

УДК 539.3

І.В. Хромов, канд. техн. наук

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ТИПОВИХ ЗАДАЧ ТЕХНОЛОГІЧНОЇ МЕХАНІКИ ПРУЖНОПЛАСТИЧНОГО СТРИЖНЯ З ВРАХУВАННЯМ НЕЛІНІЙНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ МАТЕРІАЛУ

Для задач складного навантаження стрижня представлені математичні моделі та універсальна процедура визначення напружень на основі розв'язання диференціальних рівнянь течії з врахуванням нелінійних властивостей матеріалу. Наведені приклади чисельного вирішення технологічних задач.

Механіка пружнопластичного стрижня є одним з важливих розділів загальної механіки деформівного твердого тіла, якій постійно розвивається. Аналіз сучасного стану теорії показує, що задачі вказаного розділу доцільно розділити на два класи: задачі, які пов'язані з оцінкою міцності або несучої здатності стрижневих конструкцій (будівельна механіка) [1–4] та задачі дослідження процесів незворотної пружнопластичної формозміни стрижня при силовій обробці (технологічна механіка) [5–8].

Для задач будівельної механіки історія деформації або навантаження не має істотного значення. Тут сповна обґрунтовано використовується деформаційна теорія пластичності, згідно якої зв'язок напружень і деформацій матеріалу описується скінченими аналітичними функціями, не залежними від порядку прикладання сил. Більшість задач цього розділу можуть розв'язуватися на основі методу скінчених елементів з використанням відомих програмних продуктів.

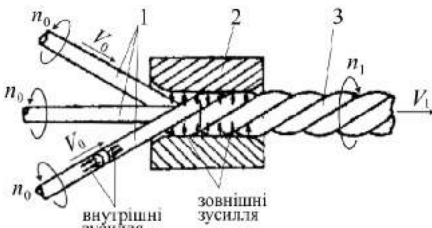


Рис. 1. Схема процесу виготовлення кручених виробів

В технологічній механіці стрижень розглядається як довгомірна заготовка, яка в процесі стаціонарного подовжнього руху під впливом робочих органів технологічного обладнання піддається складній пластичній деформації одночасного розтягу, кручення й гнуття. Характерним прикладом є представлений на рис. 1 процес

виготовлення багатодровових кручених виробів (сталеві канати, кабелі, металокорд).

В даному випадку напружений стан та форма стрижня, тобто технічні параметри готового виробу істотно залежать від історії його деформації на різних етапах технологічного процесу. Ефективне математичне моделювання подібних процесів можливе лише на основі диференціальних рівнянь пластичної течії [9] та потребує розробки спеціальних алгоритмів, методик і програмних продуктів. До теперішнього часу для вирішення подібних задач використовувалися найбільш прості моделі: матеріал без зміцнення або матеріал з лінійним зміцненням [6-8, 10]. На кафедрі технічної механіки і машинознавства Севастопольського національного технічного університету в останні п'ять років виконується цикл робіт по розвитку теоретичних основ механіки пружнопластичного стрижня на випадок матеріалу з нелінійним зміцненням.

Мета цієї роботи – класифікація задач та розробка узагальненої методики математичного моделювання об'єктів технологічної механіки з врахуванням нелінійного характеру зміцнення матеріалу. Розглянемо обмеження, передумови й базові математичні співвідношення, які використовуються для розв'язання вказаного класу задач. Відзначимо, що у сфері канатного й кабельного виробництва найчастіше застосовується стрижньова заготівля з круглою формою поперечного перерізу (круглий дріт), тому для побудови прикладних методик традиційно використовують гіпотезу плоских перерізів. Вводиться також припущення про те, що матеріал стрижня в довільній точці поперечного перерізу (рис. 2) піддається деформації подовження ε і зсуву γ , а на елементарній площадці dF діє нормальне σ і дотичне τ напруження (плоский напружений стан) [6].

