УДК 539.3

В.А. Баженов, д-р техн. наук
О. О. Шкриль, канд. техн. наук
С. О. Пискунов, канд. техн. наук
Д. В. Богдан

НЕОДНОРІДНИЙ ПРИЗМАТИЧНИЙ СКІНЧЕННИЙ ЕЛЕМЕНТ ЗІ ЗМІННОЮ ПЛОЩЕЮ ПОПЕРЕЧНОГО ПЕРЕРІЗУ ТА УРАХУВАННЯМ ЗМІННОСТІ КОМПОНЕНТІВ МЕТРИЧНОГО ТЕНЗОРУ

Отримані розв’язувальні співвідношення напіваналітичного методу скінченних елементів (НМСЕ) для косокутного призматичного неоднорідного скінченого елемента зі змінною площею поперечного перерізу та з урахуванням змінності компонент метричного тензора в площині його поперечного перерізу; показана ефективність їх застосування при розв’язанні тестових задач.

Вступ. Напіваналітичний метод скінчених елементів (НМСЕ) є ефективною модифікацією методу скінчених елементів (МСЕ) [1, 2], що дозволяє суттєво підвищити ефективність чисельного розв’язання задач про визначення напружено-деформованого стану (НДС) просторових тіл канонічної форми. Одним з таких класів об’єктів є призматичні тіла, що утворені рухом геометричної фігури складної форми, яка визначається контуром поперечного перерізу тіла, вздовж прямолінійної утворюючої. У розрахунковій практиці зустрічаються призматичні тіла змінної в напрямку утворюючої площі поперечного перерізу (рис. 1). Для апроксимації таких тіл в роботі [3] було розроблено скінченний елемент (СЕ), що враховує змінність площі поперечного перерізу вздовж напрямної. В межах поперечного перерізу компоненти метричного тензору були постійними. Тому для забезпечення збіжності розв’язання задачі потрібно було значно згущувати сітку. В той же час в роботі [4] було розроблено косокутний СЕ з довільними граничними умовами, розв’язувальні співвідношення для якого враховують змінність компонент метричного тензору в площині поперечного перерізу. Це призвело до суттєвого зменшення кількості невідомих дискретної моделі. Але вздовж напрямної визначник компонентів метричного тензору залишався постійним. Метою даної роботи є розробка розв’язувальних співвідношень НМСЕ для призматичного СЕ, які будуть враховувати змінність компонентів метричного тензору в межах поперечного перерізу і його визначника вздовж напрямної і апробація їх на тестовій задачі.

Вихідні співвідношення для призматичних просторових тіл. Для дослідження процесів деформування та руйнування призматичних тіл доцільно використовувати наступні системи координат: базисну декартову $z^{j'}$, яка є незмінною і призначена для задання вихідної інформації про геометрію об'єкта, зовнішні впливи та граничні умови (вісі $z^{1'}$ та $z^{2'}$ базисної системи координат розташовані в площині поперечного перетину тіла, а вісь $z^{3'}$ орієнтована вздовж напрямної); місцеву систему координат x^i, природно пов'язану з геометрією досліджуваного об'єкта, при цьому вісь x^3 збігається за напрямком з $z^{3'}$ (рис. 1).

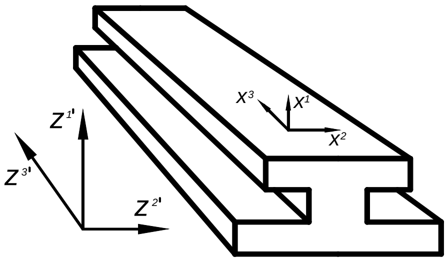


Рис. 1. Неоднорідні призматичні тіла із змінною площею поперечного перерізу

Компоненти метричного тензору g_{mn} в місцевій системі координат зручно подати у вигляді матриці:

$$[g_{mn}] = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{bmatrix}.$$

Будемо вважати, що в кожній точці тіла відомі компоненти тензора перетворення $z^{i'}_{,j}$, що обумовлює зв'язок між місцевою та базисною системами координат [5]:

$$z^{i'}_{,j} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial x^j}, \qquad z^{\alpha}_{,3} = z^{3'}_{,\alpha} = 0 .$$

