

УДК 539.3; 624.073.4

ДИНАМІКА ТРИШАРОВОЇ НАПІВСФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

В.В. Гайдайчук,

д-р техн. наук

К.Е. Котенко,

канд. техн. наук

А.М. Мамедов,

канд. техн. наук

*Київський національний університет будівництва і архітектури,
просп. Повітряних Сил, 31, м. Київ. 03680*

DOI: 10.32347/2410-2547.2025.114.83-93

На прикладі тришарової напівсферичної оболонки симетричної і несиметричної структури з дискретно-неоднорідним заповнювачем досліджено нестационарні динамічні процеси. В дослідженнях застосовано зсувну теорію оболонок і стержнів С.П. Тимошенка з використанням незалежних статичних і кінематичних гіпотез до кожного шару і використано скінченно-елементний метод розрахунків характеристик напружено-деформованого стану (НДС) і коливань структури.

Для виведення рівнянь коливань тришарової неоднорідної за товщиною структури використовується варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона – Остроградського.

Створено скінченно-елементну модель структури для проведення числового аналізу динаміки шаруватої напівсферичної оболонки з дискретним армованим ребрами заповнювачем під дією динамічного навантаження.

Виявлено вплив фізико-механічних і геометричних параметрів несучих шарів на НДС тришарової оболонки при динамічному навантаженні. Наведені числові результати розв'язку конкретних задач.

Ключові слова: динаміка, тришарова напівсферична оболонка, легкий заповнювач, армуючі ребра, метод скінченних елементів, механічні ефекти.

Вступ. Створення і вдосконалення конструкційних рішень машин, механізмів, елементів космічної і ракетної техніки, літальних апаратів, сучасних будівельних та інших конструкцій стало результатом виконання ряду технічних і економічних вимог, що пред'явлені до таких конструкцій сучасною практикою. В цьому відношенні раціональним стало використання в таких конструкціях шаруватих оболонок різної канонічної форми в яких кожний шар структури виконує одну або декілька функцій.

Залежно від геометричних характеристик і фізико-механічних властивостей матеріалу несучих шарів нестационарні динамічні процеси таких структур досить докладно розглянуті в симетричних структурах [1-6] і продовжують досліджуватися в тришарових конструкціях оболонок з різною товщиною і властивостями їх несучих шарів [7, 8].

Динамічні процеси є визначальними при розрахунку поведінки конструкцій шаруватих структур. А їх оцінка являється надзвичайно важливою мірою точності розв'язку задачі. На даний час проблема дослідження нестационарних динамічних процесів шаруватих оболонкових структур для оцінки їх працездатності при динамічних навантаженнях є достатньо актуальною. Особливо це стосується складних і відповідальних елементів ракетно-космічної техніки.

Наступна робота є продовженням таких досліджень, в яких об'єктом досліджень є тонкостінні тришарові структури півсферичної форми. Ці дослідження продовжують накопичування досвіду чисельних розрахунків НДС шаруватих оболонкових структур з врахуванням їх конструкційних особливостей.

Постановка задачі

Тришарова півсферична оболонка із полімерним заповнювачем, армований дискретно симетричними ребрами, представляє собою пружну структуру, конструкційний пакет якої складається (рис. 1) з внутрішнього (1), зовнішнього (2) несучих шарів, полімерного заповнювача (3) і набору ребер жорсткості (4). Півсфера налічувала п'ять ребер, розташованих в точках згідно залежності:

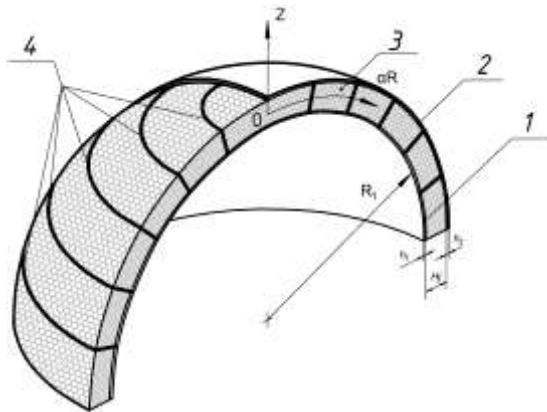


Рис. 1. Конструкція тришарової півсферичної оболонки із полімерним заповнювачем армованим ребрами жорсткості: 1 – внутрішній шар; 2 – зовнішній шар; 3 – полімерний заповнювач; 4 – армуючі ребра

$$\alpha_k = k * \Delta\alpha, \quad k = \overline{1,5}, \quad \Delta\alpha = \frac{\pi}{12}.$$

Оболонка має постійну загальну товщину h і розглядається в системі координат α, z .

Координатна лінія αR серединної поверхні цієї оболонки є коловою, а z – пряма лінія, ортогональна до серединної поверхні. Несучі шари оболонки жорстко з'єднані між собою дискретними ребрами, простір між якими заповнено полімерним заповнювачем. Деформований стан внутрішнього і зовнішнього несучих шарів визначається через компоненти узагальненого вектора переміщень $\bar{U}_1 = (u_s^1, u_3^1, \phi_1^1)^T$ і $\bar{U}_2 = (u_s^2, u_3^2, \phi_1^2)^T$.

А переміщення легкого ребристого заповнювача визначаються узагальненим вектором переміщення $\bar{U}_t = (u_s^t, u_3^t, \phi_1^t)^T$ згідно обчислювальної моделі.

На основі теорії деформації зсуву [9] в оболонках переміщення u_1^i і u_3^i в несучих шарах в напрямку α (поздовжній), z (товщина) і t (час) при малих лінійних переміщеннях виражаються через наступні залежності:

$$u_1^i(s, z, t) = u_0^i(s, t) + z_i \phi_1^i(s, t); \quad u_3^i(s, z, t) = u_{03}^i(s, t), \quad i = 1, 2, \quad (1.1)$$

де ϕ_1^i – кут повороту нормалі до серединної поверхні несучих шарів.

Вирази для переміщень легкого заповнювача записуються згідно моделі [10]:

$$u_1^t(s, z, t) = \left(1 + \frac{z_t}{R_t}\right) u_0^t(s, t) + z_t u_1^t(s, t), \quad u_3^t(s, z, t) = u_{03}^t(s, t). \quad (1.2)$$

Рівняння руху для несучих шарів, ребер і легкого заповнювача виводяться згідно варіаційного принципу стаціонарності Гамільтона – Остроградського, який можна записати наступним чином

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (K - \Pi + A) dt = 0, \quad (1.3)$$

де Π – повна потенціальна енергія пружної системи; K – повна кінетична енергія пружної системи; A – робота зовнішніх сил; t_1 і t_2 – фіксовані моменти часу. При виведенні рівнянь коливань тришарових оболонок з легким заповнювачем незалежному варіюванню підлягають: компоненти переміщень несучих шарів, армуючих ребер і заповнювача з легкого матеріалу.