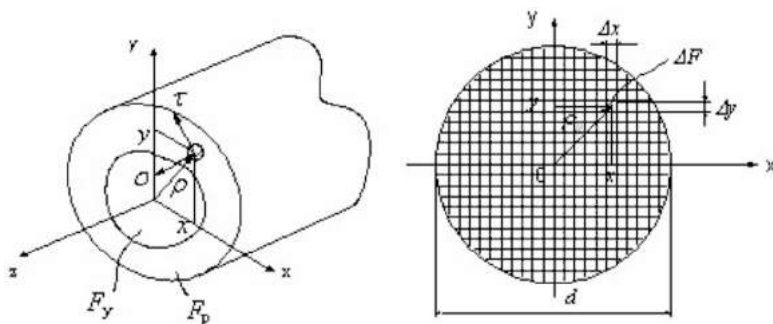


Рис. 2. Схема напруженого стану і дискретна модель поперечного перерізу стрижня

Для опису механічного стану стрижня в малій околиці заданого поперечного перерізу використовують вісім параметрів:

- параметри деформації подовжньої осі стрижня ε_0 , k_x , k_y , θ – відносне подовження, дві кривизни і кручення, відповідно;
- інтегральні внутрішні зусилля (внутрішні силові фактори) в заданому поперечному перерізі стрижня N , M_x , M_y , $M_{кр}$ – подовжня сила, два моменти гнуття і крутний момент, відповідно.

Всі задачі технологічної механіки можна розділити на три основні види:

1) пряма задача – по заданих рівняннях траєкторії деформації подовжньої осі стрижня $\varepsilon_0(t)$, $k_x(t)$, $k_y(t)$, $\theta(t)$ (t – деякий параметр технологічного процесу) знайти напруження σ , τ та внутрішні силові фактори N , M_x , M_y , $M_{кр}$ у заданому поперечному перерізі при довільному значенні параметра t ;

2) зворотня задача – по заданих рівняннях траєкторії навантаження стрижня $N(t)$, $M_x(t)$, $M_y(t)$, $M_{кр}(t)$ визначити параметри деформації його подовжньої осі ε_0 , k_x , k_y , θ та напруження σ , τ у заданому поперечному перерізі при довільному значенні параметра t ;

3) змішана задача – в умові міститься часткова інформація про параметри деформації подовжньої осі стрижня ε_0 , k_x , k_y , θ та часткова інформація про внутрішні силові фактори N , M_x , M_y , $M_{кр}$. Необхідно знайти невідомі параметри деформації подовжньої осі стрижня, напруження й внутрішні силові фактори для довільного етапу техпроцесу.

Розглянемо базові математичні співвідношення, необхідні для вирішення вказаних задач. Зв'язок деформацій матеріалу в довільній точці поперечного перерізу ε , γ та параметрів деформації подовжньої осі стрижня ε_0 , k_x , k_y , θ описується згідно з гіпотезою плоских перерізів простими формулами [4]:

$$d\varepsilon = d\varepsilon_0 + y \cdot dk_x - x \cdot dk_y; \quad d\gamma = \rho \cdot d\theta. \quad (1)$$

При описі напруженого стану стрижня площу його поперечного перерізу розділяємо на дві частини (рис. 2): F_y – ділянка пружного стану матеріалу, F_p – ділянка пластичної течії. У пружній ділянці прирости деформацій і напруг пов'язані законом Гука:

$$d\sigma = E \cdot d\varepsilon; \quad d\tau = G \cdot d\theta. \quad (2)$$

Математичне моделювання пластичного стану матеріалу в рамках даної роботи виконувалося на основі загальних методів теорії пластичної

течії. Для прийнятої моделі матеріалу з нелінійним ізотропним зміцненням отримані наступні диференціальні залежності (фізичні рівняння механічного стану) [11,12]

$$\begin{aligned}d\sigma &= E[(1 - K(\Gamma)\sigma^2)d\varepsilon - K(\Gamma)\sigma\tau d\gamma], \\d\tau &= \frac{E}{3}[-K(\Gamma)3\sigma\tau d\varepsilon + (1 - K(\Gamma)3\tau^2)d\gamma],\end{aligned}\quad (3)$$

де $K(\Gamma) = \frac{1 - \lambda(\Gamma)}{3T(\Gamma)^2}$ – функція зміцнення; Γ – інтенсивність деформації зсуву; $T(\Gamma)$ – інтенсивність дотичних напружень; $\lambda(\Gamma)$ – функція для коефіцієнта зміцнення матеріалу, яка визначається на основі аналізу експериментальної діаграми розтягу; E – модуль пружності при розтягу. Перехід матеріалу з пружного в пластичний стан контролюється на основі умови пластичності Мізеса $\sigma^2 + 3\tau^2 = T^2$.