Тоді компоненти метричного тензору g_{mn} в місцевій системі координат подамо через компоненти метричного тензору базисної системи:

$$g_{mn} = z^{i'}_{,m} z^{j'}_{,n} g_{i'j'} .$$

При дослідженні призматичних тіл для базисної декартової системи координат матриця компонентів метричного тензору набуде наступного вигляду:

$$\left[g_{mn}\right]=\begin{bmatrix} z^{\gamma'}_{,1}z^{\gamma'}_{,2}, & z^{\gamma'}_{,1}z^{\gamma'}_{,2}, & 0 \\ z^{\gamma'}_{,2}z^{\gamma'}_{,1}, & z^{\gamma'}_{,2}z^{\gamma'}_{,2}, & 0 \\ 0 & 0 & \left(z^{3'}_{,3}\right)^2 \end{bmatrix}.$$

Запишемо співвідношення для визначення компонент деформацій ε_{ij} через переміщення u_i в місцевій системі координат [5]:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x^j}+\frac{\partial u_j}{\partial x^i}\right). \quad (1)$$

Подамо переміщення в місцевій системі координат через їх значення в базисній:

$$u_k=u_{s'}z^{s'}_{,k}. \quad (2)$$

Підставивши (2) в вираз (1) після зведення подібних, одержимо загальні вирази для деформацій в місцевій системі координат через переміщення в базисній:

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(u_{l',i}z^{l'}_{,j}+u_{l',j}z^{l'}_{,i}\right), \quad (3)$$

Передбачається, що пружні деформації малі та пов'язані з напруженнями узагальненим законом Гука:

$$\overset{\circ}{u}_{i',3}=\frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}u_{i'(S_1S_2),3}. \quad (4)$$

Для ізотропного тіла компоненти тензора пружних сталих C^{ijkl} визначаються через коефіцієнти Ляме:

$$C^{ijkl}=\lambda g^{ij}g^{kl}+\mu\left(g^{jl}g^{ik}+g^{il}g^{jk}\right),$$

де величини λ та μ визначаються через коефіцієнт Пуассона $\nu=\nu\left(z^{i'}\right)$ і модуль пружності матеріалу (модуль Юнга) $E=E\left(z^{i'}\right)$:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

Величини фізичних напружень і деформацій обчислюються із використанням співвідношень:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}}, \quad \tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij}\sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}} \tag{5}$$

Неоднорідний призматичний скінченний елемент зі змінною площею поперечного перерізу та урахуванням змінності компонентів метричного тензору. Апроксимація просторових неоднорідних призматичних тіл відбувається в межах поперечного перерізу (рис. 2). Вздовж твірної застосовується один скінченний елемент (СЕ). Просторові неоднорідні призматичні СЕ являють собою прямолінійну призму, утворену переміщенням чотирикутника довільного обрису вздовж напрямної у вигляді прямої (рис. 3а).

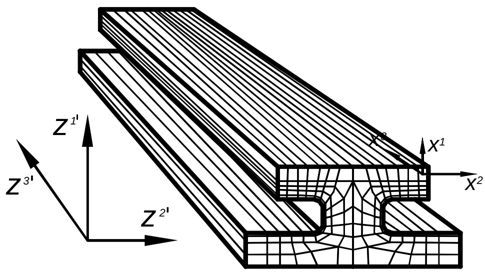


Рис. 2. Дискретна модель НМСЕ.

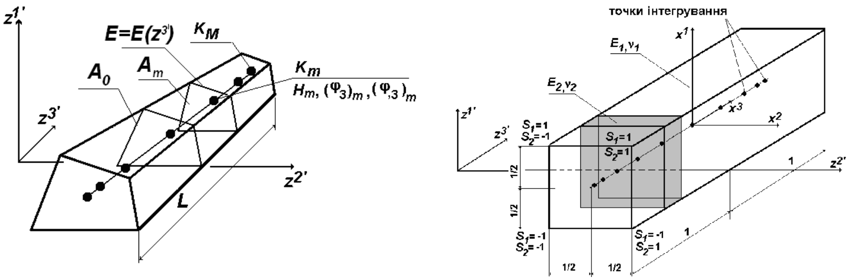
Площа такого чотирикутника може змінюватись (із збереженням подібності його форми) за законом:

$$A(z^{3'}) = A_0 f(z^{3'}), \tag{6}$$

де A_0 – площа поперечного перерізу при $z^{3'} = 0$, $f(z^{3'})$ – монотонна безперервна функція. В цьому випадку отримаємо неоднорідний призматичний СЕ змінної площі поперечного перерізу.

Кожному СЕ у відповідність поставлена місцева прямолінійна система координат x^i, яка природно пов’язана з геометрією об’єкта так, що осі x^1

і x^2 спрямовані вздовж сторін поперечного перетину СЕ, а вісь x^3 спрямована вздовж напрямної та співпадає за напрямком із $z^{3'}$. При цьому в місцевій системі координат поперечний перетин СЕ відображається на квадрат з одиничною стороною, а довжина його напрямної дорівнює 2. Місцева система координат застосовується для визначення деформацій та напружень у межах СЕ (рис. 3,б) [1, 2].



