

УДК 539.3

## ОСОБЛИВОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ ВНУТРІШНІХ ЗУСИЛЬ В БАЗОВИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТАХ НМСЕ

**І.І. Солодей,**

доктор технічних наук, професор

**Р.Л. Стригун,**

кандидат технічних наук, доцент

**В.В. Шовківська,**

кандидат економічних наук, доцент

**А.О. Миронченко,**

аспірант

*Київський національний університет будівництва і архітектури, Київ*

DOI: 10.32347/2410-2547.2023.111.198-204

Розглянуто принципи обчислення внутрішніх зусиль кругового скінченного елемента напіваналітичного методу скінчених елементів (НМСЕ) на основі отриманих компонент тензора напружень та особливості підходу, що пов'язані із використанням моментної схеми скінченного елемента (МССЕ). Отримано формули визначення повздовжніх, перерізуючих сил, згинальних та крутильних моментів.

**Ключові слова:** тіла обертання, внутрішні зусилля, напіваналітичний метод скінчених елементів, повздовжні сили, перерізуючі сили, згинальні моменти, крутильні моменти.

**Вступ.** Особливе місце, серед розмаїття об'єктів, що розглядаються за допомогою аналітичних і чисельних методів, займають тіла обертання складної форми та структури поперечного перерізу, що утворені рухом деякої твірної поверхні вздовж замкнутої або незамкнутої напрямної без розривів. Виділений геометричний клас використовується в якості природних конструкцій, вузлів та деталей в будівництві і різноманітних областях машинобудування. Прикладами об'єктів можуть служити баштові градирні, водонапірні башти, димові труби, резервуари різного призначення, захисні оболонки ядерних реакторів, різноманітні вузли та деталі енергетичного і транспортного машинобудування, покриття, фундаменти промислових і цивільних будівель та споруд, тунелі і т.і. Достатньо велика розповсюдженість зазначених форм в будівельній та машинобудівельній галузях з одного боку, та можливість значного спрощення розв'язуючих співвідношень за рахунок урахування їх геометричних особливостей з іншого, дає підставу для розробки та використання різних модифікацій методу скінчених елементів (МСЕ). Напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ) є одним з таких підходів, який отримав широке розповсюдження для розв'язання задач, об'єктами яких є призматичні тіла та тіла обертання складної форми та структури поперечного перерізу. Висока ефективність НМСЕ для визначеного кола об'єктів була продемонстрована в області статичного [3, 6] та динамічного [4, 9] аналізу, континуальної механіки руйнування в умовах повзучості [2], дослідження процесів нелінійного деформування залізобетонних конструкцій [5], прогнозування утворення тріщин та їх розвитку [1], аналізу поведінки конструкцій з урахуванням їх взаємодії з ґрунтовою основою [10, 11].

Сучасні методики, які орієнтовані на розрахунок широкого класу конструкцій, що складаються з масивних і тонкостінних елементів, повинні поряд з високою точністю опису напружено-деформованого стану об'єктів складної форми та структури, забезпечувати високу швидкість збіжності до точного рішення при мінімальних чисельних витратах. Завдяки введенню додаткових гіпотез, що не зменшують точність апроксимації, представлено деформацій і напружень в фізичних термінах та у відповідності до моментної схеми скінченного елемента (МССЕ) [7, 8] вдається з однієї сторони уникнути трудомісткої

процедури чисельного інтегрування по площі поперечного перетину скінченного елемента (СЕ), з іншої - зберегти високу ефективність просторової дискретизації.

Незважаючи на велику кількість публікацій, присвячених напіваналітичному методу скінченних елементів, питання визначення внутрішніх зусиль, які часто є компонентними чинниками критеріїв міцності, що закладені до державних будівельних норм, неналежно залишаються поза увагою. Використання НМСЕ у поєднанні із МССЕ створюють деякі математичні особливості обчислення внутрішніх повздовжніх, перерізуючих сил та моментів.

**Внутрішні зусилля тонкостінних елементів тіл обертання в рамках напіваналітичного методу скінченних елементів.** Особливості визначення внутрішніх зусиль в базових скінченних елементах НМСЕ покажемо на прикладі неоднорідної жорсткої защемленої конічної оболонки димової труби. При цьому вздовж радіального напрямку приймаємо два скінченних елементи, а вздовж твірної кількість елементів може бути довільною.