Внутрішні силові фактори N , M_x , M_y , M_{kp} при заданих поточних значеннях нормального і дотичного напруження σ , τ визначаються за допомогою інтегралів [4]:

$$N = \int_F \sigma \cdot dF, \quad M_x = \int_F \sigma \cdot y \cdot dF, \quad M_y = - \int_F \sigma \cdot x \cdot dF, \quad M_{kp} = \int_F \tau \cdot \rho \cdot dF, \quad (4)$$

де F – площа поперечного перерізу стрижня; x , y , ρ – координати центру ваги елементарної площадки dF (рис. 2).

Комплект рівнянь (1) – (4) достатній лише для розв'язання задач першого виду (прямі задачі). Для зворотної і змішаної задач необхідні додаткові співвідношення, що описують зв'язок нескінченно малих приростів внутрішніх силових факторів dN , dM_x , dM_y , dM_{kp} та параметрів деформації подовжньої осі стрижня $d\varepsilon_0$, dk_x , dk_y , $d\theta$ [6,10]. Такі співвідношення виводяться на основі фізичних рівнянь механічного стану конкретного матеріалу і мають вигляд інтегро-диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}dN &= G_{11}d\varepsilon_0 + G_{12}dk_x + G_{13}dk_y + G_{14}d\theta, \\dM_x &= G_{21}d\varepsilon_0 + G_{22}dk_x + G_{23}dk_y + G_{24}d\theta, \\dM_y &= G_{31}d\varepsilon_0 + G_{32}dk_x + G_{33}dk_y + G_{34}d\theta, \\dM_{kp} &= G_{41}d\varepsilon_0 + G_{42}dk_x + G_{43}dk_y + G_{44}d\theta.\end{aligned}\quad (5)$$

Узагальнені коефіцієнти жорсткості стрижня G_{ij} є інтегральними функціями від напруг. Для прийнятої моделі матеріалу (3) можна записати наступні формули%:

$$G_{ij} = G_{ij}^y - E \int_{F_p} K(\Gamma) \cdot f_{ij}(\sigma, \tau, x, y) dF, \quad (6)$$

де G_{ij}^y – пружні коефіцієнти жорсткості стрижня; $f_{ij}(\sigma, \tau, x, y)$ – деякі функції, залежні від напружень і координат в поточній точці поперечного перерізу стрижня.

З (1)–(6) видно, що методика розв’язання задач технологічної механіки для матеріалу з нелінійним зміцненням може бути побудована виключно на основі чисельних методів. Поперечний переріз стрижня розбиваємо прямокутною сіткою на скінчене число елементарних площадок (рис. 2) і інтеграли в (4), (6) замінюємо скінченими сумами. Питання точності вказаної дискретної моделі детально досліджені й викладені в роботі [13]. Для розв’язання диференціальних рівнянь пластичної течії (3) запропонований спеціальний метод, згідно з яким скінчене прирощення шуканої функції визначається не по дотичній до її графіка, як в методі Ейлера, а по дузі кола [14]. Розроблена також універсальна процедура для комп’ютерних програм, що дозволяє зберігати й обробляти інформацію про поточний стан матеріалу у всіх елементарних площадках поперечного перерізу стрижня, контролювати перехід матеріалу з пружного стану в пластичне, а також виконувати перерахунок масивів напружень згідно з (2) або (3) та узагальнених коефіцієнтів жорсткості стрижня (6) на кожному кроці досліджуваного процесу. Нижче наведено два тестові приклади розв’язання прямої та змішаної задач з використанням описаної методики.

Приклад розв’язання прямої задачі. Стрижень у вигляді тонкостінного циліндру з конструкційної вуглецевої сталі (рис. 3) піддається двом етапам деформації: пружний розтяг до відносного подовження $\epsilon_1 = 0,005$ та подальший чистий зсув до деформації $\gamma_2 = 0,035$ (ламана траєкторія деформації).