а б

Рис. 3. Неоднорідний призматичний скінчений елемент змінної площі поперечного перерізу в базисній (а) та місцевій (б) системі координат

При побудові розв’язувальних співвідношень для неоднорідних призматичних скінчених елементів для геометричних і фізико-механічних параметрів застосовують в межах поперечного перерізу наступні гіпотези:

– компоненти метричного тензору СЕ є змінними:

$$g_{ij} = g_{ij}(x^{\alpha});$$

– визначник матриці, складеної із компонент метричного тензора g_{ij}, компоненти тензору пружних сталих дорівнюють значенням відповідних величин у центрі поперечного перерізу СЕ:

$$g = \mathring{g} = g\big|_{x^{\alpha}=0}, \quad C^{ijkl} \approx \mathring{C}^{ijkl} = C^{ijkl}\Big|_{x^{\alpha}=0};$$

– визначник матриці, складеної із компонент метричного тензора g_{ij}, є змінним за напрямною і обчислюється виходячи із вихідних даних про змінення площі поперечного перерізу (6) – із використанням співвідношення:

$$\sqrt{\overset{\circ}{g}(z^{3'})} = f(z^{3'})\sqrt{\overset{\circ}{g}\big|_{z^{3'}=0}}\ .$$

– компоненти тензору пружних сталих є змінними за напрямною:

$$C^{ijkl} = C^{ijkl}(x^3),$$

і обчислюються на основі вихідних даних про фізико-механічні властивості матеріалу або інформації про змінення фізико-механічних властивостей, що відбулись внаслідок деформування.

Розподілення переміщень у межах поперечного перетину СЕ описується білінійним законом:

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{m'(S_1S_2)}\left(\frac{1}{2}S_1x^1 + \frac{1}{2}S_2x^2 + S_1S_2x^1x^2 + \frac{1}{4}\right), \qquad (7)$$

де $u_{m'(S_1S_2)}$ – вузлові значення переміщень, що подані компонентами в базисній системі координат; S_1 і S_2 – координати, що визначають розташування вузлів відносно центра поперечного перетину елементу в місцевій системі координат x^i.

Похідні від переміщень в центрі поперечного перетину СЕ, виходячи з прийнятого закону їх розподілу (7) дорівнюють:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{u}_{i'} &= \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{i'(S_1S_2)};\\
\overset{\circ}{u}_{i',\alpha} &= \frac{1}{2}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{i'(S_1S_2)}S_\alpha;\\
\overset{\circ}{u}_{i',12} &= \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{i'(S_1S_2)}S_1S_2;\\
\overset{\circ}{u}_{i',3} &= \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{i'(S_1S_2),3};\\
\overset{\circ}{u}_{i',3\alpha} &= \frac{1}{2}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1} u_{i'(S_1S_2),3}S_\alpha.
\end{aligned} \qquad (8)$$

Відповідно до моментної схеми СЕ (МССЕ) [6] компоненти тензора повних фізичних деформацій у поперечному перетині, що відповідає точці інтегрування, подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \, x^{(3-\alpha)} ; \quad \tilde{\varepsilon}_{12} = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12} ;$$

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha 3} = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} \, x^{(3-\alpha)} ; \quad \tilde{\varepsilon}_{33} = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta} \, x^{\beta} \ , \qquad (9)$$

де $\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij}\Big|_{x^{\alpha}=0}$, $\quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij,\beta} = \dfrac{\partial \tilde{\varepsilon}_{ij}}{\partial x^{\beta}}\bigg|_{x^{\alpha}=0}$.

З урахуванням подання фізичних компонент деформацій через відповідні ненормовані величини в загальному випадку отримаємо:

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}}\bigg|_{x^{\beta}=0} = \frac{\partial\left(\varepsilon_{\alpha(\alpha)} \big/ g_{\alpha(\alpha)}\right)}{\partial x^{(3-\alpha)}}\Bigg|_{x^{\beta}=0} =$$

$$= \frac{1}{g_{\alpha(\alpha)}}\left(\varepsilon_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \varepsilon_{\alpha(\alpha)} \frac{g_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}}{g_{\alpha(\alpha)}}\right)\Bigg|_{x^{\beta}=0} =$$

$$= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}}\left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} \, \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}\right). \qquad (10)$$

Аналогічно для інших компонентів отримаємо:

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \, \overset{\circ}{g}_{33}}}\left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} \, \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}\right);$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\alpha} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{33}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} \, .$$

де $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij}\Big|_{x^{\alpha}=0}$, $\quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\beta} = \dfrac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^{\beta}}\bigg|_{x^{\alpha}=0}$, $\quad \overset{\circ}{h}_{ij,\delta} = \dfrac{\overset{\circ}{g}_{ij,\delta}}{\overset{\circ}{g}_{ij}}$, $\quad \overset{\circ}{g}_{ij,\delta} = \dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^{\delta}}\bigg|_{x^{\alpha}=0}$.

