

УДК 539.3

А.Д. Легостаєв, ст. наук. співр.
 Н.А. Гречух, наук. співр.

ПОБУДОВА СПІВВІДНОШЕНЬ МСЕ ДЛЯ ПРОСТОРОВОГО ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНОГО СКІНЧЕНОГО ЕЛЕМЕНТА

Передбачено побудувати співвідношення просторового скінченного елемента, який дає змогу створювати моделі як тонких, так і не тонких оболонок і пластин з одношаровою апроксимацією конструкції по товщині з використанням лінійного закону змінювання розв'язувальної функції в межах СЕ, що дасть змогу отримати задовільні результати при мінімальному числі невідомих. Спрощена апроксимація переміщень може привести до спотворення модуля пружності і коефіцієнта Пуассона. Для компенсації такого явища передбачені два прийоми: вводиться гіпотеза про постійність напружень, орієнтованих по нормалі до серединної поверхні, та враховується змінність геометричних параметрів по товщині оболонки.

1. Побудова співвідношень для обчислення матриці жорсткості СЕ.

При одношаровій апроксимації оболонок (один СЕ по товщині) місцеву систему координат в елементі вибираємо таким чином, щоб вісь x^1 була орієнтована по товщині оболонки, а осі x^2 і x^3 розташовувались в площині, дотичній до серединної поверхні.

Початок місцевої системи координат пов'язаний із центром СЕ.

Гіпотеза про постійність напружень $\sigma^{11} = const$ не вносить суттєвої похибки в просторовий елемент, надає можливість враховувати поперечну деформацію оболонки і не потребує визначення переміщень у місцевій системі координат, що дає змогу задавати переміщення для всіх фрагментів комбінованої конструкції у єдиній глобальній системі координат, в якій умови контакту формулюються досить просто.

Напруження у напрямку x^1 подано відрізком ряду Маклорена із збереженням двох членів:

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ij} \Big|_0 + M^{ij} \Big|_0 x^1, \quad (1)$$

де

$$\sigma^{ij} = C^{*ijmn} \zeta_{mn}, \quad (2)$$

$$M^{ij} = \frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial x^1} = C_{,1}^{*ijmn} \zeta_{mn} + C^{*ijmn} \zeta_{mn,1}, \quad (3)$$

$$\zeta_{mn} = Z_n^{k'} \frac{\partial u_k}{\partial x^m}. \quad (4)$$

У відповідності з прийнятою гіпотезою, запишемо рівність:

$$\begin{aligned} M^{11} \Big|_{x^1=0} &= C_{,1}^{*11mn} \zeta_{mn} \Big|_{x^1=0} + C^{*1111} \zeta_{11,1} \Big|_{x^1=0} + \\ &+ C^{*11} \zeta_{MN,1} \Big|_{x^1=0} (1 - \delta_{(m)}^1 \delta_{(n)}^1) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

із якої отримаємо :

$$\zeta_{11,1} \Big|_{x^1=0} = - \frac{C_{,1}^{*11mn}}{C^{*1111}} \zeta_{mn,1} \Big|_{x^1=0} - \frac{C^{*11mn}}{C^{*1111}} (1 - \delta_{(m)}^1 \delta_{(n)}^1) \zeta_{mn,1} \Big|_{x^1=0}. \quad (6)$$

Вісь x^1 місцевої системи координат з причини пологості поверхні в межах СЕ несуттєво відхиляється від нормалі до серединної поверхні, а тому похідною від компонент тензора пружності по x^1 , що входять в (38) можна знехтувати. Тоді

$$\begin{aligned} \sigma^{ij} &= C^{*ijmn} \zeta_{mn} \Big|_0 + C^{*ijmn} (1 - \delta_m^1 \delta_n^1) x^1 \zeta_{mn,1} \Big|_0 - \\ &- \frac{C^{*ij11} \cdot C^{*11mn}}{C^{*1111}} \zeta_{mn,1} \Big|_0 (1 - \delta_m^1 \delta_n^1) C^1 = \\ &= C^{*ijmn} \zeta_{mn} \Big|_0 + \left(C^{*ijmn} - \frac{C^{*ij11} \cdot C^{*11mn}}{C^{*1111}} \right) \left((1 - \delta_m^1 \delta_n^1) x^1 \zeta_{mn,1} \Big|_0 \right) \zeta_{mn,1} \Big|_0 = \\ &= C^{*ijmn} \zeta_{mn} \Big|_0 + B^{ijmn} \zeta_{mn,1} \Big|_0 x^1. \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$B^{ijmn} = \left(\begin{array}{c} *ijmn \\ C \end{array} - \frac{*ij^{11} \cdot *C^{11mn}}{*C^{1111}} \right) (1 - \delta_m^1 \delta_n^1). \quad (8)$$