Аналіз зміни напруженого стану виконаний для трьох варіантів моделі матеріалу:

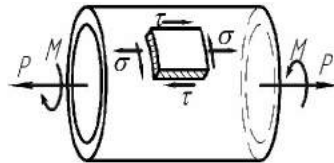


Рис.3. Схема навантаження тонкостінного циліндру

- без зміцнення $\sigma = if(\varepsilon < \varepsilon_{T1}, E\varepsilon, \sigma_{T1})$, де $\sigma_{T1} = 1608$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\lambda = 0$;

- з лінійним зміцненням $\sigma = if(\varepsilon < \varepsilon_{T2}, E\varepsilon, \sigma_{T2} + \lambda \cdot E(\varepsilon - \varepsilon_{T2}))$, де $\sigma_{T2} = 1406$ МПа, $\lambda = 0,1$;

- з нелінійним зміцненням $\sigma = if(\varepsilon < \varepsilon_{T3}, E\varepsilon, \sigma_{T3} + \sigma_0(1 - a^{\gamma(\varepsilon - \varepsilon_{T3})}))$, де $\sigma_{T3} = 1009$ МПа, $\sigma_0 = 723$ МПа, $a = 0,376$, $\gamma = 213$.

На першому етапі деформації циліндру напруги визначаються згідно із законом Гука. В процесі другого етапу, залежно від прийнятої розрахункової моделі, матеріал може переходити з пружного стану в пластичний. Для розрахунку напружень використовуємо диференціальні рівняння пластичної течії (3), вважаючи: для моделі без зміцнення $\lambda(\Gamma) = 0$; для моделі з лінійним зміцненням $\lambda(\Gamma) = const = \lambda$. Розрахунки і графічну обробку результатів виконували з використанням комп'ютерних технологій. На рис. 4. показані розрахункові залежності нормального і дотичного напруження від деформації зсуву в другому етапі процесу.

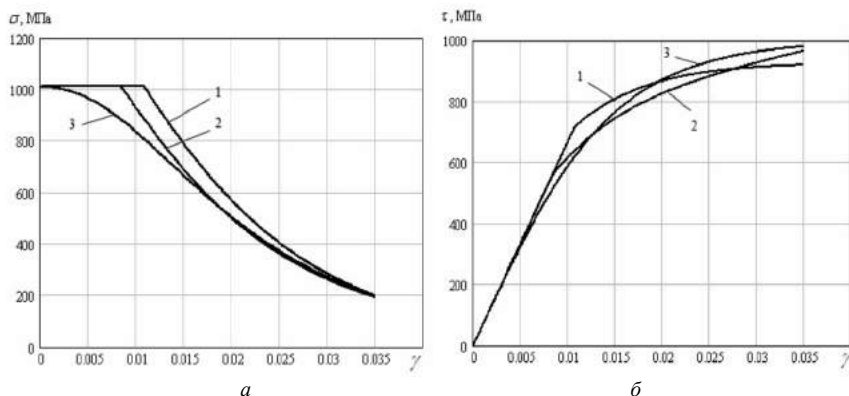


Рис. 4. Розрахункові залежності зміни нормальної *а*) і дотичної *б*) напруг для різних варіантів моделі зміцнення: 1 – без зміцнення; 2 – лінійне зміцнення; 3 – нелінійне зміцнення.

Видно, що нормальні напруження в процесі пластичної деформації зсуву зменшуються, а дотичні – збільшуються. На основі отриманого розв'язку вперше дана кількісна оцінка впливу типу використовуваної моделі зміцнення на точність розрахунку, розбіжність розрахункових даних може складати до 20 %.

Приклад розв'язання змішаної задачі. Суцільний круглий стрижень (дріт діаметром $D = 1,22$ мм) з конструкційної вуглецевої сталі жорстко закріплений в лівому перерізі (рис. 5). з нелінійним зміцненням. Поведінка сталі описується комбінованою нелінійною функцією

$\sigma = if\left(\varepsilon < \varepsilon_{T3}, E\varepsilon, \sigma_{T3} + \sigma_0\left(1 - a^{\gamma(\varepsilon - \varepsilon_{T3})}\right)\right)$, де $\sigma_{T3} = 1009$ МПа, $\sigma_0 = 723$ МПа, $a = 0,376$, $\gamma = 213$. На першому етапі до правого кінця стрижня прикладається подовжня сила N . На другому етапі стрижню надають деформацію кручення, що зростає від 0 до деякого значення θ при збереженні постійного значення подовжньої сили ($dN = 0$). Потрібно визначити подовження подовжньої осі ε_0 стрижня, напружений стан σ , τ і крутний момент $M_{кр}$ при довільному значенні параметра θ .