Подамо коефіцієнти розкладення ненормованих компонент деформацій в ряд Маклорена (9) в місцевій прямолінійній системі координат через вузлові переміщення та їх похідні, що обчислені в базисній системі координат (8) з урахуванням прийнятого розподілення переміщень в поперечному перерізі. При цьому, аналогічно до використаного в (8) позначення для значень похідних від переміщень $\overset{\circ}{u}_{m',i}$ центрі СЕ введемо позначення для значень компонент тензора перетворення $\left. z^{m'}_{,i} \right|_{x^{\alpha}=0} = \overset{\circ}{z}{}^{m'}_{,i}$. Тоді для призматичних просторових тіл із застосуванням базисної декартової системи координат на основі виразу (10) отримаємо:

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[u_{\gamma'(S_1S_2)}\left(S_{\alpha}\, \overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\beta} + S_{\beta}\, \overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} \right) \right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[u_{3'(S_1S_2)} S_{\alpha}\, \overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3} + \frac{1}{2} u_{\gamma'(S_1S_2),3}\, \overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} \right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[u_{3'(S_1S_2),3}\, \overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3} \right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{1}{2}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[u_{\gamma'(S_1S_2)}\left(2S_1S_2\, \overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} + S_{\alpha}\, \overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,12} \right) \right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[2\, u_{3'(S_1S_2)}\, S_1S_2\, \overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3} + u_{\gamma'(S_1S_2),3}\left(S_{(3-\alpha)}\, \overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} + \frac{1}{2}\, \overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,12} \right) \right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} = \frac{1}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\left[u_{3'(S_1S_2),3}\left(2S_{\alpha}\, \overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3} \right) \right].$$

На основі закону Гука (4) і прийнятих співвідношень (9) запишемо вираз для компонент тензора фізичних напружень:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij11}\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{11} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{11,2}\, x^2 \right) + 2\overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij12}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12} + \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij22}\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{22} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{22,1}\, x^1 \right) +$$
$$+2\overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij13}\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{13} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{13,2}\, x^2 \right) + 2\overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij23}\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{23} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{23,1}\, x^1 \right) +$$
$$+\overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij33}\left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,1}\, x^1 + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,2}\, x^2 \right). \qquad (11)$$

Застосовуючи позначення:

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij} = \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ijkl}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{kl}\ ,$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}_{,2} = \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij11}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{11,2} + \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij13}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{13,2} + \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij33}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,2}\ ;$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}_{,1} = \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij11}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{22,1} + \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij23}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{23,1} + \overset{\circ}{\tilde{C}}{}^{ij33}\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,1}\ ,$$

отримаємо скорочений запис закону Гука з урахуванням розкладу деформацій в ряд Маклорена в термінах фізичних величин:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}_{,2} x^2 + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}_{,1} x^1. \qquad (12)$$

Відкидаючи з (12) члени вигляду $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{i\alpha}_{,\alpha}$ як ті, що не дають вкладення в енергію деформування елементу, подамо напруження відрізками ряду Маклорена:

$$\tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \qquad \tilde{\sigma}^{12} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{12};$$

$$\tilde{\sigma}^{\alpha 3} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \qquad \tilde{\sigma}^{33} = \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33}_{,\alpha} x^{\alpha}, \qquad (13)$$

де значення коефіцієнтів $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}$ і $\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij}_{,\alpha}$ обчислюються в точках інтегрування K_m, що розташовані в поперечних перерізах вздовж вісі x^3 (рис. 3,*а*).

