УДК 534-21:537.226.86

М.О. Шульга, д-р фіз.-мат. наук
Л.О. Григор'єва, канд. фіз.-мат. наук

ПРО КОЛИВАННЯ ПРУЖНИХ ШАРІВ З ВИКРИВЛЕНИМИ ГРАНИЦЯМИ

В статті дано представлення спільної системи рівнянь пружних товщинних коливань в сферичних, циліндричних та прямокутних координатах в формі операторної гамільтонової системи. Розроблено алгоритм визначення власних частот коливань шарів з викривленими границями і проведено їх порівняльний аналіз.

В монографії [5] та наступних роботах [8 та ін.] система рівнянь пружних коливань в декартових прямокутних координатах вперше була приведена до операторної системи гамільтонового типу по просторовій координаті відносно відповідним чином вибраних, умовно кажучи, канонічних змінних. Це питання знайшло подальший розвиток в статтях [3, 4], в яких складнішими перетвореннями до операторної гамільтонової системи по радіальній координаті зведена система пружних рівнянь коливань в циліндричних координатах.

В цій статті побудовано єдиний підхід до визначення власних частот для пластини, циліндру та шару з радіальним напрямком анізотропії. На основі розвинутого алгоритму проведено порівняльний аналіз частот власних коливань для тіл різної геометрії.

Будемо виходити з рівняння коливань

$$\frac{\partial\sigma_{rr}}{\partial r}+\frac{N}{r}\left(\sigma_{rr}-\sigma_{\theta\theta}\right)=\rho\frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2}, \qquad (1)$$

і матеріальних залежностей

$$\sigma_{rr}=c_{33}\frac{\partial u_r}{\partial r}+Nc_{13}\frac{u_r}{r},$$

$$\sigma_{\theta\theta}=c_{13}\frac{\partial u_r}{\partial r}+N\left[c_{11}-\frac{1}{2}\left(N-1\right)\left(c_{11}-c_{12}\right)\right]\frac{u_r}{r}, \qquad (2)$$

які є спільними для прямокутних, циліндричних і сферичних координат. При $N=1$, $r\sim z$ рівняння (1), (2) відповідають прямокутним координатам, при $N = 1$ – циліндричним координатам, при $N = 2$ – сферичним координатам.

З першого рівняння системи (2) знаходимо

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\sigma_{rr}}{c_{33}} - N \frac{c_{13}}{c_{33}} \frac{u_r}{r} . \quad (3)$$

Це дає можливість одержати наступний вираз для $\sigma_{\theta\theta}$:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{c_{13}}{c_{33}} \sigma_{rr} - \frac{1}{2} N \left[2c_{11**} - (N-1)(c_{11} - c_{12}) \right] \frac{u_r}{r} , \quad (4)$$

в якому стала $c_{11**} = c_{11} - c_{13}^2 c_{33}^{-1}$.

З співвідношень (1) та (4) маємо

$$\frac{\partial r^N \sigma_{rr}}{\partial r} = \frac{N}{r} \frac{c_{13}}{c_{33}} r^N \sigma_{rr} + r^N \left[\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \frac{N^2}{r^2} \left(c_{11**} - \frac{N-1}{2} (c_{11} - c_{12}) \right) u_r \right] . \quad (5)$$

Таким чином одержали систему двох рівнянь

$$\frac{\partial r^N \sigma_{rr}}{\partial r} = \frac{N}{r} \frac{c_{13}}{c_{33}} r^N \sigma_{rr} + r^N \left[\rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} + \frac{N^2}{r^2} \left(c_{11**} - \frac{N-1}{2} (c_{11} - c_{12}) \right) u_r \right],$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \frac{\sigma_{rr}}{c_{33}} - N \frac{c_{13}}{c_{33}} \frac{u_r}{r} \quad (6)$$

відносно функцій $r^N \sigma_{rr}$ та u_r. Після їх визначення напруження $\sigma_{\theta\theta}$ знаходяться за формулою (4).

Звернемо увагу на те, що система (6), як і вихідні співвідношення (1), (2), справедлива і у тому випадку, коли механічні параметри ρ, c_{ij} будуть кусково-неперервними функціями координати r з розривами першого роду. В точках розриву $r = r_*$ повинні виконуватись умови неперервності функцій σ_{rr} та u_r.