Визначальними параметрами напружено-деформованого стану димової труби є переміщення вузлів сіткової області та напруження, що діють в центрах скінченних елементів.

На рис. 1 (а), (б) наведено приклад розрахункової схеми димової труби і показані напруження, що діють на нескінченно малий об'єм, виділений навколо точки в центрі скінченного елемента. Компоненти напружень подаються в осях місцевої системи координат  $O_1x_1x_2$ .

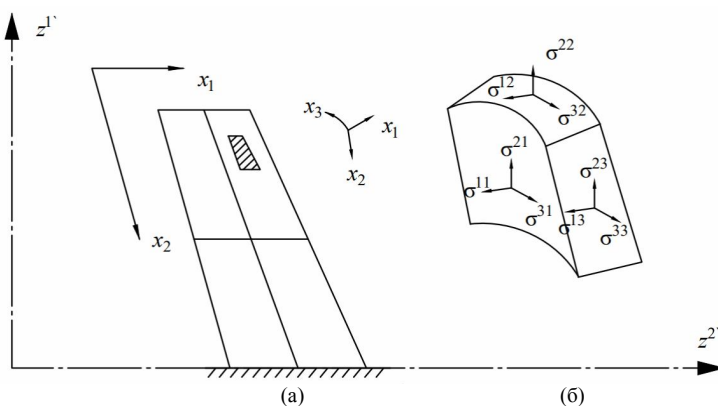


Рис. 1. Розрахункова схема

Відмітимо, що напруження, які мають однакові індекси не завжди є нормальними по відношенню до площадок, які є гранями скінченних елементів. Це ж відноситься і до напружень з різними індексами. Вони не завжди є дотичними напруженнями до тих же самих площадок. Виключення складають лише напруження, що мають індекс 3.

Зусиллями, що потребують визначення є: погонні нормальні сили  $N_2$  та  $N_3$ , що діють вздовж осей  $O_1x_2$  та  $O_1x_3$  відповідно; погонна перерізуюча сила  $Q_1$ , напрямлена перпендикулярно до осі  $O_1x_2$ ; погонна сила зсуву  $S_1$ , що діє вздовж осі, нормальної до  $O_1x_2$  та погонна сила зсуву  $S_2$ , що діє вздовж осі  $O_1x_2$ ; погонні згинальні моменти  $M_{31}$  та  $M_{32}$ , що діють в площинах  $O_1x_1x_2$  та  $O_1x_1x_3$  відповідно, погонні крутильні моменти  $M_{22}^{кр.}$ ,  $M_{33}^{кр.}$ , що діють в площинах  $O_1x_1x_3$  та  $O_1x_1x_2$ , відповідно. Зусилля, що діють на гранях скінченного елемента, показані на рис. 2.

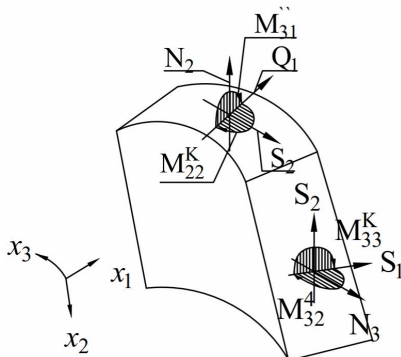


Рис. 2. Зусилля на гранях скінченного елемента

На рис. 3 зображені складові напружень  $\sigma^{22}$  та  $\sigma^{12}$ , що викликають погонне нормальне зусилля  $N_2$ . Зусилля  $N_2$  діє вздовж осі  $O_1x_2$ , перпендикулярно до площадки, нормаллю до якої є вісь  $O_1x_2$ . Нормальну силу  $N_2$  можна знайти як суму складових зусиль, отриманих від кожної компоненти напружень.

Зокрема, компонента напружень  $\sigma^{22}$  так само, як і  $N_2$ , напрямлена вздовж осі  $O_1x_2$ , тому складова  $N_2^{(1)}$  погонної нормальної сили  $N_2$ , викликана напруженням  $\sigma^{22}$  знаходиться як добуток  $\sigma^{22}$  на довжину  $h$  площадки (рис. 3 (а)).