Після стандартних перетворень в варіаційному рівнянні (1.3), отримаємо систему гіперболічних рівнянь руху 9-го порядку для тришарової сферичної оболонки з легким заповнювачем армованим дискретними ребрами при осесиметричному нестационарному навантаженні [7]:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha T_{11}^i) - \frac{1}{R_i} (\text{ctg} \alpha T_{22}^i - T_{13}^i) - \frac{1}{R_i} T_{13}^i = \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_1^i}{\partial t^2}; \\ & \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha T_{13}^i) - \frac{1}{R_i} (T_{11}^i + T_{22}^i) - \frac{1}{R_i h_i} (M_{11}^i + M_{22}^i) + P_3 = \rho_i h_i \frac{\partial^2 u_3^i}{\partial t^2}; \\ & \frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_i} (\sin \alpha M_{11}^i) - \frac{\text{ctg} \alpha}{R_i} M_{22}^i - T_{13}^i = \frac{\rho_i h_i^3}{12} \frac{\partial^2 \phi_1^i}{\partial t^2}, \quad i = 1, 2; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_t} (\sin \alpha T_{11}^t) + \frac{1}{R_t} (T_{11}^t - T_{13}^t) + \frac{8}{h_t^2} M_{13}^t &= \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_0^t}{\partial t^2}; \\
\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_t} (\sin \alpha M_{11}^t) - T_{13}^t + \frac{1}{R_{t1}} M_{13}^t &= \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_1^t}{\partial t^2}; \\
\frac{1}{\sin \alpha} \frac{\partial}{\partial s_t} (\sin \alpha T_{13}^t) - \frac{1}{R_t} (T_{11}^t + T_{22}^t) &= \rho_t h_t \frac{\partial^2 u_{03}^t}{\partial t^2}; \\
\left[T_{11}^{i\pm} \right]_j &= \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{1j}}{\partial t^2}; \quad \left[T_{13}^{i\pm} \right]_j = \rho_j F_j \frac{\partial^2 u_{3j}}{\partial t^2}; \quad \left[M_{11}^{i\pm} \right]_j = \rho_j I_{krj} \frac{\partial^2 \varphi_{1j}}{\partial t^2}.
\end{aligned} \quad (1.4)$$

Ці рівняння коливань несиметричних тришарових пружних структур описуються двома системами гіперболічних рівнянь дев'ятого порядку, які утворюються за рахунок врахування розривних коефіцієнтів «несучі шари - армуючі елементи».

На лініях розривів в рівняннях коливань (1.4) $\left[T_{11}^{i\pm} \right]_j$; $\left[T_{13}^{i\pm} \right]_j$; $\left[M_{11}^{i\pm} \right]_j$ – відповідають зусиллям і моментам, які діють на j -й дискретний елемент з боку несучих шарів.

Співвідношення між величинами зусиль і моментів та відповідними величинами деформацій для несучих шарів і армуючих ребер мають вигляд

$$\begin{aligned}
T_{11}^i &= \frac{E_i h_i}{1 - \nu_i^2} (\varepsilon_{11}^i + \nu_i \varepsilon_{22}^i); \quad T_{22}^i = \frac{E_i h_i}{1 - \nu_i^2} (\varepsilon_{22}^i + \nu_i \varepsilon_{11}^i); \quad T_{13}^i = k^2 G_{13} \varepsilon_{13}^i, \quad i = 1, 2; \\
M_{11}^i &= \frac{E_i h_i^3}{12(1 - \nu_i^2)} (\kappa_{11}^i + \nu_i \kappa_{22}^i); \quad M_{22}^i = \frac{E_i h_i^3}{12(1 - \nu_i^2)} (\kappa_{22}^i + \nu_i \kappa_{11}^i); \quad T_{22j} = E_j F_j \varepsilon_{22j},
\end{aligned} \quad (1.5)$$

E_i , G_{13} , ν_i – фізико-механічні параметри матеріалу несучих шарів; k^2 – інтегральний коефіцієнт поперечного зсуву теорії пластин та оболонок; E_j , F_j – модуль пружності матеріалу і площа поперечного перетину j -го ребра, відповідно.

Зусилля і моменти для легкого заповнювача можна визначити наступним чином:

$$T_{11}^t = \int_{-h_t/2}^{h_t/2} \left(1 + \frac{z_t}{R_t} \right) \sigma_{11}^t dz_t; \quad T_{13}^t = \int_{-h_t/2}^{h_t/2} \sigma_{13}^t dz_t; \quad M_{11}^t = \int_{-h_t/2}^{h_t/2} z_t \left(1 + \frac{z_t}{R_t} \right) \sigma_{11}^t dz_t. \quad (1.6)$$

Дослідження динаміки неоднорідних шаруватих оболонок свідчать про значну роль в цьому процесі геометричних параметрів і фізико-механічних властивостей елементів їх шаруватого пакету. Вплив цих конструктивних особливостей на НДС структури було проаналізовано в наступних дослідженнях динаміки тришарової оболонки. При цьому аналізувалось три варіанти структури оболонки (табл. 1). В кожному досліджуваному варіанті розглядалось два випадки використання полімерного заповнювача різної пружності ($E_t = 1,4 \cdot 10^8$ Па та $E_t = 1,4 \cdot 10^9$ Па). Півсферична тришарова оболонка жорстко закріплюлася по екватору.

Таблиця 1

Досліджувані варіанти структури оболонки

Варіант оболонкової структури	Товщина несучого шару, (м)		Матеріал несучого шару	
	внутрішнього	зовнішнього	внутрішнього	зовнішнього
1	0,002	0,002	Алюміній	Алюміній
2	0,002	0,002	Алюміній	Сталь
3	0,002	0,004	Алюміній	Алюміній

В даній задачі розглядалось динамічне деформування тришарової оболонкової структури при дії нестационарного навантаження. Всі розглянуті варіанти конструкції структури оболонки досліджувалися при однакових параметрах внутрішнього нестационарного навантаження:

$$P_3(t) = A \cdot \sin \frac{\pi t}{T} [\eta(t) - \eta(t - T)],$$

де A – амплітуда імпульсного навантаження; T – тривалість часу навантаження; t – часовий інтервал; $\eta(t)$ – функція Хевісайда.