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент фізичних напружень в ряд Маклорена з урахуванням подання фізичних компонент тензора напружень в місцевій системі координат (5):

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)}; \qquad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{12} = \overset{\circ}{g}_{12} \overset{\circ}{\sigma}{}^{12};$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha 3} = \sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{g}_{33}}\, \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha 3}; \qquad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33} = \overset{\circ}{g}_{33} \overset{\circ}{\sigma}{}^{33};$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} = \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)}; \qquad \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} = \sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{g}_{33}}\, \overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)};$$

$$\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33}_{,\alpha} = \overset{\circ}{g}_{33} \overset{\circ}{\sigma}{}^{33}_{,(3-\alpha)}. \qquad (14)$$

Опис процесу деформування просторових тіл здійснюється у відповідності до варіаційного принципу можливих переміщень. Рівняння рівноваги системи N СЕ, що апроксимують досліджуваний об'єкт, має вигляд:

$$\sum_{n=1}^{N} \left(\delta W_n - \delta A_n \right) = 0 .$$

Варіація енергії деформації одного СЕ може бути записана у вигляді:

$$\delta W_n = \int_{V_n} \tilde{\sigma}^{ij} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} \, dV_n ,$$

де $dV_n = \sqrt{\overset{\circ}{g}}dx^1dx^2dx^3$ – об’єм n-го СЕ.

Подаючи, відповідно до МССЕ, фізичні компоненти тензору напружень (13) і тензору деформацій (9) через їх значення у центрі елементу отримаємо для варіації енергії n-го СЕ $\delta W_n = \delta W$:

$$\delta W = \int\limits_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int\limits_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} \int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1} \Bigg[\left(\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \delta \left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) +$$

$$+ 2\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{12} \delta \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12} + \left(\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) \delta \left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right) +$$

$$+ \left(\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33}_{,\alpha} x^{\alpha} \right) \delta \left(\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta} x^{\beta} \right) \Bigg] \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^1 dx^2 dx^3 . \qquad (15)$$

Виконуючи інтегрування цього виразу в межах поперечного перерізу СЕ з урахуванням значень наступних інтегралів:

$$\int\limits_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int\limits_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} dx^1 dx^2 = 1 \; ; \qquad \int\limits_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int\limits_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^{\alpha} dx^1 dx^2 = 0 \; ;$$

$$\int\limits_{x^1=-\frac{1}{2}}^{x^1=\frac{1}{2}} \int\limits_{x^2=-\frac{1}{2}}^{x^2=\frac{1}{2}} x^{\alpha} x^{\beta} dx^1 dx^2 = \begin{cases} 0, & \alpha \neq \beta \\ \frac{1}{12}, & \alpha = \beta \end{cases}, \qquad (16)$$

для варіації енергії деформації одного СЕ одержимо:

$$\delta W = \int\limits_{x_3=-1}^{x_3=1} \Bigg[\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{ij} \delta \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} + \frac{1}{12} \Bigg(\overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)} \delta \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} +$$

$$+ \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)} \delta \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\sigma}}{}^{33}_{,\alpha} \delta \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\alpha} \Bigg) \Bigg] \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3 .$$

З використанням отриманих вище виразів для коефіцієнтів розкладання компонент фізичних напружень (14) і деформацій (10) в ряд Маклорена, вираз для варіації енергії деформування одного СЕ набуде вигляду:

$$\delta W=\int_{x_3=-1}^{x_3=1}\left[\overset{\circ}{\sigma}{}^{ij}\,\delta\,\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}+\frac{1}{12}\left(\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha(\alpha)}_{,(3-\alpha)}\delta\left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}-\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}\,\overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\overset{\circ}{\sigma}{}^{\alpha 3}_{,(3-\alpha)}\delta\left(\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)}-\frac{1}{2}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}\,\overset{\circ}{h}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)}\right)+\overset{\circ}{\sigma}{}^{33}_{,\alpha}\,\delta\,\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha}\right)\right]\sqrt{\overset{\circ}{g}}\,dx^3,\quad (17)$$

або, у векторній формі:

$$\delta W=\int_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\left(\delta\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}\right\}^T\right)\left\{\overset{\circ}{\sigma}\right\}+\frac{1}{12}\left[\left(\delta\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{,1}\right\}_h^T\right)\left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,1}\right\}+\left(\delta\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{,2}\right\}_h^T\right)\left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,2}\right\}\right]\right\}\times \tag{18}$$

$$\times\sqrt{\overset{\circ}{g}}\,dx^3,$$

де $\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}\right\}^T=\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{11}\quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{12}\quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{22}\quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{23}\quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{13}\quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}\right\}$;

$$\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{,1}\right\}_h^T=\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{22,1}-\overset{\circ}{\varepsilon}_{22}\,\overset{\circ}{h}_{22,1}\quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{23,1}-\overset{\circ}{\varepsilon}_{23}\,\overset{\circ}{h}_{22,1}\quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,1}\right\};$$