Компонента напружень  $\sigma^{12}$ , що діє паралельно до осі  $O_1x_1$ , на площині з нормаллю  $O_1x_2$ , також дає вклад в нормальну силу  $N_2$ . Позначимо складову нормальної сили, викликану напруженням  $\sigma^{12}$  через  $N_2^{(2)}$  (рис. 3 (б)). Решта компонентів напружень не дають вклад в нормальну силу  $N_2$ .

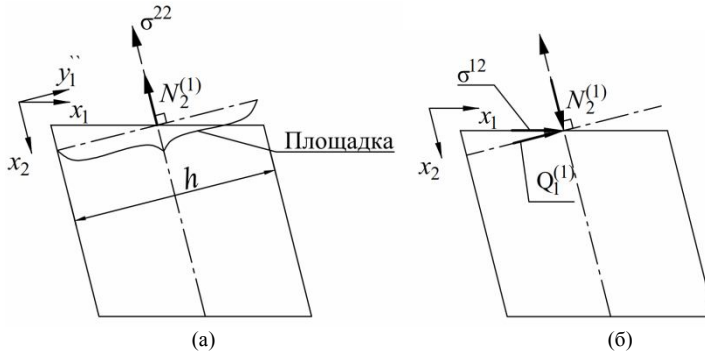


Рис. 3. Схема розташування зусиль

Таким чином, погонна нормальна сила  $N_2$  може бути знайдена як сума:

$$N_2 = N_2^{(1)} + N_2^{(2)}. \tag{1}$$

Аналогічним чином можна звести і решту зусиль.

Процедуру визначення зусиль можна формалізувати, якщо попередньо визначити

фізичні компоненти напружень  $\sigma^{0ij}$ :

$$\sigma^{0ij} = \frac{\sigma^{ij}}{\sqrt{g^{ii}g^{jj}}}, \tag{2}$$

де  $g^{ii}$  - компоненти метричного тензора.

Для визначення складових напружень, що дають вклади в зусилля, необхідно перейти від компонент напружень  $\sigma^{0ij}$ , заданих в місцевій системі координат  $O_1x_1x_2x_3$  до компонент напружень  $\sigma^{-ij}$ , визначених в осях системи координат  $O_1y^1x_2x_3$  (рис. 3).

Перетворення компонент напружень із одної системи координат в іншу, можуть бути отримані на основі загальних правил шляхом подвійного перемноження на тензор перетворення  $C_j^{i''}$  координатних систем:

$$\sigma^{i''j''} = c_k^{i''} c_l^{j''} \sigma^{kl} = c_k^{i''} c_l^{j''} \frac{\sigma^{kl}}{\sqrt{g^{kk} g^{ll}}}. \quad (3)$$

Компоненти тензора  $c_j^{i''}$ , по суті, є косинусами і синусами кутів між відповідними осями систем  $O_1x_1x_2x_3$  та  $O_1y^1y^2y^3$ .

Зокрема  $c_1^{1''} = \cos \alpha$ ,  $c_2^{1''} = 0$ ,  $c_3^{1''} = \sin \alpha$ ,  $C_2^{2''} = 1$ ,  $C_1^{1''} = \cos \alpha$ ,  $C_2^{1''} = 0$ . Решта компонент з індексами, що дорівнюють трьом, рівні нулю.

Припустимо, що закон розподілення напруження  $\sigma^{i''j''}$  в межах кожного скінченного елемента представляє собою лінійну функцію:

$$\sigma^{i''j''} = \sigma^{i''j''} + \frac{\partial \sigma^{i''j''}}{\partial x^k} x^k, \quad (4)$$

де  $\sigma^{i''j''}$  - напруження в центрі скінченного елемента,  $\frac{\partial \sigma^{i''j''}}{\partial x^k}$  - похідні від напружень.