В дослідженнях приймалися параметри: $A = 1 \text{ МПа}$; $T = 50 \cdot 10^{-6} \text{ с}$.

В кожному досліджуваному варіанті аналізувався розподіл по просторовій координаті α максимальних величин характеристик НДС: нормальних прогинів ($u_3^1; u_3^2$) і нормальних напружень ($\sigma_{22}^1; \sigma_{22}^2$) несучих шарів структур. В процесі аналізу, отримані результати порівнювалися в кожному варіанті структури.

Результати розрахунків. Враховуючи різні фізико-механічні властивості несучих шарів і полімерного заповнювача, в наведеній роботі розрахунки показників напружено-деформованого стану структур здійснювались скінченно-елементним методом із створінням адекватної скінченно-елементної моделі (рис. 2).

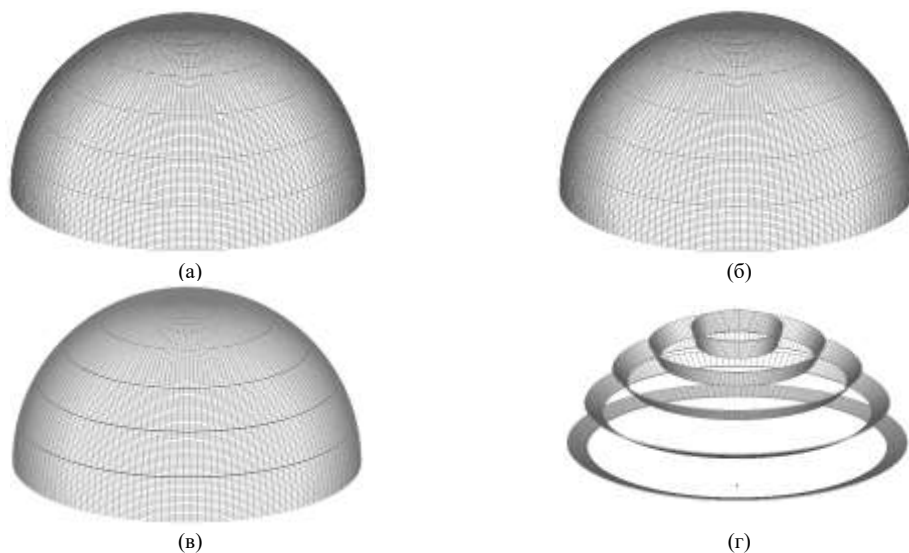


Рис. 2. Скінченно-елементна модель тришарової півсферичної оболонки: (а) – обшивка несуча внутрішня; (б) – теж саме, зовнішня; (в) – полімерний заповнювач; (г) – армуючі ребра

Адекватність моделі підтверджувалась критеріями якості скінченних елементів. За ступенем увігнутості, звуженню і закривленню, внутрішнім кутам та інших показниках вона відповідала вимогам забезпечення скінченно-елементної сітки програмного комплексу *Nastran* [11]. При її створенні був використаний тривимірний скінченний елемент типу *Solid*. Загальна кількість таких елементів в моделі становила 233100, а кількість вузлів дорівнює 266408. В варіантах моделі кількість скінчених елементів обох несучих шарів становить 33300, а полімерного заповнювача - 63600. У ребрах жорсткості кількість елементів налічувала 3000.

Розрахунки були проведені у програмно-розрахунковому середовищі *Fimap with NX Nastran* алгоритмом прямого перехідного динамічного процесу в часовому інтервалі $0 \leq t \leq 40T$.

Скінчено-елементна модель відображала зв'язок потенціальної енергії деформацій з потенціалом зовнішніх навантажень [12]:

$$\Pi = E + W, \quad (2.1)$$

де E – потенціальна енергія деформацій, а W – потенціал зовнішніх навантажень.

Після розбивки цільної області на окремі елементи має вид:

$$\Pi = \sum_{e=1}^E (E^{(e)} - W^{(e)}) = \sum_{e=1}^E \pi^{(e)}. \quad (2.2)$$

Глобальна матриця жорсткості $[K]$ і глобальний вектор-стовпець $\{F\}$ в матричному рівнянні

$$[K]\{U\} = \{F\} \quad (2.3)$$

відповідають співвідношенням:

$$[K] = \sum_{e=1}^E [k^{(e)}], \quad (2.4)$$

$$\{F\} = - \sum_{e=1}^E \{f^{(e)}\}. \quad (2.5)$$

Перший варіант структури оболонки: відношення модулів пружності несучих шарів до модуля пружності заповнювача: $E_{1,2}/E_t = 500$; $E_{1,2}/E_t = 50$; $E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $h_1 = h_2 = 0,002$ м; $H_j = 10h_2$; $R_1 = 0,3$; $h/R_1 = 0,08$; $F_j = 2 \cdot 10^{-4}$ м²; $\rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³; $\nu_1 = \nu_2 = \nu_j = 0,3$. Фізико-механічні параметри для легкого полімерного заповнювача були наступними: $E_t = 1,4 \cdot 10^8$ Па; $E_t = 1,4 \cdot 10^9$ Па; $\rho_t = 25$ кг/м³; $\nu_t = 0,33$. Маса заповнювача складає 0,299 кг, армуючих ребер - 0,719 кг. А загальна маса всієї сферичної конструкції дорівнює 7,632 кг.

На рис. 3,а наведено залежності максимальних величин прогинів внутрішнього несучого шару u_3^1 (1) і зовнішнього несучого шару u_3^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів від кутової координати α , при $t = 10T$ (час досягнення максимального значення величин прогинів). Полімерний заповнювач відповідав співвідношенню пружності $E_{1,2}/E_t = 500$. В цьому варіанті структури і на рис. 4-8: криві 1 відповідають величинам внутрішнього несучого шару, криві 2 – зовнішнього несучого шару; точки зближення цих кривих 1 і 2 вказують на розташування армуючих ребер.