$$\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{,2}\right\}_h^T=\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{11,2}-\overset{\circ}{\varepsilon}_{11}\,\overset{\circ}{h}_{11,2}\quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{13,2}-\overset{\circ}{\varepsilon}_{13}\,\overset{\circ}{h}_{11,2}\quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,2}\right\}.;$$

$$\left\{\overset{\circ}{\sigma}\right\}^T=\left\{\overset{\circ}{\sigma}{}^{11}\quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{12}\quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{22}\quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{23}\quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{13}\quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{33}\right\};$$

$$\left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,1}\right\}^T=\left\{\overset{\circ}{\sigma}{}^{22}_{,1}\quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{23}_{,1}\quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{33}_{,1}\right\};\qquad \left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,2}\right\}^T=\left\{\overset{\circ}{\sigma}{}^{11}_{,2}\quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{13}_{,2}\quad \overset{\circ}{\sigma}{}^{33}_{,2}\right\};$$

При розгляді неоднорідних призматичних просторових тіл з довільними граничними умовами апроксимація невідомих переміщень в базисній системі координат $u_{s'}$ в напрямку утворюючої здійснюється розкладенням за системою координатних функцій φ^l – поліномам Лагранжа (l = 0, 1) і Міхліна (l = 2,....L):

$$u_{s'}=\sum_{l=0}^{L}\overline{u}_{s'}^{l}\varphi^{(l)}\,, \tag{19}$$

де $\varphi^{(0)} = \frac{1}{2}\left(1 - x^3\right)$, $\varphi^{(1)} = \frac{1}{2}\left(1 + x^3\right)$,

$$\varphi^{(l)} = f^{(l)} p^{(l)} - f^{(l-2)} p^{(l-2)}, \qquad f^{(l)} = \sqrt{\left(4l^2 - 1\right)^{-1}},$$

$$p^{(l)} = \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sum_{k=0}^{l} \frac{(-1)^k \left(l+k\right)!}{(l-k)!(k!)^2\, 2^{k+1}} \left[\left(1 - x^3\right)^k + (-1)^l \left(1 + x^3\right)^k\right]$$ – поліноми Лагранжа.

Застосована система функцій задовольняє умовам повноти та лінійної незалежності і дозволяє просто і ефективно формулювати різні види граничних умов на торцях тіла традиційним для МСЕ засобом, тобто шляхом виключення відповідних рівнянь.

Вздовж осі скінченого елемента, відповідно до вимог формули інтегрування Гаусса, розташована певна кількість точок інтегрування K_m, $m=1\ldots M$ (рис. 3,a) [1, 2].

З урахуванням прийнятої апроксимації переміщень (19) отримані вирази розкладення ненормованих компонент деформацій в ряд Маклорена в місцевій прямолінійній системі координат через вузлові переміщення та їх похідні, що обчислені в базисній системі координат набудуть вигляду:

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm1} \sum_{S_2=\pm1} \left[\sum_{l=0}^{L} u^l_{\gamma'(S_1S_2)} \left(S_\alpha \overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\beta} + S_\beta \overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} \right) \varphi^{(l)} \right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm1} \sum_{S_2=\pm1} \left[\sum_{l=0}^{L} \left(u^l_{3'(S_1S_2)} \overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3} S_\alpha \varphi^{(l)} + \frac{1}{2} u^l_{\gamma'(S_1S_2)} \overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} \varphi^{(l)}_{,3} \right) \right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm1} \sum_{S_2=\pm1} \left[\sum_{l=0}^{L} u^l_{3'(S_1S_2)} z^{3'}_{,3} \varphi^{(l)}_{,3} \right]; \tag{20}$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm1} \sum_{S_2=\pm1} \left[\sum_{l=0}^{L} u^l_{\gamma'(S_1S_2)} \left(2S_1S_2 \overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} + S_\alpha \overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,12} \right) \varphi^{(l)} \right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \frac{1}{4} \sum_{S_1\pm1} \sum_{S_2\pm1} \left[\sum_{l=0}^{L} \left\{ u^l_{3'(S_1S_2)} \left(2S_1S_2 \overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3} \right) \varphi^{(l)} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + u^l_{\gamma'(S_1S_2)} \left(S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,\alpha} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}{}^{\gamma'}_{,12} \right) \varphi^{(l)}_{,3} \right\} \right];$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm1} \sum_{S_2=\pm1} \left[\sum_{l=0}^{L} u^l_{3'(S_1S_2)} \left(2S_\alpha \overset{\circ}{z}{}^{3'}_{,3} \right) \varphi^{(l)}_{,3} \right].$$