У відповідності з положеннями моментної схеми МСЕ [1], розкладемо величини ζ_{mn} в ряд Маклорена в центрі МСЕ ($x^1 = x^2 = x^3 = 0$) і утримаємо три перших члена

$$\begin{aligned} \zeta_{11} &= \zeta_{11}|_0 + \frac{\partial \zeta_{11}}{\partial x^2} \Big|_0 x^2 + \frac{\partial \zeta_{11}}{\partial x^3} \Big|_0 x^3 + \frac{\partial^2 \zeta_{11}}{\partial x^2 \partial x^3} \Big|_0 x^2 x^3, \\ \zeta_{22} &= \zeta_{22}|_0 + \frac{\partial \zeta_{22}}{\partial x^1} \Big|_0 x^1 + \frac{\partial \zeta_{22}}{\partial x^3} \Big|_0 x^3 + \frac{\partial^2 \zeta_{22}}{\partial x^1 \partial x^3} \Big|_0 x^1 x^3, \\ \zeta_{33} &= \zeta_{33}|_0 + \frac{\partial \zeta_{33}}{\partial x^1} \Big|_0 x^1 + \frac{\partial \zeta_{33}}{\partial x^2} \Big|_0 x^2 + \frac{\partial^2 \zeta_{33}}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_0 x^1 x^2, \\ \zeta_{21} &= \zeta_{21}|_0 + \frac{\partial \zeta_{21}}{\partial x^3} \Big|_0 x^3, \quad \zeta_{31} = \zeta_{31}|_0 + \frac{\partial \zeta_{31}}{\partial x^2} \Big|_0 x^2, \\ \zeta_{12} &= \zeta_{12}|_0 + \frac{\partial \zeta_{12}}{\partial x^3} \Big|_0 x^3, \quad \zeta_{32} = \zeta_{32}|_0 + \frac{\partial \zeta_{32}}{\partial x^1} \Big|_0 x^1, \\ \zeta_{13} &= \zeta_{13}|_0 + \frac{\partial \zeta_{23}}{\partial x^2} \Big|_0 x^2, \quad \zeta_{23} = \zeta_{23}|_0 + \frac{\partial \zeta_{23}}{\partial x^1} \Big|_0 x^1 \end{aligned} \quad (9)$$

або в компактному запису:

$$\zeta_{ij} = \zeta_{ij} + \varphi_{ij}^m x^m \omega_{(ij)}^{(mn)} + \psi_{ij}^{mn} x^m x^n \omega_{(mn)}^{(nij)} \delta_{(ij)}^{(i)}, \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} \zeta_{ij} &= \zeta_{ij}|_0, \quad \varphi_{ij}^m = \frac{\partial \zeta_{ij}}{\partial x^m} \Big|_0, \quad \psi_{ij}^{mn} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \zeta_{ij}}{\partial x^m \partial x^n} \Big|_0, \quad \omega_{i\dots k} = \omega_m^i \omega_n^j \dots, \\ \omega_m^i &= \begin{cases} 1 & \text{при } i \neq m \\ 0 & \text{при } i = m \end{cases}. \end{aligned} \quad (11)$$

Коефіцієнт матриці жорсткості СЕ отримаємо на основі формули для пружного потенціалу

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_v \sigma^{ij} \frac{1}{2} \left(Z'_j \delta \frac{\partial u'_i}{\partial x^i} \delta u'_i + Z'_i \delta \frac{\partial u'_j}{\partial x^j} + \frac{\partial u'_i}{\partial x^i} \delta \frac{\partial u'_j}{\partial x^j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x^j} \delta \frac{\partial u'_i}{\partial x^i} \right) dv = \\ &= \int_v \sigma^{ij} \left(Z'_j + \frac{\partial u'_i}{\partial x^j} \right) \delta \frac{\partial u'_i}{\partial x^i} dv \end{aligned}$$