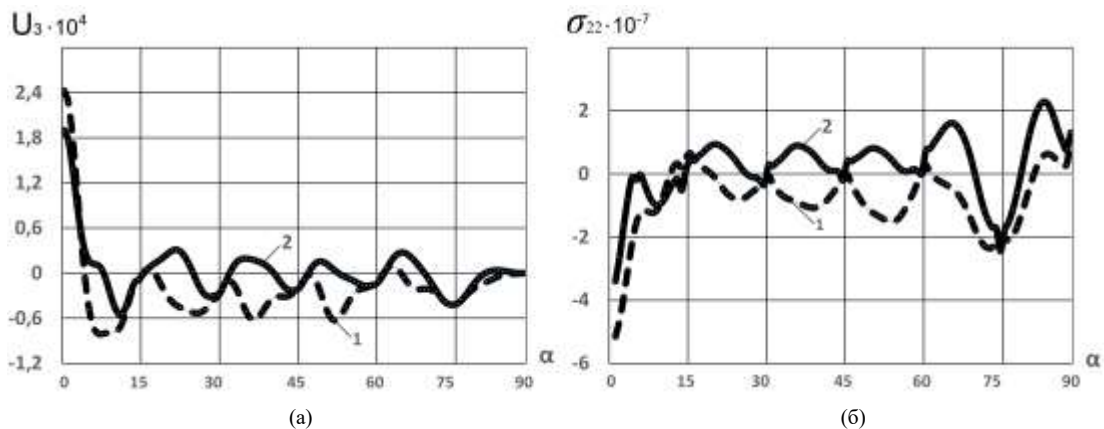


Рис. 3. Максимальні прогини u_3^1 ; u_3^2 (а) і напруження σ_{22}^1 ; σ_{22}^2 (б) в серединній поверхні несучих шарів при $t = 10T$ ($E_{1,2}/E_t = 500$)

На рис. 3,б наведені порівняльні графіки максимальних напружень σ_{22}^1 (1), σ_{22}^2 (2) в серединних поверхнях несучих шарів від просторової координати x в момент часу $t = 10T$ (у цей момент величини досягають максимального значення в розрахунковому інтервалі часу t).

Перші п'ять власних частот даної тришарової структури становлять: 1) 1411,10 Гц, 2) 1411,10 Гц, 3) 1941,12 Гц, 4) 2277,20 Гц, 5) 2277,20 Гц.

На рис. 4,а наведено порівняльні графіки максимальних прогинів у серединних поверхнях несучих шарів від кутової координати α в момент часу $t=8,7T$. Заповнювач відповідає співвідношенню $E_{1,2}/E_t = 50$.

На рис. 4,б наведені отримані в цей же час порівняльні графіки максимальних напружень σ_{22}^1 і σ_{22}^2 .

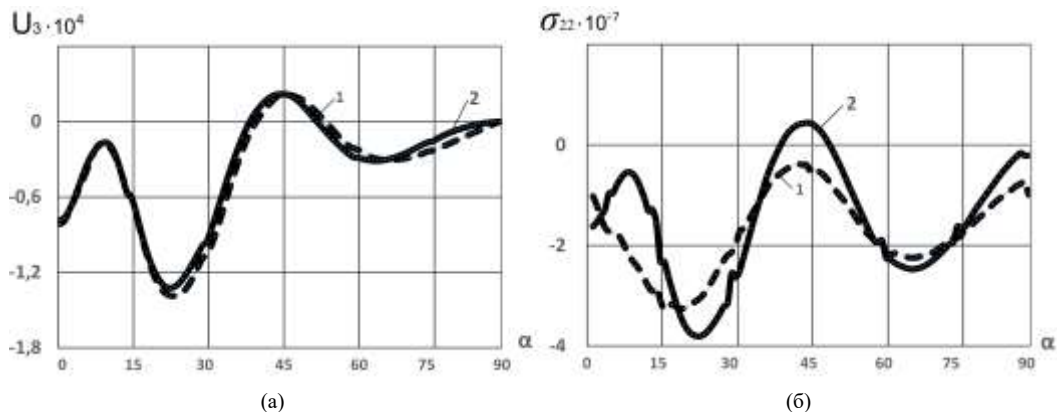


Рис. 4. Максимальні прогини $u_3^1; u_3^2$ (а) і напруження $\sigma_{22}^1; \sigma_{22}^2$ (б) в серединній поверхні несучих шарів при $t=8,7T$ ($E_{1,2}/E_t = 50$)

Перші п'ять власних частот даної тришарової структури становлять: 1) 1533,19 Гц, 2) 1533,19 Гц, 3) 2145,03 Гц, 4) 2456,68 Гц, 5) 2456,68 Гц.

Аналіз чисельних результатів характеристик напружено-деформованого стану в серединних поверхнях оболонки показує, що в першому варіанті (рис. 3,а, 4,а) максимальні прогини внутрішнього шару у варіанті співвідношення $E_1/E_t = 500$ перевищили аналогічні прогини структури при співвідношенні $E_1/E_t = 50$ на 1,6 рази, а максимальні прогини зовнішнього шару при аналогічному порівнянні – мали перевищення на 28%.

В той же час (рис. 3,б, 4,б) максимальні величини нормального напруження внутрішнього шару у випадку співвідношення $E_1/E_t = 500$ перевищили аналогічні напруження структури при співвідношенні $E_1/E_t = 50$ майже в 1,7 рази, а максимальні напруження зовнішнього шару при $E_1/E_t = 500$ перевищили максимальні величини напруження зовнішнього шару при $E_1/E_t = 50$ приблизно на 12%.

Другий варіант структури: мав відношення модулів пружності несучих шарів до модуля пружності заповнювача: $E_2/E_t = 500$; $E_2/E_t = 50$; $E_1 = 2 \cdot 10^{11}$ Па; $E_2 = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $h_1 = h_2 = 0,002$ м; $H_j = 10h_2$; $R_1 = 0,3$; $h/R_1 = 0,08$; $F_j = 2 \cdot 10^{-4}$ м²; $\rho_1 = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³; $\rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³; $\nu_1 = \nu_2 = \nu_j = 0,3$. Фізичні і механічні параметри характеристик полімерного заповнювача були наступні: $E_t = 1,4 \cdot 10^8$ Па; $E_t = 1,4 \cdot 10^9$ Па; $\rho_t = 25$ кг/м³; $\nu_t = 0,33$. Загальна маса такої структури дорівнює 13,438 кг, а заповнювача – 0,299 кг і ребер - 0,719 кг.

На рис. 5,а наведено залежності максимальних величин нормальних прогинів внутрішнього (1) і зовнішнього (2) несучих шарів в серединних поверхнях від кутової координати α , при $t=9,35T$ із заповнювачем $E_2/E_t = 500$.