На граничних поверхнях $r = r_0$ та $r = r_1$, ($r_0 < r_* < r_1$) необхідно задавати граничні умови по одній з альтернативних пар

$$u_r(r_0,t)=\overset{0}{u}_r(t)\vee\sigma_{rr}(r_0,t)=\overset{0}{\sigma}_{rr}(t),$$

$$u_r(r_1,t)=\overset{1}{u}_r(t)\vee\sigma_{rr}(r_1,t)=\overset{1}{\sigma}_{rr}(t). \tag{7}$$

Якщо ввести канонічні змінні $r^N\sigma_{rr}=\hat{q}_1$ та $u_r=\hat{p}_1$, то систему (6) можна записати в операторній гамільтоновій формі [1] по просторовій координаті r

$$\frac{\partial\hat{q}_1}{\partial r}=\frac{\partial\hat{H}}{\partial\hat{p}_1}, \quad \frac{\partial\hat{p}_1}{\partial r}=-\frac{\partial\hat{H}}{\partial\hat{q}_1} \tag{8}$$

з операторною функцією Гамільтона

$$\hat{H}(\hat{q}_1,\hat{p}_1)=-\frac{1}{2}\frac{1}{c_{33}r^N}\hat{q}_1^2+\frac{N}{r}\frac{c_{13}}{c_{33}}\hat{p}_1\hat{q}_1+$$

$$+\frac{1}{2}r^N\left[\rho\partial_t^2+\frac{N^2}{r^2}\left(c_{11**}-\frac{N-1}{2}(c_{11}-c_{12})\right)\right]\hat{p}_1^2. \tag{9}$$

Розглянемо випадок гармонічних коливань $f(r,t)=\operatorname{Re} f^a(r)\exp i\omega t$, використовуючи безрозмірні величини $c_{00}\overline{\sigma}_{rr}=\sigma_{rr}$, $c_{00}\overline{\sigma}_{\theta\theta}=\sigma_{\theta\theta}$, $h\overline{u}_r=u_r$, $\rho_{00}\overline{\rho}=\rho$, $\overline{\omega}=\omega h\sqrt{\rho_{00}/c_{00}}$ і безрозмірну координату $hx=r-R$. В цьому випадку система рівнянь (6) набуває вигляду (безрозмірні позначення збережені тільки для частоти)

$$\frac{d}{dx}(1+\varepsilon x)^N\sigma_{rr}^a=\frac{N\varepsilon}{1+\varepsilon x}\frac{c_{13}}{c_{33}}(1+\varepsilon x)^N\sigma_{rr}^a+$$

$$+(1+\varepsilon x)^N\left\{\frac{N^2\varepsilon^2}{(1+\varepsilon x)^2}\left[c_{11**}-\frac{N-1}{2}(c_{11}-c_{12})\right]-\rho\overline{\omega}^2\right\}u_r^a,$$

$$\frac{du_r^a}{dx}=\frac{1}{c_{33}(1+\varepsilon x)^N}(1+\varepsilon x)^N\sigma_{rr}^a-\frac{N\varepsilon}{1+\varepsilon x}\frac{c_{13}}{c_{33}}u_r^a. \tag{10}$$

Система (10) є гамільтоновою системою [1] по координаті x

$$\frac{dq_1}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \quad \frac{dp_1}{dx} = -\frac{\partial H}{\partial q_1} \tag{11}$$

з канонічними змінними $q_1 = (1+\varepsilon x)^N \sigma_{rr}^a$, $p_1 = u_r^a$. Функція Гамільтона

$$H(q_1, p_1) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\bar{c}_{33}(1+\varepsilon x)^N} q_1^2 + \frac{N\varepsilon}{1+\varepsilon x}\frac{\bar{c}_{13}}{\bar{c}_{33}} q_1 p_1 +$$

$$+\frac{1}{2}(1+\varepsilon x)^N \left\{ \frac{N^2\varepsilon^2}{(1+\varepsilon x)^2}\left[\bar{c}_{11**} - \frac{N-1}{2}(\bar{c}_{11} - \bar{c}_{12}) - \bar{\rho}\bar{\omega}^2\right]\right\} p_1^2 . \tag{12}$$

Систему (10) можна одержати з умови стаціонарності функціоналу

$$\Phi = \int_{x_1}^{x_2} \left\{ u_r^a \frac{d}{dx}(1+\varepsilon x)^N \sigma_{rr}^a + \frac{1}{2}\frac{1}{\bar{c}_{33}(1+\varepsilon x)^N}\left((1+\varepsilon x)^N \sigma_{rr}^a\right)^2 - \frac{N\varepsilon}{1+\varepsilon x}\frac{\bar{c}_{13}}{\bar{c}_{33}} r^N \sigma_{rr}^a u_r^a - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}(1+\varepsilon x)^N \left[\frac{N^2\varepsilon^2}{(1+\varepsilon x)^2}\left(\bar{c}_{11**} - \frac{N-1}{2}(\bar{c}_{11} - \bar{c}_{12}) - \bar{\rho}\bar{\omega}^2\right)\right] u_r^a u_r^a \right\} dx . \tag{13}$$

при «ізохронних» варіаціях.