у якій введено тензор скінченних деформацій

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(Z'_j \cdot \frac{\partial u'_i}{\partial x^i} + Z'_i \frac{\partial u'_j}{\partial x^j} + \frac{\partial u'_i}{\partial x^i} \cdot \frac{\partial u'_j}{\partial x^j} \right).$$

З урахуванням (1) і (7), виконавши інтегрування по криволінійних координатах, остаточно отримуємо:

$$\delta W_{CE} = \int_{x^1 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^3 = -\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(C^{ijmn} \zeta_{mn} \Big|_{x^1=0} + B \zeta_{mn,1} \Big|_{x^1=0} x^1 \right) \delta \zeta_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (12)$$

Граденти вектора переміщень та їх похідні по x^1 . Що входять в (12) для $x^1 = 0$ у відповідності з (10) мають значення:

$$\begin{aligned} \zeta_{11} \Big|_{x^1=0} &= \zeta_{11}, \quad \zeta_{11,1} \Big|_{x^1=0} = 0, \quad \zeta_{21} \Big|_{x^1=0} = \zeta_{21}, \\ \zeta_{21,1} \Big|_{x^1=0} &= 0, \quad \zeta_{31} \Big|_{x^1=0} = \zeta_{31}, \quad \zeta_{31,1} \Big|_{x^1=0} = 0, \\ \zeta_{21} \Big|_{x^1=0} &= \zeta_{12}, \quad \zeta_{12,1} \Big|_{x^1=0} = 0, \quad \zeta_{22} = \zeta_{22} \Big|_0 + \zeta_{22,3} \Big|_0 x_1^3, \\ \zeta_{22,1} \Big|_{x^1=0} &= \zeta_{22,1} \Big|_0 + \zeta_{22,3} \Big|_0 + \zeta_{22,3} \Big|_0 x_1^3, \\ \zeta_{32} \Big|_{x^1=0} &= \zeta_{21,1} \Big|_0, \quad \zeta_{32,1} \Big|_{x^1=0} = \zeta_{32,1} \Big|_0, \\ \zeta_{13} \Big|_{x^1=0} &= \zeta_{13}, \quad \zeta_{13,1} \Big|_{x^1=0} = 0, \quad \zeta_{23} \Big|_{x^1=0} = \zeta_{23} \Big|_0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\zeta_{23,1}|_{x^1=0} &= \zeta_{23,1}|_0, \quad \zeta_{33}|_{x^1=0} = \zeta_{33}|_0 + \zeta_{33,2}|_0 x^2, \\ \zeta_{33,1}|_{x^1=0} &= \zeta_{33,1}|_0 + \zeta_{33,2}|_0 x^2.\end{aligned}\quad (13)$$

Співвідношення (12) з урахуванням (11) і (13) набуває вигляду

$$\begin{aligned}\delta W_{CE} &= \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^3=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[C^{ijmn} (\zeta_{11}|_0 x^2 + \zeta_{11,3}|_0 x^3 + \zeta_{1123}|_0 x^2 x^3) + \right. \\ &+ C^{ij21} (\zeta_{21}|_0 + \zeta_{21,3}|_0 x^3) + C^{ij31} (\zeta_{31}|_0 + \zeta_{31,2}|_0 x^2) + \\ &+ C^{ij21} (\zeta_{12}|_0 + \zeta_{12,3}|_0 x^3) + C^{ij22} (\zeta_{22}|_0 + \zeta_{22,2}|_0 x^3) + \\ &+ B^{ij22} (\zeta_{22,1}|_0 x^1 + \zeta_{22,13}|_0 x^1 x^3) + C^{ij32} \zeta_{32}|_0 + B^{ij32} \zeta_{32,1}|_0 x^1 + \\ &+ C^{ij21} (\zeta_{12}|_0 + \zeta_{12,3}|_0 x^2) + C^{ij22} (\zeta_{22}|_0 + \zeta_{22,2}|_0 x^3) + \\ &+ C^{ij23} (\zeta_{33}|_0 + \zeta_{33,2}|_0 x^2) + B^{ij33} (\zeta_{33,1}|_0 x^1 + \zeta_{33,12}|_0 x^1 x^1) \Big] \times \\ &\times \delta \left(\zeta_{ij}|_0 + \zeta_{ij,m}|_0 x^m \omega_{(ij)}^{(mn)} + \frac{1}{2} \zeta_{ij,mn}|_0 x^m x^n \delta_{(j)}^{(i)} \omega_{(mmm)}^{(nii)} \right) \cdot \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (14)\end{aligned}$$

Вважаємо, що геометричні характеристики по товщині SE змінні. Це дає змогу більш точно обчислювати компоненти тензора пружності, особливо у випадку великих градієнтів товщин.

