сергій Олегович.

**Адреса:** 03056 Україна, м. Київ, просп. Берестейський, 37, Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, кафедра динаміки і міцності машин та опору матеріалів.

**Мобільний тел.:** +38(050) 962-66-14

**E-mail:** s.piskunov@kpi.ua

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0003-3987-0583>

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** аспірант кафедри динаміки і міцності машин та опору матеріалів НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського» Бахтаваришов Тимур Алігавхарович

**Адреса:** 03056 Україна, м. Київ, просп. Берестейський, 37, Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, кафедра динаміки і міцності машин та опору матеріалів.

**робочий тел.:** +38(044) 204-95-35

**E-mail:** timur22298@gmail.com

**Автор (вчена ступень, вчене звання, посада):** аспірант кафедри динаміки і міцності машин та опору матеріалів НТУУ «КПІ ім. Ігоря Сікорського» Самофал Костянтин Ігорович

**Адреса:** 03056 Україна, м. Київ, просп. Берестейський, 37, Національний технічний університет України “Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського”, кафедра динаміки і міцності машин та опору матеріалів.

**робочий тел.:** +38(044) 204-95-35

**E-mail:** kostyas.1296@gmail.com