Для дослідження усталених резонансних гармонічних коливань треба скористатися концепцією комплексних модулів [2, 6, 7].

У випадку плоского шару задача про власні значення і власні форми має простий розв'язок:

- при $u_x^a(-h) = 0$, $u_x^a(+h) = 0$ власні частоти $\omega_n = \frac{\pi n}{2h}\sqrt{c_{33}/\rho}$, а відповідні власні форми $\sin n\pi \frac{x}{2h}$, $n = 1,2,...$;
- при $u_x^a(-h) = 0$, $\sigma_{xx}^a(+h) = 0$ власні частоти $\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{4h}\sqrt{c_{33}/\rho}$, а відповідні власні форми $\sin\frac{2n-1}{2}\pi\frac{x}{2h}$, $n = 1,2,...$;
- при $\sigma_{xx}^a(-h) = 0$, $\sigma_{xx}^a(+h) = 0$ власні частоти

$$\omega_n = \frac{(n-1)\pi}{2h}\sqrt{c_{33}/\rho}\ , \tag{14}$$

а відповідні власні форми

$$\cos(n-1)\pi\frac{x}{2h}\ ,\ n=1,2,\ldots . \tag{15}$$

Цей розв'язок може слугувати як контрольний при розв'язанні системи (9) у випадках $N=1$ (циліндричні координати) та $N=2$ (сферичні координати).

Для знаходження власних частот тіл з викривленими поверхнями застосовується наступний чисельний спосіб розв'язаня. Розв'язок системи (6) будемо шукати в вигляді вектора

$$\mathbf{Y}=(Y_1, Y_2)=\ (r^N\sigma^a_{rr},\ \ u^a_r\,). \tag{16}$$

Система (6) при гармонічних коливаннях перетворюється до вигляду

$$\frac{\partial Y_1}{\partial r}=\frac{N}{r}\frac{c_{13}}{c_{33}}Y_1+r^N Y_2\left[-\rho\omega^2+\frac{N^2}{r^2}\left(c_{11**}-\frac{N-1}{2}\left(c_{11}-c_{12}\right)\right)\right],$$

$$\frac{\partial Y_2}{\partial r}=\frac{Y_1}{c_{33}r^N}-N\frac{c_{13}}{c_{33}}\frac{Y_2}{r}\ . \tag{17}$$

Після переходу до безрозмірних величин отримуємо

$$\frac{\partial Y_1}{\partial x}=\frac{\varepsilon N}{1+\varepsilon x}\frac{c_{13}}{c_{33}}Y_1+\frac{Y_2\varepsilon^N}{(1+\varepsilon x)^N}\left[-\rho\omega^2+\frac{\varepsilon^2N^2}{(1+\varepsilon x)^2}\left(c_{11**}-\frac{N-1}{2}\left(c_{11}-c_{12}\right)\right)\right],$$

$$\frac{\partial Y_2}{\partial x}=\left(\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x}\right)^N\frac{Y_1}{c_{33}}-N\frac{c_{13}\varepsilon}{c_{33}(1+\varepsilon x)}Y_2\,. \tag{18}$$

Невідома частота ω є власною частотою для тіл з вільними зовнішніми поверхнями, якщо система (6) задовольняє однорідним граничним умовам

$$\sigma^a_{rr}\left(R-h\right)=0\ ,\ \ \sigma^a_{xx}\left(R+h\right)=0\,. \tag{19}$$

Для введених змінних

$$Y_1(-1) = 0\,, \quad Y_1(1) = 0\,. \tag{20}$$

Розв'язок системи (18) при конкретних значеннях ω будемо шукати як розв'язок задачі Коші при початкових значеннях $\mathbf{Y}\ (-1) = (0,1)$. Частота $\overline{\omega}_k$ ($k = 1,2,...$) є власною частотою, якщо виконується друга умова з (20). Власні частоти шукаються методом бісекції.

Проаналізуємо частотні спектри для пружних шарів з вільними зовнішніми поверхнями. Розглядаються тіла з анізотропного матеріалу з наступними пружними модулями:

$$c_{11}^E = 13{,}9 \cdot 10^{10}\ \text{Н/м}^2,\ c_{12}^E = 7{,}78 \cdot 10^{10}\,\text{Н/м}^2,$$
$$c_{33}^E = 11{,}5 \cdot 10^{10}\ \text{Н/м}^2,\ c_{13}^E = 7{,}43 \cdot 10^{10}\ \text{Н/м}^2.$$

Для плоского шару з вільними поверхнями при введеному обезрозмірюванні маємо наступний спектр власних частот:

$$\Omega^{N=0} = (1.5708,\ \ 3.1416,\ \ 4.7124,\ \ 6.2834,\ \ 7.8546,\ \ 9.4263,\ \ 10.9988, ...)\,.$$

Він повністю збігається з частотами, обчисленими за (14).