Тоді зусилля по напруженнях можна знайти із співвідношень:

$$\begin{aligned} N_2 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\sigma^{2''2''}}{\sigma} + \sigma_{,1} x^1 \right) dx^1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma^{2''2''} dx^1 = \sigma^{2''2''}, \\ N_3 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\sigma^{3''3''}}{\sigma} + \sigma_{,1} x^1 \right) dx^1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma^{3''3''} dx^1 = \sigma^{3''3''}, \\ Q_2 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\sigma^{1''2''}}{\sigma} + \sigma_{,1} x^1 \right) dx^1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma^{1''2''} dx^1 = \sigma^{1''2''}, \\ Q_3 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\sigma^{1''3''}}{\sigma} + \sigma_{,1} x^1 \right) dx^1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma^{1''3''} dx^1 = \sigma^{1''3''}, \\ Q_1 &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\sigma^{3''1''}}{\sigma} + \sigma_{,1} x^1 \right) dx^1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma^{3''1''} dx^1 = \sigma^{3''1''}, \end{aligned} \quad (5)$$

$$M_{22}^{kp} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\sigma^{3''3''}}{\sigma} + \sigma_{,1} x^1 \right) x_1 dx^1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_{,1} x_1^2 dx^1 = \frac{1}{12} \sigma_{,1}^{3''3''},$$

$$M_{13} = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left( \frac{\sigma^{2''2''}}{\sigma} + \sigma_{,1} x^1 \right) x_1 dx^1 = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_{,1} x_1^2 dx^1 = \frac{1}{12} \sigma_{,1}^{2''2''}, \quad (6)$$

$$M_{31}^H = \frac{1}{2} \int \left( \frac{0^{3''3''}}{\sigma} + \frac{0^{3''3''}}{\sigma_{,1}} x_1 \right) x_1 dx^1 = \frac{1}{2} \int \frac{0^{3''3''}}{\sigma_{,1}} x_1^2 dx^1 = \frac{1}{12} \frac{0^{3''3''}}{\sigma_{,1}},$$

$$M_{33}^{kp} = \frac{1}{2} \int \left( \frac{0^{1''1''}}{\sigma} + \frac{0^{1''1''}}{\sigma_{,2}} x_1 \right) x_1 dx^1 = \frac{1}{12} \frac{0^{1''1''}}{\sigma_{,2}}.$$

Враховуючи (3), а також приймаючи до уваги, що компоненти метричного тензору  $g^{ij}$  та компоненти тензору перетворення  $c_j^{i''}$  не змінюються в межах скінченного елемента, зусилля можна визначити через компоненти напружень  $\sigma^{ij}$  за формулами:

$$N_2 = \frac{\sigma^{kl} c_k^{2''} c_l^{2''}}{\sqrt{g^{kk} g^{ll}}}, \quad N_3 = \frac{\sigma^{kl} c_k^{3''} c_l^{3''}}{\sqrt{g^{kk} g^{ll}}},$$

$$Q_2 = \frac{\sigma^{kl} c_k^{1''} c_l^{2''}}{\sqrt{g^{kk} g^{ll}}}, \quad Q_3 = \frac{\sigma^{kl} c_k^{1''} c_l^{3''}}{\sqrt{g^{kk} g^{ll}}}, \quad Q_1 = \frac{\sigma^{kl} c_k^{3''} c_l^{1''}}{\sqrt{g^{kk} g^{ll}}},$$

$$M_{22}^{kp} = \frac{1}{12} * \frac{\sigma_{,1}^{kl} c_k^{3''} c_l^{3''}}{\sqrt{g^{kk} g^{ll}}}, \quad M_{13} = \frac{1}{12} * \frac{\sigma_{,1}^{kl} c_k^{2''} c_l^{2''}}{\sqrt{g^{kk} g^{ll}}}, \quad M_{31} = \frac{1}{12} * \frac{\sigma_{,1}^{kl} c_k^{3''} c_l^{3''}}{\sqrt{g^{kk} g^{ll}}}, \quad M_{33}^{kp} = \frac{1}{12} * \frac{\sigma_{,2}^{kl} c_k^{1''} c_l^{1''}}{\sqrt{g^{kk} g^{ll}}}, \quad (7)$$