На рис. 5,б наведено залежності величин нормальних напружень σ_{22}^1 і σ_{22}^2 серединних поверхнях несучих шарів від кутової координати α , в момент часу $t=9,35T$. Пінопласт: $E_2/E_t = 500$.

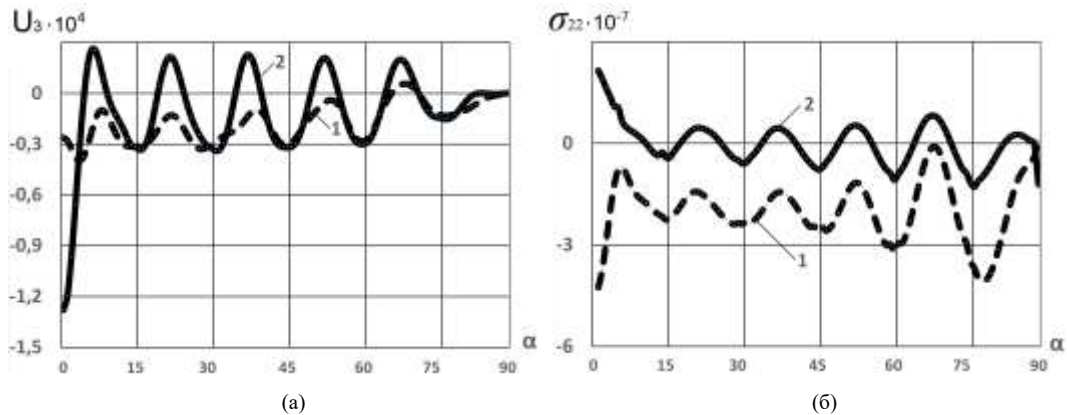


Рис. 5. Максимальні прогини $u_3^1; u_3^2$ (а) і напруження $\sigma_{22}^1; \sigma_{22}^2$ (б) в серединній поверхні несучих шарів при $t = 9,35T$ ($E_2/E_t = 500$)

Перші п'ять власних частот даної тришарової структури становлять: 1) 1456,95 Гц, 2) 1456,95 Гц, 3) 1980,59 Гц, 4) 2352,31 Гц, 5) 2352,31 Гц.

На рис. 6а наведено графіки максимальних прогинів коливальних процесів у серединних поверхнях несучих шарів від кутової координати α в момент часу $t = 8,65T$. Заповнювач співвідношенням $E_2/E_t = 50$.

На рис. 6б наведені порівняльні графіки максимальних напружень $\sigma_{22}^1, \sigma_{22}^2$ в момент часу $t = 8,4T$.

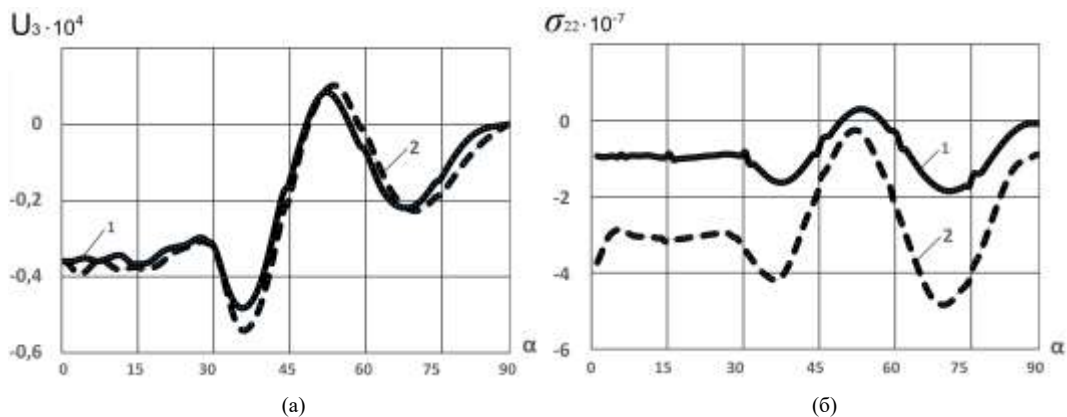


Рис. 6. Максимальні прогини $u_3^1; u_3^2$ (а) і напруження $\sigma_{22}^1; \sigma_{22}^2$ (б) в серединній поверхні несучих шарів при $t = 8,65T$ ($E_2/E_t = 50$)

Перші п'ять власних частот даної структури становлять: 1) 1539,94 Гц, 2) 1539,94 Гц, 3) 2123,00 Гц, 4) 2469,09 Гц, 5) 2469,09 Гц.

Проведенні дослідження чисельних результатів показників напружено-деформованого стану в серединних поверхнях несиметричної структури другого випадку (рис. 5,а, 6,а) показують, що максимальні прогини внутрішнього шару при співвідношенні $E_2/E_t = 500$ були меншими аналогічних прогинів структури при співвідношенні $E_2/E_t = 50$ майже на 58%, а максимальні прогини зовнішнього шару, перевищили майже в 2,7 рази аналогічні прогини структури при співвідношенні $E_2/E_t = 50$.

Максимальні величини нормального напруження внутрішнього шару (рис. 5,б, 6,б) у структурі із $E_2/E_t = 500$ були меншими на 14% ніж у такому ж шарі структури із

співвідношенням $E_2/E_t = 50$, а максимальні напруження зовнішнього шару при розгляді відповідних варіантів цього випадку були більшими на 15%.

Третій варіант структури: відношення модулів пружності несучих шарів до модуля пружності заповнювача: $E_{1,2}/E_t = 500$; $E_{1,2}/E_t = 50$; $E_1 = E_2 = 7 \cdot 10^{10}$ Па; $h_1 = 0,002$ м; $h_2 = 0,004$ м; $H_j = 4,5h_2$; $R_1 = 0,3$; $h/R_1 = 0,08$; $F_j = 2 \cdot 10^{-4}$ м²; $\rho_1 = \rho_2 = \rho_j = 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³; $\nu_1 = \nu_2 = \nu_j = 0,3$.

Фізико-механічні параметри для заповнювача (пінопласту) наступні: $E_t = 1,4 \cdot 10^8$ Па; $E_t = 1,4 \cdot 10^9$ Па; $\rho_t = 25$ кг/м³; $\nu_t = 0,33$. Маса конструкції дорівнює 11,019 кг, заповнювача – 0,268 кг, ребер – 0,643 кг.

На рис. 7,а приведено залежності максимальних величин нормальних прогинів u_3^1 внутрішнього і зовнішнього u_3^2 несучих шарів в їх серединних поверхнях від кутової координати α в момент часу $t = 4,26T$, $E_{1,2}/E_t = 500$.