Інтегрування по x^1 в (14) виконується чисельно за квадратурними формулами Гауса [2]. Враховуючи те, що таблиці вагових квадратурних коефіцієнтів відповідають границям інтегрування (-1,+1), обчислення

інтеграла загального вигляду $\int_a^b f(x) dx$ необхідно виконати заміну

$$\text{змінних } z_i = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} x_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Формула Гауса для загального випадку має вигляд:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{a-b}{2} [C_1 f(z_1) + C_2 f(z_2) + \dots C_n f(z_n)] x_i$$

$$z_i = \frac{1}{2} x_i, \quad z_1 = -\frac{0,57735}{2}, \quad z_2 = +\frac{0,57735}{2}.$$

Тоді

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)dx = \frac{1}{2} f(x) \Big|_{x=-0,288675} + \frac{1}{2} f(x) \Big|_{x=0,188675}.$$

Подальші дії, що стосуються виводу формул для обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості СЕ пов'язані з визначенням градієнтів і їх похідних через переміщення, апроксимація яких у межах СЕ подається за полілінійним законом:

$$u^{i'} = \sum_{S_1=+1} \sum_{S_2=+1} \sum_{S_3=+1} u_{S_1 S_2 S_3}^{i'} \prod_{\delta=1}^3 \left(S_{(\delta)} x^{(\delta)} + \frac{1}{2} \right), \quad (15)$$

де $S_{(\delta)}$ – параметри, які визначають положення вузла в локальній системі

координат; $S_{(\delta)} = \begin{cases} 1 & \text{при } x^{(\delta)} > 0 \\ 0 & \text{при } x^{(\delta)} < 0 \end{cases}$; $u_{S_1 S_2 S_3}^{i'}$ – переміщення вузлів СЕ в

декартові системі координат.

При чисельній реалізації МСЕ для тонких оболонок і оболонок середньої товщини суттєвим фактором отримання сприйнятливої точності результатів обчислень є стійкість обчислювального процесу щодо помилок округлення. У випадку лінійного розподілення переміщень по товщині чисельні експерименти показали, що найбільш стійкі результати досягаються тоді, коли у якості незалежних параметрів переміщень прийняти переміщення вузлів на серединній поверхні:

$$U_{S_2 S_3}^{i'} = \frac{1}{2} (u_{+1 S_2 S_3}^{i'} + u_{-1 S_2 S_3}^{i'}) \quad (16)$$

і узагальнених кутів повороту ребер СЕ, орієнтованих по товщин. Кутові переміщення визначаються як різниця переміщень відповідних вузлових точок на обмежуючих поверхнях СЕ

$$\gamma'_{S_2 S_3} = u'_{+1 S_2 S_3} - u'_{-1 S_2 S_3}. \quad (17)$$

Вузлу на нижній обмежувачій поверхні відповідає $S_1 = -1$, а на верхній поверхні – $S_1 = +1$. Зробимо заміну змінних в (15) у відповідності з (16) і (17), тоді

$$\begin{aligned} u^{i'} &= \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \left[u'_{-1 S_2 S_3} \left(-x^1 + \frac{1}{2} \right) \prod_{\delta=2}^3 \left(S_{(\delta)} x^{(\delta)} + \frac{1}{2} \right) \right] = \\ &= u'_{-1 S_2 S_3} \left(-x^1 + \frac{1}{2} \right) \prod_{\delta=2}^3 \left(S_{(\delta)} x^{(\delta)} + \frac{1}{2} \right) \Big] = \\ &= \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \left(-x^1 + \frac{1}{2} \right) \left(v'_{S_2 S_3} - \frac{1}{2} \gamma'_{S_2 S_3} \right) \left(x^1 + \frac{1}{2} \right) \times \\ &\quad \times \left(v'_{S_2 S_3} + \frac{1}{2} \gamma'_{S_2 S_3} \right) \prod_{\delta=2}^3 \left(S_{(\delta)} x^{(\delta)} + \frac{1}{2} \right) = \\ &= \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \left(v'_{S_2 S_3} + x^1 \gamma'_{S_2 S_3} \right) \prod_{\delta=2}^3 \left(S_{(\delta)} x^{(\delta)} + \frac{1}{2} \right). \quad (18) \end{aligned}$$