Співвідношення (20) і (9), що описують залежність між ненормованими компонентами деформацій – складовими коефіцієнтів розкладення фізичних деформацій у ряд Маклорена і коефіцієнтами розкладення переміщень за поліномами (19), у матричній формі мають наступний вигляд:

$$\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}\right\}=\sum_{l=0}^{L}\left(\left[\overset{\circ}{B}_1\right]\varphi^{(l)}+\left[\overset{\circ}{B}_2\right]\varphi^{(l)}_{,3}\right)\left\{\,u_l\,\right\};$$

$$\left\{\overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha}\right\}_h=\sum_{l=0}^{L}\left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]_h\varphi^{(l)}+\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]_h\varphi^{(l)}_{,3}\right)\left\{\,u_l\,\right\}, \tag{21}$$

де $\left\{\,u_l\right\}^T=\left\{u^l_{i(-1;-1)}\quad u^l_{i(1;-1)}\quad u^l_{i(-1;1)}\quad u^l_{i(1;1)}\right\}$;

$$\left[\overset{\circ}{B}_\alpha\right]=\left[\left[\overset{\circ}{B}_\alpha\right]^{(-1;-1)}\ \left[\overset{\circ}{B}_\alpha\right]^{(1;-1)}\ \left[\overset{\circ}{B}_\alpha\right]^{(-1;1)}\ \left[\overset{\circ}{B}_\alpha\right]^{(1;1)}\right];$$

$$\left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta}\right]_h=\left[\left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta}\right]_h^{(-1;-1)}\ \left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta}\right]_h^{(1;-1)}\ \left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta}\right]_h^{(-1;1)}\ \left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta}\right]_h^{(1;1)}\right]. \tag{22}$$

Для неоднорідних призматичних тіл із змінними компонентами метричного тензора значення компонент підматриць $\left[\overset{\circ}{B}_\alpha\right]^{(S_1,S_2)}$, $\left[\overset{\circ}{B}_{\alpha,\beta}\right]_h^{(S_1,S_2)}$ визначаються відповідно до формул (20).

Необхідно відзначити, що структура виразів (21) і (22) є повністю ідентичною аналогічним виразам, що не враховують змінність компонент метричного тензора в межах СЕ (зокрема, наведеним в роботі [2]). Зважаючи на це, їх використання дозволяє, не виконуючи трудомісткого чисельного інтегрування в поперечному перерізі і практично не змінюючи обсяг обчислювальних витрат враховувати змінність геометрії в межах поперечного переріз СЕ.

З урахуванням подання коефіцієнтів розкладу деформацій (21) через коефіцієнти розкладу переміщень у ряд Маклорена, варіація енергії деформації одного СЕ може бути подана у вигляді:

$$\delta W=\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\sum_{l=0}^{L}\left(\delta\{u_l\}^T\left(\left[\overset{\circ}{B}_1\right]^T\varphi^{(l)}+\left[\overset{\circ}{B}_2\right]^T\varphi^{(l)}_{,3}\right)\left\{\overset{\circ}{\sigma}\right\}+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\delta\{u_l\}^T\left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]_h^T\varphi^{(l)}+\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]_h^T\varphi^{(l)}_{,3}\right)\left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}\right\}\right)\right)\sqrt{\overset{\circ}{g}}dx^3$$

$$\delta W=\sum_{l=0}^{L}\delta\{u_l\}^T\left\{\overset{\circ}{R}_l\right\}_h, \tag{23}$$

де $\left\{\overset{\circ}{R}_l\right\}_h$ – вектор вузлових реакцій призматичного СЕ із змінними компонентами метричного тензора в межах поперечного перерізу:

$$\left\{\overset{\circ}{R}_l\right\}_h=\left[\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\left[\overset{\circ}{B}_1\right]^T\varphi^{(l)}+\left[\overset{\circ}{B}_2\right]^T\varphi^{(l)}_{,3}\right\}\left\{\overset{\circ}{\sigma}\right\}\sqrt{\overset{\circ}{g}}dx^3+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]_h^T\varphi^{(l)}+\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]_h^T\varphi^{(l)}_{,3}\right\}\left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}\right\}\sqrt{\overset{\circ}{g}}dx^3\right)\right]=$$

$$=\left[\left[\overset{\circ}{B}_1\right]^T\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\overset{\circ}{\sigma}\right\}\varphi^{(l)}\sqrt{\overset{\circ}{g}}dx^3+\left[\overset{\circ}{B}_2\right]^T\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\overset{\circ}{\sigma}\right\}\varphi^{(l)}_{,3}\sqrt{\overset{\circ}{g}}dx^3+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]_h^T\cdot\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}\right\}\varphi^{(l)}\sqrt{\overset{\circ}{g}}dx^3+\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]_h^T\cdot\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}\right\}\varphi^{(l)}_{,3}\sqrt{\overset{\circ}{g}}dx^3\right)\right].$$