На рис. 7,б у приведеному масштабі наведено залежності величин нормальних напружень σ_{22} у серединних поверхнях несучих шарів від кутової координати α в цей же момент часу.

Перші п'ять власних частот даної тришарової структури становлять: 1) 1430,57 Гц, 2) 1430,57 Гц, 3) 1953,91 Гц, 4) 2300,09 Гц, 5) 2300,09 Гц.

На рис. 8,а наведено залежності максимальних величин нормальних прогинів внутрішнього (1) і зовнішнього (2) несучих шарів в їх серединних поверхнях від кутової координати в момент часу $t = 8,85T$. Полімерний заповнювач відповідав $E_{1,2}/E_t = 50$.

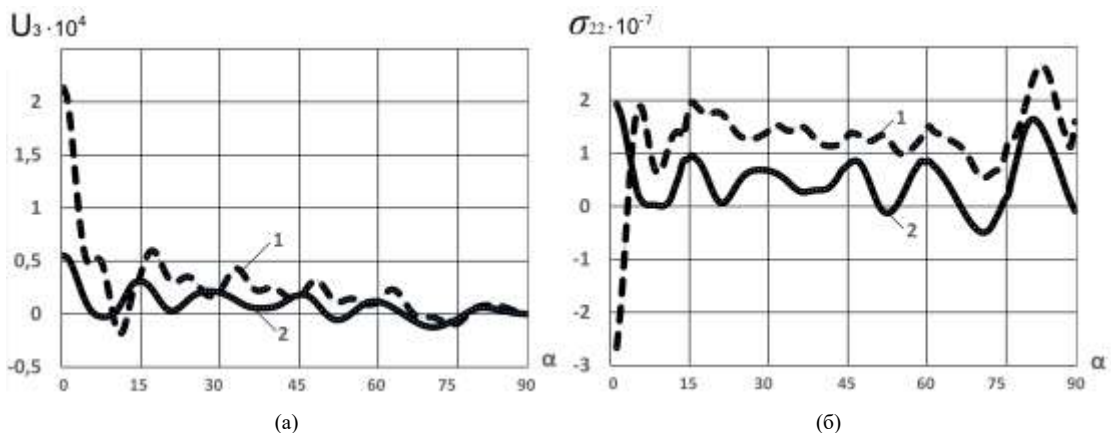


Рис. 7. Максимальні прогини u_3^1 ; u_3^2 (а) і напруження σ_{22}^1 ; σ_{22}^2 (б) в серединній поверхні несучих шарів при $t = 4,26T$ ($E_{1,2}/E_t = 500$)

На рис. 8,б наведено залежності величин нормальних напружень в серединних поверхнях внутрішнього (1) і зовнішнього (2) несучих шарів від кутової координати, в момент часу $t = 8,85T$. Полімерний заповнювач був тієї ж пружності.

Перші п'ять власних частот даної тришарової структури становлять: 1) 1517,67 Гц, 2) 1517,67 Гц, 3) 2103,32 Гц, 4) 2429,30 Гц, 5) 2429,30 Гц.

Порівнюючи показники НДС третього варіанту структур з різною пружністю заповнювача видно, що при $E_{1,2}/E_t = 500$ максимальні прогини внутрішнього шару перевищили аналогічні прогини структури з заповнювачем $E_{1,2}/E_t = 50$ в 2,5 рази, при цьому максимальні величини прогинів зовнішніх шарів у даних варіантах відрізнялися в 1,6 рази.

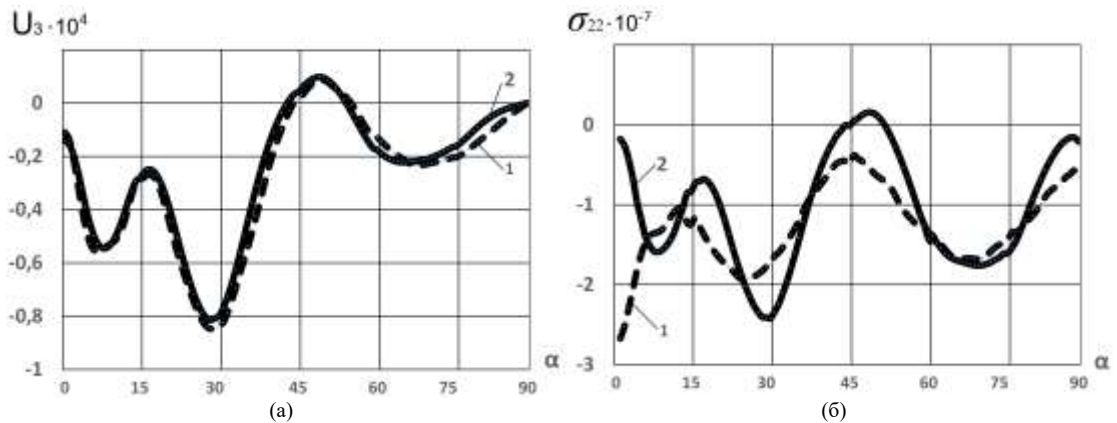


Рис. 8. Максимальні прогини u_3^1 ; u_3^2 (а) і напруження σ_{22}^1 ; σ_{22}^2 (б) в серединній поверхні несучих шарів при $t = 8,85T$ ($E_{1,2}/E_t = 50$)

Максимальні нормальні напруження внутрішнього шару (рис. 7,б, 8,б) при співвідношеннях $E_{1,2}/E_t = 500$ і $E_{1,2}/E_t = 50$ були майже однаковими, а максимальні напруження зовнішнього шару першого випадку були меншими аналогічних напружень зовнішнього шару другого випадку цього варіанту майже на 25 %.

Отже, загальною тенденцією динаміки всіх розглянутих варіантів структур тришарової півсферичної оболонки виявилось значне реагування на зміну модуля пружності полімерного заповнювача, величина якого істотно вплинула на характер коливання.

Як свідчать результати розрахунку: збільшення на порядок модуля пружності полімерного заповнювача істотно зменшує в структурі ефект дії армування.

Висновок. Проведено лінійний динамічний аналіз перехідних процесів тришарової напівсферичної оболонки симетричної і несиметричної структури із дискретно-симетричним полімерним, армованим ребрами заповнювачем. При аналізі елементів пружних оболонкових структур використано модель теорії оболонок та стержнів Тимошенко. Досліджено напружено-деформований стан несучих шарів структур при осесиметричному нестационарному навантаженні.