**Висновки.** Таким чином, використання напіваналітичного методу скінчених елементів із залученням процедур моментної схеми скінченного елемента потребує певних математичних уточнень стандартних формул обчислення внутрішніх зусиль СЕ, що і було продемонстровано в представлений роботі.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Вабіщевич М.О., Пискунов С.О., Солодей І.І.* Чисельні дослідження нелінійного деформування просторових тіл з урахуванням розвитку тріщин при статичних та динамічних навантаженнях. – Київ: Каравела, 2019. – 240 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування простових тіл. - КНУБА, 2005. - 298 с.
3. *Баженов В.А., Гуляр А.І., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел.- Киев: Випол, 1993, 376 с.
4. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Сахаров О.С., Солодей І.І.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах динаміки просторових тіл. – Київ: Каравела, 2012. – 248 с.
5. *Баженов В.А., Гуляр А.І., Козак А.Л., Рутковский В.А., Сахаров А.С.* Численное моделирование разрушения железобетонных конструкций по методу конечных элементов. – Киев: Наукова думка, 1996. – 360 с.
6. *Баженов В.А., Пискунов С.О., Солодей І.І.* Чисельне дослідження процесів нелінійного статичного і динамічного деформування просторових тіл – Київ: Вид-во “Каравела”, 2017. – 308 с.
7. *Сахаров А.С., Кислюк В.Н., Киричевский В.В. и др.* Метод конечных элементов в механике твердых тел.- Киев: Вища школа, 1982.- 479с.
8. *Сахаров А.С.* Моментная схема конечных элементов МСКЭ с учетом жестких смещений // Соппротивление материалов и теория сооружений. –1974. –Вып.24. –С.147-156.
9. *Bazhenov V.A., Pyskunov S.O., Solodei I.I.* Continuum mechanics: semi-analytical finite element method. -Cambridge Scientific Publisher, 2018, 236 p. ISBN 978-1-908106-63-6.
10. *Solodei I.I., Petrenko E.Yu, Zatylyuk Gh.A.* The stress-strain state investigation of underground structures on the basis of soil models with adjusted input parameters//Strength of materials and theory of structures. – 2019. – Issue 103. – P. 63–70.
11. *Solodei I.I., Zatylyuk H.A.* Study of the reliability and efficiency of using reinforced soil models within the framework of the finite element method // Strength of materials and theory of structures. – 2022. – Issue 109. – P. 30–37.

#### REFERENCES

1. *Bazhenov V.A., Vabishcheych M.O., Pyskunov S.O., Solodei I.I.* Chyselni doslidzhennia neliniinoho deformuvannia prostorovykh til z urakhuvanniam rozvytku trishchyn pry statychnykh ta dynamichnykh navantazhenniakh (Numerical researches of nonlinear deformation of spatial bodies taking into account the development of cracks under static and dynamic loads). – Kyiv: Caravela, 2019. – 240 p.
2. *Bazhenov V.A., Guljar O.I., Pyskunov S.O., Sakharov O.S.* Napivanalitichnyi metod skinchenykh elementiv v zadachakh

- ruinuvannya prostovykh til (Semi-analytical finite element method in problems of 3D bodies destruction). - KNUCA, 2005. - 298 p.
3. *Bazhenov V.A., Guljar A.I., Sakharov A.S., Topor A.G.* Poluanalicheskij metod konechnykh elementov v mehanike deformiruemykh tel (Semi-analytical finite element method in mechanics of deformable bodies). - Kyiv: Vypol, 1993, 376 p.
  4. *Bazhenov V.A., Guljar O.I., Sakharov O.S., Solodei I.I.* Napivanaliticheskiy metod skinchennykh elementiv v zadachakh dynamiky prostorovykh til (Semi-analytical finite element method in 3D dynamics problems). - Kyiv: Caravela, 2012. - 248 p.
  5. *Bazhenov V.A., Guljar A.I., Kozak A.L., Rutkovskii V.A., Sakharov A.S.* Chislennoe modelirovanie razrusheniya zhelezobetonnykh konstruktsiy po metodu konechnykh elementov (Numerical modeling of the reinforced concrete structures destruction using the finite element method). - Kyiv: Naukovadumka, 1996. - 360 p.
  6. *Bazhenov V.A., Pyskunov S.O., Solodei I.I.* Chyselne doslidzhennia protsesiv neliniinoho statychnoho i dynamichnogo deformuvannya prostorovykh til (Numerical researches of nonlinear static and dynamic deformation processes of 3D bodies). - Kyiv: Caravela, 2017. - 308 p.
  7. *Sakharov A.S., Kyslookii V.N., Kyrychevskii V.V.* Metod konechnykh elementov v mehanike tverdykh tel (Finite element method in solid mechanics). - Kyiv: Vyschaschkola, 1982. - 479 p.
  8. *Sakharov A.S.* Momentnaya shema konechnykh elementov MSKE s uchetom zhestkikh smeshenij (The moment finite element scheme (MFES) taking into account of rigid offsets). // Strength of materials and theory of structures. - 1974. - Issue 24. - P. 147-156.
  9. *Bazhenov V.A., Pyskunov S.O., Solodei I.I.* Continuum mechanics: semi-analytical finite element method. - Cambridge Scientific Publisher, 2018, 236 p. ISBN 978-1-908106-63-6.
  10. *Solodei I.I., Petrenko E.Yu., Zatylyuk Gh.A.* The stress-strain state investigation of underground structures on the basis of soil models with adjusted input parameters // Strength of materials and theory of structures. - 2019. - Issue 103. - P. 63-70.
  11. *Solodei I.I., Zatylyuk H.A.* Study of the reliability and efficiency of using reinforced soil models within the framework of the finite element method // Strength of materials and theory of structures. - 2022. - Issue 109. - P. 30-37.