Гradientи вектора переміщень (15) виражені через переміщення (18) вигляду:

$$\begin{aligned} \zeta_{11}|_0 &= \frac{\partial u^{m'}}{\partial x^1} Z_1^{m'} \Big|_0 = \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \gamma'_{S_2 S_3} \left(S_2 x^2 + \frac{1}{2} \right) \left(S_3 x^3 + \frac{1}{2} \right) Z_1^{m'} \Big|_0 = \\ &= \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_3=\pm 1} \frac{1}{4} \gamma'_{S_2 S_3} Z_1^{m'} \Big|_0. \quad (19) \end{aligned}$$

Після підстановки значень gradientів в (14) і приведення подібних членів при варіаціях о кожному виду переміщень, остаточно отримаємо:

$$\begin{aligned}
 dW_{CE} = & \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{s_2=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \sum_{P_3=\pm 1} \left(K_{\substack{S_1=-1S_2S_3 \\ P_1=-1P_2P_3}}^{b'} \delta u'_{P_2P_3} + \right. \\
 & + K_{\substack{S_1=-1S_2S_3 \\ P_1=-1P_2P_3}}^{b't'} \delta \gamma'_{P_2P_3} + K_{\substack{S_1=-1S_2S_3 \\ P_1=-1P_2P_3}}^{b't'} \gamma'_{S_2S_3} \delta u'_{P_2P_3} + \\
 & \left. + K_{\substack{S_1=-1S_2S_3 \\ P_1=-1P_2P_3}}^{b't'} \gamma'_{S_2S_3} \delta \gamma'_{P_2P_3} \right), \quad (20)
 \end{aligned}$$

де $K_{\substack{S_1=-1S_2S_3 \\ P_1=-1P_2P_3}}^{b't'}$ – коефіцієнти матриці жорсткості скінченного елемента.

2. Побудова співвідношень для обчислення матриці мас СЕ.

В методі скінченних елементів найбільш сприйнятливою для розв'язання задач динаміки є узгоджена матриця мас, методика визначення якої аналогічна процедурі побудови матриці жорсткості.

Скористаємось формулою, що визначає роботу сил інерції на можливих переміщеннях

$$\delta T = \int_v \rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2} \delta u^i dv. \quad (21)$$

Апроксимація переміщень в межах СЕ виконується відповідно (18). За таким же законом змінюються і прискорення:

$$\ddot{u}_i = \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{S_3=\pm 1} \left(\ddot{v}_i^{S_2S_3+x^1} + \gamma_i^{S_2S_3} \right) \prod_{\delta=2}^{-3} \left(S_{(\delta)} x^{(\delta)} + \frac{1}{2} \right). \quad (22)$$

Підставивши (18) і (22) в (21) і виконавши інтегрування в межах СЕ, вважаючи, що \sqrt{g} в межах се залежить від x^1 тримаємо:

$$\delta T_{CE} = \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{S_3=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \sum_{P_3=\pm 1} \int_v \left(\ddot{v}_i^{S_2S_3} + \gamma_i^{S_2S_3} x^1 \right) \prod_{\delta=2}^{-3} \left(S_{(\delta)} x^{(\delta)} + \frac{1}{2} \right) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \delta \left(\ddot{v}_{P_2 P_3}^{i'} + x^1 \dot{\gamma}_{P_2 P_3}^{i'} \right) \prod_{\alpha=2}^{-3} \left(P(\alpha) x^{(\alpha)} + \frac{1}{2} \right) \rho \sqrt{g} dv = \\
& = \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{S_3=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \sum_{P_3=\pm 1} \int_{x^1=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^2=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \int_{x^3=-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left(\ddot{v}_{P_2 P_3}^{i'} \ddot{v}_{P_2 P_3}^{S_2 S_3} + x^1 \ddot{v}_{P_2 P_3}^{S_2 S_3} \delta \gamma_{P_2 P_3}^{i'} + \right. \\
& \quad \left. + x^1 \dot{\gamma}_{P_2 P_3}^{S_2 S_3} \delta v_{P_2 P_3}^{i'} + (x^1) \ddot{\gamma}_{P_2 P_3}^{S_2 S_3} \delta \gamma_{P_2 P_3}^{i'} \right) \prod_{\delta=2}^3 \left(S(\delta) x^{(\delta)} + \frac{1}{2} \right) \times \\
& \quad \times \prod_{\delta=2}^3 \left(P(\alpha) x^{(\alpha)} + \frac{1}{2} \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 = \\
& = \sum_{S_2=\pm 1} \sum_{S_3=\pm 1} \sum_{P_2=\pm 1} \left(S_2 S_3 \ddot{v}_{P_2 P_3}^{S_2 S_3} \delta v_{P_2 P_3}^{i'} m_{P_2 P_3 S_2 S_3} + \ddot{v}_{P_2 P_3}^{S_2 S_3} \delta \gamma_{P_2 P_3}^{i'} m_{P_2 P_3 S_2 S_3} + \right. \\
& \quad \left. + \ddot{\gamma}_{P_2 P_3}^{S_2 S_3} \delta v_{P_2 P_3}^{i'} m'_{P_2 P_3 S_2 S_3} + \ddot{\gamma}_{P_2 P_3}^{S_2 S_3} \delta \gamma_{P_2 P_3}^{i'} m^*_{P_2 P_3 S_2 S_3} \right), \quad (23)
\end{aligned}$$

де елемент матриці еквівалентних мас CE

$$m_{P_2 P_3 S_2 S_3} = \rho \prod_{\delta=2}^3 \frac{S(\alpha) P(\alpha) + 1}{12} I_0, \quad (24)$$

$$m_{P_2 P_3 S_2 S_3} = \rho \prod_{\alpha=2}^3 \frac{S(\alpha) P(\alpha) + 3}{12} I_1, \quad (25)$$

$$m_{P_2 P_3 S_2 S_3} = \rho \prod_{\alpha=2}^3 \frac{S(\alpha) P(\alpha) + 3}{12} I_2, \quad (26)$$

визначимо чисельно на основі двохчленної квадратурної формули Гауса.

3. Дослідження деформованого стану і коливань циліндричної панелі з урахуванням геометричної не лінійності.

Прямокутна в плані полога циліндрична оболонка (рис. 1) підсилена по контуру ребрами жорсткості являє собою кришку оглядового отвору корпусу парової турбіни і знаходиться під дією атмосферного тиску (в

середині корпусу атмосферний тиск відсутній). Використана модель 14×12 скінченних елементів. Проведено дослідження деформованого стану оболонки під дією рівномірно розподіленого по поверхні конструкції тиску у лінійній і геометрично нелінійній постановці.