Скінченно-елементним методом виконані чисельні розрахунки максимальних величин нормальних прогинів u_3 і нормальних напружень σ_{22} в серединних поверхнях несучих шарів оболонок. Отримані результати показують що параметри геометрії несучих шарів структури, фізико-механічні властивості їх матеріалу та пружність заповнювача значно впливають на нестационарний динамічний процес півсферичної оболонкової структури.

Таким чином, підбираючи матеріал шаруватого пакету півсферичної структури, товщину її несучих шарів, пружність заповнювача можна створювати конструкцію півсферичної оболонки з прогнозованою динамічною поведінкою при нестационарному навантаженні, виявляти нові механічні ефекти.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Головкин К.Г., Луговой П.З., Мейш В.Ф. Динамика неоднородных оболочек при нестационарных нагрузках (под ред. акад. НАН Украины А. Н. Гузя). – Киев: Изд. – полиграф. центр «Киевский ун-т», 2012. – 541 с.
2. Луговой П.З., Мейш В.Ф., Мейш Ю.А. Динамика конструктивно-неоднородных оболочковых структур: монография – К.: Ліпа-К, 2022. – 336 с.
3. Lugovoi, P.Z., Sirenko, V.N., Prokopenko N.Ya., Klimenko K.V. Influence of the Parameters of a Non-Constant Disturbing Load on the Transient Process of Vibrations of a Ribbed Cylindrical Shell // International Applied Mechanics, 2017, 53, №6 – P. 680–687.
4. Meish V.F. and Shtantsel S.E. Dynamic problems in the theory of sandwich shells of revolution with a discrete core under nonstationary loads // International Applied Mechanics, 2002, 38, № 12 – P. 1501 – 1507.
5. Lugovoi, P.Z., Meish, V.F. Dynamics of Inhomogeneous Shell Systems Under Non-Stationary Loading (Survey) // International Applied Mechanics, 2017, 53, – P. 481–537.
6. Meish V.F., Meish Yu.A., Pavlyuk A.V. Dynamics of a Three-Layer Elliptic Cylindrical Shell Reinforced with Discrete Rings // International Applied Mechanics, 2018, 54, № 2 – P. 172 – 179.

7. *Lugovyi P.Z., Gaidaichuk V.V., Orlenko S.P., Kotenko K. E.* Dynamics of Asymmetric Three-layer Spherical Shells with Discretely Inhomogeneous Core under Nonstationary Loading "International Applied Mechanics", 2023, 59(2), P. 175–186.
8. *Lugovyi P.Z., Gaidaichuk V.V., Orlenko S.P., Kotenko K. E.* Dynamics of Asymmetric Three-Layer Hemispherical Shells with a Discrete-Inhomogeneous Filler Under Pulsed Loads // *Strength of Materials*. 2023. 59, № 2.-P. 265–276.
9. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки.–М.: Наука, 1966.– 636 с.
10. *Frostig Y., Thomsen O.T.* Higher-order free vibration of sandwich panels with a flexible core // *Int. J. Solids Struct.* – 2004. – 41. – P. 1697 – 1724.
11. *Рычков С. П.* Моделирование конструкций в среде Femap with NX Nastran. – М.: ДМК Пресс, 2016. – 784 с.
12. *Сегерлинд Л.* Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979.- 392 с.

REFERENCES

1. *Golovko K.G., Lugovoy P.Z., Meish V.F.* Dinamika neodnorodnyh obolochek pri nestacionarnykh nagruzkah (Dynamics of inhomogeneous shells under unsteady) – Kiev: Izd. – poligraf. centr «Kievskij un-t», 2012. – 541 s.
2. *Lugovij P.Z., Meish V.F., Meish Yu.A.* Dinamika konstruktivno-neodnorodnykh obolonkovykh struktur: monografiya (Dynamics of structurally inhomogenous shell structures: monograph)– K.: Lira-K, 2022. – 336 s.
3. *Lugovoi, P.Z., Sirenko, V.N., Prokopenko N.Ya., Klimenko K.V.* Influence of the Parameters of a Non-Constant Disturbing Load on the Transient Process of Vibrations of a Ribbed Cylindrical Shell // *International Applied Mechanics*, 2017, 53, №6 – P. 680–687.
4. *Meish V.F. and Shtantsel S.E.* Dynamic problems in the theory of sandwich shells of revolution with a discrete core under nonstationary loads // *International Applied Mechanics*, 2002, 38, № 12 – P. 1501 – 1507.
5. *Lugovoi, P.Z., Meish, V.F.* Dynamics of Inhomogeneous Shell Systems Under Non-Stationary Loading (Survey) // *International Applied Mechanics*, 2017, 53, – P. 481–537.
6. *Meish V.F., Meish Yu.A., Pavlyuk A.V.* Dynamics of a Three-Layer Elliptic Cylindrical Shell Reinforced with Discrete Rings // *International Applied Mechanics*, 2018, 54, № 2 – P. 172 – 179.
7. *Lugovyi P.Z., Gaidaichuk V.V., Orlenko S.P., Kotenko K. E.* Dynamics of Asymmetric Three-layer Spherical Shells with Discretely Inhomogeneous Core under Nonstationary Loading "International Applied Mechanics", 2023, 59(2), P. 175–186.
8. *Lugovyi P.Z., Gaidaichuk V.V., Orlenko S.P., Kotenko K. E.* Dynamics of Asymmetric Three-Layer Hemispherical Shells with a Discrete-Inhomogeneous Filler Under Pulsed Loads // *Strength of Materials*. 2023. 59, № 2.-P. 265–276.
9. *Timoshenko S.P., Vojnovskij-Kriger S.* Plastinki i obolochki (Plates and shells) – М.: Nauka, 1966. – 636 s. 8.
10. *Frostig Y., Thomsen O.T.* Higher-order free vibration of sandwich panels with a flexible core // *Int. J. Solids Struct.* – 2004. – 41. – P. 1697 – 1724.
11. *Rychkov S. P.* Modelirovanie konstrukcij v srede Femap with NX Nastran (Modeling of structures in the Femap with NX Nastran environment)– М.: DMKPress, 2016. – 784 s.
12. *Segerlind L.* Primenenie metoda konechnykh elementov (Application of the finite element method). М.: Mir, 1979 - 392 p.

Стаття надійшла 27.01.2025

Гайдайчук В.В., Котенко К.Е., Мамедов А.М.