Стаття надійшла 04.10.2023

*Solodei I.I., Stryhun P.L., Shovkiv'ska V.V., Myronchenko A.O.*

#### **ОСОБЛИВОСТІ ВИЗНАЧЕННЯ ВНУТРІШНІХ ЗУСИЛЬ В БАЗОВИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТАХ НМСЕ**

Розглянуто принципи обчислення внутрішніх зусиль кругового скінченного елемента напіваналітичного методу скінчених елементів (НМСЕ) на основі отриманих компонент тензора напружень та особливості підходу, що пов'язані із використанням моментної схеми скінченного елемента (МССЕ). Отримано формули визначення повздовжніх, перерізуючих сил, згинальних та крутильних моментів.

Особливе місце, серед розмаїття об'єктів, що розглядаються за допомогою аналітичних і чисельних методів, займають тіла обертання складної форми та структури поперечного перерізу, що утворені рухом деякої твірної поверхні вздовж замкнутої або незамкнутої напрямної без розривів. Виділений геометричний клас використовується в якості природних конструкцій, вузлів та деталей в будівництві і різноманітних областях машинобудування. Достатньо велика розповсюдженість зазначених форм в будівельній та машинобудівельній галузях з одного боку, та можливість значного спрощення розв'язуючих співвідношень за рахунок урахування їх геометричних особливостей з іншого, дає підставу для розробки та використання різних модифікацій методу скінчених елементів (МСЕ). Напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ) є одним з таких підходів, який отримав широке розповсюдження для розв'язання задач, об'єктами яких є призматичні тіла та тіла обертання складної форми та структури поперечного перерізу. Завдяки введеному додатковим гіпотез, що не зменшують точність апроксимації, представленої деформації і напружень в фізичних термінах та у відповідності до моментної схеми скінченного елемента (МССЕ) вдається з однієї сторони уникнути трудомкої процедури чисельного інтегрування по площі поперечного перетину скінченного елемента (СЕ), з іншої - зберегти високу ефективність просторової дискретизації.

Незважаючи на велику кількість публікацій, присвячених напіваналітичному методу скінчених елементів, питання визначення внутрішніх зусиль, які часто є компонентними чинниками критеріїв міцності, що закладені до державних будівельних норм, неналежно залишаються поза увагою. Використання НМСЕ у поєднанні із МССЕ створюють деякі математичні особливості обчислення внутрішніх повздовжніх, перерізуючих сил та моментів.

**Ключові слова:** тіла обертання, внутрішні зусилля, напіваналітичний метод скінчених елементів, повздовжні сили, перерізуючі сили, згинальні моменти, крутильні моменти.

*Solodei I.I., Stryhun R.L., Shovkiv'ska V.V., Myronchenko A.O.*

#### **DETERMINATION OF INTERNAL EFFORTS IN THE BASE FINITE ELEMENTS OF SAFEM**

The principles of calculating the internal efforts of a circular finite element in the semi-analytical finite element method (FEM) based on the obtained components of the stress tensor and the peculiarities of the approach associated with the use of the moment scheme of the finite element (FEM) are considered. Formulas for determining longitudinal, shear forces, bending and torque moments have been obtained.