Для циліндрів з різними параметрами кривизни маємо:

$$\Omega_{\varepsilon=0.05}^{N=1} = (0.0445,\ \ 1.5713,\ \ 3.1419,\ \ 4.7126,\ \ 6.2835,\ \ 7.8547,\ \ 9.4264, ...)\,;$$
$$\Omega_{\varepsilon=0.1}^{N=1} = (0.0895,\ \ 1.5730,\ \ 3.1427,\ \ 4.7132,\ \ 6.2839,\ \ 7.8550,\ \ 9.4266, ...)\,;$$
$$\Omega_{\varepsilon=0.3}^{N=1} = (0.2818,\ \ 1.5931,\ \ 3.1523,\ \ 4.7195,\ \ 6.2887,\ \ 7.8588,\ \ 9.4298, ...)\,;$$
$$\Omega_{\varepsilon=0.5}^{N=1} = (0.5181,\ \ 1.6556,\ \ 3.1794,\ \ 4.7368,\ \ 6.3014,\ \ 7.8689,\ \ 9.4382, ...)\,.$$

Для куль маємо наступні частоти:

$$\Omega_{\varepsilon=0.05}^{N=1} = (0.0726,\ 1.5723,\ \ 3.1424,\ \ 4.7129,\ \ 6.2838,\ \ 7.8549,\ \ 9.4265,...)\,;$$
$$\Omega_{\varepsilon=0.1}^{N=1} = (0.1459,\ \ 1.5769,\ \ 3.1446,\ \ 4.7145,\ \ 6.2849,\ \ 7.8558,\ \ 9.4273, ...)\,;$$
$$\Omega_{\varepsilon=0.3}^{N=1} = (0.4619,\ \ 1.6325,\ \ 3.1717,\ \ 4.7324,\ \ 6.2983,\ \ 7.8665,\ \ 9.4362, ...)\,;$$
$$\Omega_{\varepsilon=0.5}^{N=1} = (0.8401,\ \ 1.8010,\ \ 3.2469,\ \ 4.7809,\ \ 6.3342,\ \ 7.8951,\ \ 9.4599, ...)\,.$$

Бачимо, що спектр власних частот циліндра і сфери відрізняється від спектру для плоского шару додатковою першою частотою, яка приймає приблизно пропорційні до $\varepsilon = h/R$ значення. Наступні частоти практично співпадають для тіл різної геометрії. В кулі власні частоти коливань вищі, ніж у циліндра. В тілах з різними параметрами кривизни суттєво відрізняються перші кілька частот, вищі частоти практично однакові.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Кильчевский Н.А.* Курс теоретической механики. В 2 т. Т 2. – Москва: Наука, 1977. – 439 с.
2. *Савін Г.М., Рущицький Я.Я.* Елементи механіки спадкових середовищ. – К.: Вища школа, 1976. – 252 с.
3. *Шульга В.М.* До розв'язку рівнянь теорії пружності в циліндричних координатах // Доповіді НАН України. – 1998. – № 6. – С. 80-82.
4. *Шульга В.М.* О распространении упругих волн в ортотропных цилиндрах // Прикл. механика. – 1998. – 34, № 7. – С. 34-41.
5. *Шульга Н.А.* Основы механики слоистых сред периодической структуры. – К.: Наук. думка, 1981. – 200 с.
6. *Шульга Н.А., Болкисев А.М.* Колебания пьезоэлектрических тел. – К.: Наукова думка, 1990. – 228 с.
7. *Шульга М.О., Карлаш В.Л.* Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – К.: Наукова думка, 2008. – 270 с.
8. *Shulga N.A.* Propagation of elastic waves in periodic-nonhomogeneous spase // Int. Appl. Mech. – 2003. – 39, № 7. – P. 763-796.

Отримано 05.08.09.

Н.А. Шульга, Л.О. Григорьева

О колебаниях упругих слоев с искривленными границами

В статье дано представление общей системы уравнений упругих толщинних колебаний в сферических, цилиндрических и прямоугольных координатах в форме операторной гамильтоновой системы. Разработан алгоритм определения собственных частот колебаний слоев с искривленными границами и проведен их сравнительный анализ.

M.O. Shul'ga, L.O. Grigoryeva

About vibrations of elastic layers with curved boundaries

Presentation of the united system of equations of elastic thickness vibrations in spherical, cylindrical and rectangular co-ordinates in the form of the operator Hamiltonian system is given in the article. The algorithm of determination of own vibrations frequencies of layers with curved boundaries is developed and their comparative analysis is conducted.