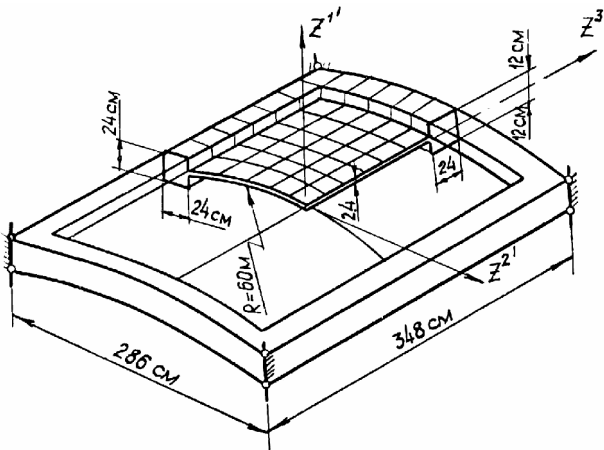


Рис. 1. Оболонка оглядового отвору корпусу парової турбіни

Розв'язок задачі у геометрично нелінійній постановці виконано методом продовження по параметру навантаження у комбінації з методом Ньютона–Канторовича. На рис. 2 суцільною лінією показано графік функції “навантаження – прогин” центральної точки оболонки який відображає характер переміщення цієї точки для восьми кроків навантаження у діапазоні до верхнього критичного значення тиску, що відповідає умовам втрати стійкості. Для кожного із зазначених положень оболонки були зафіксовані переміщення і напруження, які в подальшому використані для обчислення динамічних характеристик оболонки і побудовані графіки зміни частот власних коливань. Найбільш чутливою до змін напруженого стану оболонки є частота основного тону. Пунктирною лінією відображено графік змін відношення цієї частоти до її значення, що відповідає натуральному (ненапруженому) стану конструкції. Одночасно приведено такий же аналіз, але напружено-деформований стан оболонки визначається у лінійній постановці (штрихпунктирна лінія). Порівняння двох графіків показує, що величина тиску, при якому частота основного тону досягає нульового значення (тобто відповідає динамічному критерію втрати стійкості) є реальною тільки для нелінійного алгоритму визначення напружено-деформованого стану

оболонки. Характер зміни п'яти частот власних коливань оболонки від дії напружено-деформованого стану приведений у таблиці 1.

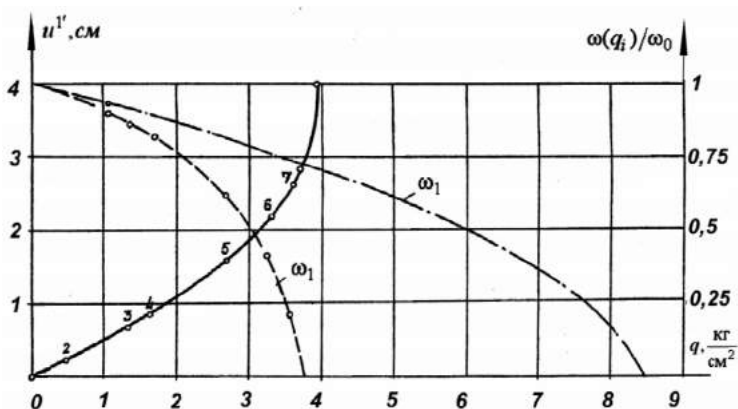


Рис. 2. Зміна частоти основного тону оболонки

Таблиця 1

№	Крок навантаження, кг/см ²	Частота власних коливань, Гц				
		ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5
1	0	63,5	83,1	140,4	148,2	180,2
2	0,5	60,1	82,9	140,0	147,4	178,9
3	1,3	53,7	82,6	139,2	146,1	176,9
4	1,62	50,9	82,5	138,7	145,6	176,0
5	2,64	38,5	82,3	133,5	143,5	171,1
7	3,5	13,0	82,3	131,5	143,8	170,0

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Сахаров А.С. Моментная схема конечных элементов (МСКЭ) с учетом жестких смещений. – Сопrotивление материалов и теория сооружений. – Киев: Будівельник, 1974, вып. 24. С. 147–156.
2. Крылов В.И. Приближенное вычисление интегралов. – М.: Наука, 1967. –265с.

Отримано 30.07.09

A.D. Legostaev, N.A. Grechukh

Построение соотношений МКЭ для пространственного преднапряженного конечного элемента

Предусмотрено построить соотношения пространственного конечного элемента, который позволяет создавать модели как тонких так и не тонких пластин и оболочек при однослойной аппроксимации конструкции по толщине с использованием линейного закона изменения разрешающей функции в пределах КЭ. Это дает возможность получить удовлетворительные результаты при минимальном числе неизвестных. Упрощенная аппроксимация перемещений может привести к искажению модуля упругости и коэффициента Пуассона. Для компенсации этого явления предусмотрено два приема: вводится гипотеза о постоянстве напряжений, ориентированных по нормали к срединной поверхности и учитывается изменение геометрических параметров по толщине оболочки.

A.D. Legostaev, N.A. Grechukh

Construction mfe ratios for spatial prestressed finite element

It is necessary to construct a ratio of a spatial final element, which allows to create models both for thin and not thin plates and shells at one layer approximation of construction on thickness using linear law of changing of permitting function in FE limits. It permits to get satisfactory results at minimal number of unknowns. The simplified approximation of displacements leads to distortion of modulus of elasticity and Poisson coefficient. To indemnification this phenomenon two receptions are accepted: the hypothesis about constant stresses oriented perpendicularly to the middle surface and changing of geometrical parameters on thickness of the shell are taken into account.