A special place, among the variety of objects considered with the help of analytical and numerical methods, is occupied by bodies of revolution of complex shape and cross-sectional structure, formed by the movement of some creative surface along a closed or opened line without breaks. The selected geometric class is used as natural structures of nodes and details in construction of mechanical engineering. The sufficiently wide distribution of the specified forms

in the construction and machine-building industries, on the one hand, and the possibility of significantly simplifying the solving relationships by taking into account their geometric features, on the other hand, provide a basis for the development and use of various modifications of the finite element method (FEM). The semi-analytical finite element method (SAFEM) is one such approach that has gained widespread use for solving problems whose objects are prismatic bodies and bodies of revolution of complex shape and cross-sectional structure. Due to the introduction of additional hypotheses that do not reduce the accuracy of the approximation, the representation of deformations and stresses in physical terms and in accordance with the moment scheme of the finite element (MSFE), on the one hand, it is possible to avoid the time-consuming procedure of numerical integration over the cross-sectional area of the finite element (FE), on the other hand - maintain the high efficiency of 3D discretization.

Despite the large number of publications devoted to the semi-analytical method of finite elements, the question of determining internal forces, which are often component factors of the strength criteria laid down in state building codes, is inappropriately neglected. The use of SAFEM in combination with MSFE creates some mathematical features of calculating internal longitudinal, shearing forces and moments.

**Key words:** bodies of revolution, internal efforts, semi-analytical finite elements method, longitudinal forces, shear forces, bending moments, torque moments.

УДК 539.3

*Солодей І.І., Стригун Р.Л., Шовківська В.В., Миронченко А.О. Особливості визначення внутрішніх зусиль в базових скінченних елементах НМСЕ // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірник – К.: КНУБА, 2023. – Вип. 111. – С. 198-204.*

*Розглянуто принципи обчислення внутрішніх зусиль кругового скінченного елемента напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ) на основі отриманих компонент тензора напружень та особливості підходу, що пов'язані із використанням моментної схеми скінченного елемента (МССЕ). Отримано формули визначення поздовжніх, перерізуючих сил, згинальних та крутильних моментів.*

Лл. 3. Бібліогр. 11 назв.

UDC 539.3

*Solodei I.I., Stryhun R.L., Shovkivska V.V., Myronchenko A.O. Determination of internal efforts in the base finite elements of SAFEM// Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles- K.: KNUBA, 2023. – Issue 111. - P. 198-204.*

*The principles of calculating the internal efforts of a circular finite element in the semi-analytical finite element method (FEM) based on the obtained components of the stress tensor and the peculiarities of the approach associated with the use of the moment scheme of the finite element (FEM) are considered. Formulas for determining longitudinal, shear forces, bending and torque moments have been obtained.*

Fig. 3. Ref. 11.

**Автор:** доктор технічних наук, професор, професор кафедри будівельної механіки СОЛОДЕЙ Іван Іванович

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

**Робочий тел.:** +38 (044) 241-55-55

**Мобільний тел.:** +38 (050)357-44-90

**E-mail:** solodei.ii@knuba.edu.ua

**ORCID ID:** <http://orcid.org/0000-0001-7638-3085>

**Автор:** кандидат технічних наук, доцент кафедри будівельної механіки СТРИГУН Руслан Леонідович

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

**Робочий тел.:** +38 (044) 241-55-55

**Мобільний тел.:** +38(068)7905651

**Email:** stryhun.rl@knuba.edu.ua

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-1174-5310>

**Автор:** кандидат економічних наук, доцент кафедри економічної теорії, обліку та оподаткування ШОВКІВСЬКА Вікторія Василівна

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

**Робочий тел.:** +38 (044) 242-45-26

**Мобільний тел.:** +38 (066) 460-00-01

**Email:** shovkivska.vv@knuba.edu.ua

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0000-0002-2379-0362>

**Автор:** аспірант кафедри будівельної механіки МИРОНЧЕНКО Анастасія Олександрівна

**Адреса робоча:** 03680 Україна, м. Київ, Повітрофлотський проспект 31, Київський національний університет будівництва і архітектури

**Робочий тел.:** +38 (044) 241-55-55

**Мобільний тел.:** +38 (095) 490-18-36

**Email:** myronchenko\_ao-2022@knuba.edu.ua

**ORCID ID:** <https://orcid.org/0009-0009-1443-775X>