Для першого етапу пружного навантаження деформацію подовження подовжньої осі стрижня можна визначити згідно із законом Гуку

$\varepsilon'_0 = \frac{N}{EF}$. У другому етапі може з'явитися додаткова деформація

подовження ε_0 , для розрахунку якої використовуємо рівняння (5) і умову задачі $dN = G_{11}d\varepsilon_0 + G_{14}d\theta = 0$. Звідси $d\varepsilon_0 = -\frac{G_{14}}{G_{11}}d\theta$. Подальший

алгоритм і відповідна програма розрахунків побудовані на основі описаної вище загальної методики. Програма реалізує циклічний розрахунок параметрів напруженого стану і внутрішнього крутного моменту на кожному етапі приросту деформації кручення $\Delta\theta$.

Результати розв'язання задачі для другого етапу описаного процесу при двох значеннях подовжньої сили $N = 225$ Н та $N = 588$ Н представлені на рис. 6, 7. Графіки ілюструють поступовий перехід поперечного перерізу стрижня з пружного стану в пластичний. Поки всі точки перерізу знаходяться в пружній стадії крутний момент зростає по лінійній залежності $M_{кр}(\theta)$ (рис. 6,а), деформація подовження подовжньої осі (рис. 6,б) і нормальна напруження (рис. 7,а) не змінюються ($\varepsilon'_0 = const$, $\sigma = const$). Як тільки в зовнішніх площадках поперечного перерізу з'являється зона пластичної течії, залежність для крутного моменту $M_{кр}(\theta)$ стає нелінійною, деформація подовження подовжньої осі починає зростати і відбувається перерозподіл напружень σ , τ (рис. 7,б,в): у міру переміщення досліджуваної точки поперечного перерізу від периферії до

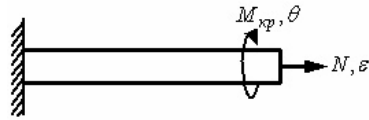


Рис. 5. Схема навантаження круглого стрижня

центру нормальні напруження збільшуються, а дотичні зменшуються по нелінійній залежності.

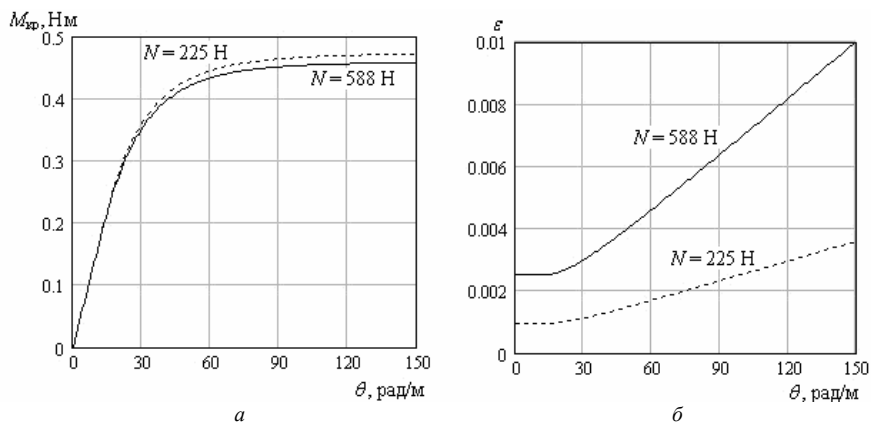


Рис. 6. Залежності крутного моменту а) та деформації подовження б) в функції від деформації кручення

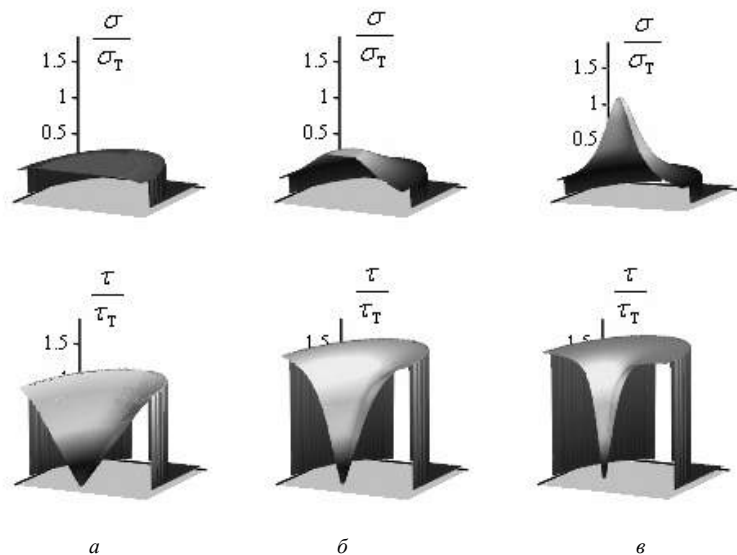


Рис. 7. Напружений стан круглого поперечного перерізу стрижня на різних етапах пружнопластичної деформації: а) $\theta = 20$ рад/м; б) $\theta = 50$ рад/м; в) $\theta = 150$ рад/м.