ДИНАМІКА ТРИШАРОВОЇ НАПІВСФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ПРИ НЕСТАЦІОНАРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Динамічні процеси є визначальними при розрахунку поведінки конструкцій шаруватих структур. На даний час проблема дослідження нестационарних динамічних процесів шаруватих оболонкових структур для оцінки їх працездатності при динамічних навантаженнях є достатньо актуальною.

На прикладі тришарової напівсферичної оболонки симетричної і несиметричної структури з дискретно-неоднорідним заповнювачем досліджено нестационарні динамічні процеси. В дослідженнях застосовано зсувну теорію оболонок і стержнів С.П. Тимошенка з використанням незалежних статичних і кінематичних гіпотез до кожного шару і використано скінченно-елементний метод розрахунків характеристик напружено-деформованого стану (НДС) і коливань структури.

Для виведення рівнянь коливань несиметричної тришарової неоднорідної за товщиною структури використовується варіаційний принцип стаціонарності Гамільтона–Остроградського.

Створено скінченно-елементну модель структури для проведення числового аналізу динаміки шаруватої напівсферичної оболонки з дискретним армованим ребрами заповнювачем під дією динамічного навантаження.

Виявлено вплив фізико-механічних і геометричних параметрів несучих шарів на НДС тришарової оболонки при динамічному навантаженні. Наведені числові результати розв'язку конкретних задач, виявлені нові механічні ефекти.

Загальною тенденцією динаміки всіх розглянутих варіантів структур тришарової півсферичної оболонки виявилось значне реагування на зміну модуля пружності полімерного заповнювача, величина якого істотно вплинула на характер коливання. Отримані результати розрахунку свідчать: збільшення на порядок модуля пружності полімерного заповнювача істотно зменшує в структурі ефект дії армування.

Проведені дослідження показують, що шляхом вибору матеріалу шаруватого пакету півсферичної структури, товщини її несучих шарів, пружності заповнювача можна створювати конструкцію півсферичної оболонки з прогнозованою динамічною поведінкою при нестационарному навантаженні, виявляти нові механічні ефекти.

Ключові слова: динаміка, тришарова напівсферична оболонка несиметричної структури, легкий заповнювач, армуючі ребра, граничні умови, метод скінченних елементів, механічні ефекти.

Gaidaichuk V.V., Kotenko K.E., Mamedov A.M.

DYNAMICS OF A THREE-LAYER HEMISPHERICAL SHELL UNDER NON-STATIONARY LOADING

Dynamic processes are decisive in calculating the behavior of layered structures. Currently, the problem of studying non-stationary dynamic processes of layered shell structures to assess their performance under dynamic loads is quite relevant.

On the example of a three-layer hemispherical shell of a symmetric and asymmetric structure with a discrete-inhomogeneous filler, non-stationary dynamic processes were investigated. In the studies, the shear theory of shells and rods of S.P. Timoshenko was applied using independent static and kinematic hypotheses for each layer and the finite element method was used to calculate the characteristics of the stress-strain state (SSS) and structural vibrations.

To derive the oscillation equations of an asymmetric three-layer structure inhomogeneous in thickness, the Hamilton-Ostrogradsky variational principle of stationarity was used.

A finite element model of the structure was created for numerical analysis of the dynamics of a layered hemispherical shell with a discrete rib-reinforced filler under the action of dynamic loading.

The influence of the physical, mechanical and geometric parameters of the load-bearing layers on the SSS of a three-layer shell under dynamic loading was revealed. Numerical results of solving specific problems are presented.

The general trend of the dynamics of all considered variants of the three-layer hemispherical shell structures was a significant response to a change in the elastic modulus of the polymer filler, the magnitude of which significantly affected the nature of the oscillation.

The obtained calculation results indicate: an increase in the elastic modulus of the polymer filler by an order of magnitude significantly reduces the effect of the reinforcement action in the structure.

The conducted studies show that by selecting the material of the layered package of the hemispherical structure, the thickness of its bearing layers, and the elasticity of the filler, it is possible to create a hemispherical shell structure with predicted dynamic behavior under unsteady loading, and to discover new mechanical effects.

Key words: dynamics, three-layer hemispherical shell of asymmetric structure, lightweight aggregate, reinforcing ribs, boundary conditions, finite element method, mechanical effects.

УДК 539.3

Гайдайчук В.В., Котенко К.Е., Мамедов А.М. Динаміка тришарової напівсферичної оболонки при нестационарному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА. – 2025. – Вип. 114. – С. 83-93. Л. 8. Бібліогр. 12 назв.

UDC 539.3

Gaidaichuk V.V., Kotenko K.E., Mamedov A.M. Dynamics of a three-layer hemispherical shell under non-stationary loading // Strength of Materials and Theory of Structures: Scientific-and-technical collected articles. – K.: KNUBA. – 2025. – Issue 114. – P. 83-93.

Fig. 8. Ref. 12.

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри теоретичної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури ГАЙДАЙЧУК Віктор Васильович

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, проспект Повітряних Сил, 31, к. 433, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра теоретичної механіки, ГАЙДАЙЧУКУ Віктору Васильовичу

Роб. тел. +380 (44) 241-55-72

Моб. тел. +380 (97) 542-94-27

E-mail: viktor_gaydaychuk@bigmir.net

ORCIDID: <https://orcid.org/0000-0003-2059-7433>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, професор кафедри теоретичної механіки Київського національного університету будівництва і архітектури КОТЕНКО Костянтин Едуардович

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, проспект Повітряних Сил, 31, к. 433, Київський національний університет будівництва і архітектури, кафедра теоретичної механіки

Роб. тел. +380 (44) 241-55-72

Моб. тел. +380 (95) 585-20-76

E-mail: 1969box@mail.ru

ORCIDID: <https://orcid.org/0000-0002-3181-3819>

Автор (науковий ступінь, вчене звання, посада): кандидат технічних наук, доцент, декан факультету урбаністики та просторового планування, Київський національний університет будівництва і архітектури; МАМЕДОВ Алірза Махмудович

Адреса робоча: 03680 Україна, м. Київ, проспект Повітряних Сил, 31, Київський національний університет будівництва і архітектури, деканат факультету урбаністики та просторового планування

Роб. тел. +380 (44) 248-30-32; +380 (44) 241-55-11

Моб. тел. +380 (67)107-8956

E-mail: mamedov.am@knuba.edu.ua

ORCID ID: <https://orcid.org/0000-0003-4703-2694>