Таким чином представлені в даній роботі математичні моделі у сукупності з розробленими алгоритмом розв'язання диференціальних рівнянь течії і універсальною процедурою розрахунку напружень створюють ефективну методіку розв'язання задач складного навантаження стержня з врахуванням нелінійних властивостей матеріалу.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Ильюшин А.А.* Пластичность – М.: Гостехиздат, 1948. – 376 с.
2. *Безухов Н.И.* Основы теории упругости, пластичности и ползучести – М.: Высш. шк., 1961. – 537 с.
3. *Дикович И.Л.* Динамика упругопластических балок – Л.: Судпромгиз, 1962. – 292 с.
4. *Писаренко Г.С., Азарев В.А., Квитко А.Л.* Сопротивление материалов. – К.: Высш. школа, 1979. – 694 с.
5. *Грачев В.П.* Сопоставление некоторых теорий пластичности для случая сложного нагружения канатной проволоки // Прочность и долговечность стальных канатов: сб. науч. тр. – К.: Техника, 1975. – С. 56 – 59.
6. *Хромов В. Г.* Механика процесса холодной упругопластической деформации стержня – К.: Учеб.–метод. кабинет по высш. образов. при МинВузе УССР, 1990. – 50 с.
7. *Geuricke W., Paech M., Albert E.* Simulation des Richtens von Draht // Draht. – 1996. – №47 – S. 23 – 29.
8. *Yitai Li.* Theoretische Analyse des Biegeprozesses von Rundstaben // Draht. – 1994. – 45(11-12) – S. 604 – 608. *Хромов И.В.* Исследование точности метода прямоугольников в прикладных расчетах интегральных характеристик упругопластического стержня // Труды междунар. науч. – техн. конф. «Моделирование и исследование сложных систем» – Том 1. – М.: МГАПИИ, 2001 – С. 85 – 89.
9. *Качанов Л. М.* Основы теории пластичности – М.: Наука, 1969. – 420 с.
10. *Хромов В.Г., Поляков В.В.* Анализ напряженно-деформированного состояния винтового стержня при растяжении с учетом пластических свойств материала // Проблемы прочности. – 2003. – №4 (364) – С.129 – 134
11. *Хромов В.Г., Хромов И.В.* Выбор аппроксимирующей функции для диаграммы растяжения материала в задачах технологической механики стержня // Вестник СевГТУ.: Механика, энергетика, экология: сб.науч.тр. – Севастополь, 2007. – Вып. 80 – С. 20 – 22.
12. *Хромов И.В.* Анализ напряженного состояния круглого тонкостенного цилиндра при сложном нагружении и нелинейном упрочнении материала // Проблемы прочности. – 2009. – №3 – С. 58 – 65.
13. *Хромов И.В.* Исследование точности метода прямоугольников в прикладных расчетах интегральных характеристик упругопластического стержня // Труды междунар. науч. – техн. конф. «Моделирование и исследование сложных систем» – Том 1. – М.: МГАПИИ, 2001 – С. 85 – 89.
14. *Хромов И.В.* Модификация метода Эйлера для решения дифференциальных уравнений пластического течения материала // Вестник СевГТУ.: Механика, энергетика, экология: сб. науч. тр. – Севастополь, 2006. – Вып. 75 – С. 44-49.

И.В. Хромов

Методика решения типовых задач технологической механики упругопластичного стержня с учетом нелинейных свойств материала

Для задач сложного нагружения стержня представлены математические модели и универсальная процедура вычисления напряжений на основе решения дифференциальных уравнений течения, учитывающих нелинейные свойства материала. Приведены примеры численного решения технологических задач.

I.V. Khromov

Solving methods for typical problems in technological mechanics of elastoplastic rod taking into consideration nonlinear material properties

Mathematical models and universal procedure for stress calculation on the basis of solution of differential plastic flow equations taking into consideration nonlinear material properties have been presented for problems of complex loading of a rod. Examples of computational solutions for technological problems have been given.