Виконуємо чисельне інтегрування за напрямком x^3:

$$\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\overset{\circ}{\sigma}\right\}\varphi^{(l)}\sqrt{\overset{\circ}{g}}dx^3=\sum_{m=1}^{M}\left\{\overset{\circ}{\sigma}\right\}_m\varphi^{(l)}_m\left(\sqrt{\overset{\circ}{g}}\right)_m H_m=\{\sigma_l\};$$

$$\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\overset{\circ}{\sigma}\right\}\varphi^{(l)}_{,3}\sqrt{\overset{\circ}{g}}dx^3=\sum_{m=1}^{M}\left\{\overset{\circ}{\sigma}\right\}_m\varphi^{(l)}_{,3\,m}\left(\sqrt{\overset{\circ}{g}}\right)_m H_m=\{\sigma_{l3}\};$$

$$\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}\right\}\varphi^{(l)}\sqrt{\overset{\circ}{g}}dx^3=\sum_{m=1}^{M}\left\{\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}\right\}_m\varphi^{(l)}{}_m\left(\sqrt{\overset{\circ}{g}}\right)_m H_m=\{\sigma_{l\alpha}\};$$

$$\int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} \varphi_{,3}^{(l)} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3 = \sum_{m=1}^{M} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\}_m \varphi_{,3\,m}^{(l)} \left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m H_m = \left\{ \sigma_{l\alpha 3} \right\}.$$

де $\left(\sqrt{\overset{\circ}{g}} \right)_m = \frac{A_m}{A\big|_{z^{3'}=0}} \sqrt{\overset{\circ}{g}\big|_{z^{3'}=0}}$; A_m – площа поперечного перерізу в точці інтегрування m (рис. 3); H_m – значення вагових функцій в точці інтегрування m.

З урахуванням результатів чисельного інтегрування отримаємо вираз для обчислення компонент вектору вузлових реакцій СЕ:

$$\left\{ \overset{\circ}{R}_l \right\}_h = \left\{ \left[\overset{\circ}{B}_1 \right]^T \left\{ \sigma_l \right\} + \left[\overset{\circ}{B}_2 \right]^T \left\{ \sigma_{l3} \right\} + \right. \\ \left. + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]_h^T \left\{ \sigma_{l\alpha} \right\} + \left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]_h^T \left\{ \sigma_{l\alpha 3} \right\} \right) \right\}. \quad (24)$$

Коефіцієнти прирощення напружень пов’язані з коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій законом Гука, векторна форма якого має вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{\sigma} \right\} = \left[\overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}, \qquad \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha} \right\} = \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}_h ,$$

де, у відповідності із законом Гука (4),

$$\left[\overset{\circ}{D} \right] = \left[\overset{\circ}{C}{}^{ijkl} \right], \quad \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] = \left[\left[\overset{\circ}{C}{}^{ij(3-\alpha)(3-\alpha)} \right] \left[\overset{\circ}{C}{}^{ij(3-\alpha)3} \right] \left[\overset{\circ}{C}{}^{ij33} \right] \right].$$

З урахуванням цього вираз для варіації енергій деформування СЕ (23) набуває вигляду:

$$\delta W = \int_{x^3=-1}^{x^3=1} \left\{ \delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\}^T \left[\overset{\circ}{D} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^{2} \left(\delta \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}_h^T \left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha} \right] \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}_h \right) \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3 .$$

Враховуючи залежності між коефіцієнтами розкладання прирощень деформацій і коефіцієнтами розкладання переміщень за поліномами, подамо отриманий вираз варіації енергії СЕ у вигляді:

$$\delta W=\sum_{l=0}^{L}\sum_{n=0}^{L}\left(\delta\{u_l\}^T\right)\left[K_{ln}\right]_h\{u_n\},$$

де $\left[K_{ln}\right]_h$ – матриця жорсткості неоднорідного призматичного СЕ із змінними компонентами метричного тензора:

$$\left[K_{ln}\right]_h=\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\left\{\left(\left[\overset{\circ}{B}_1\right]^T\varphi^{(l)}+\left[\overset{\circ}{B}_2\right]^T\varphi_{,3}^{(l)}\right)\left[\overset{\circ}{D}\right]\times\left(\left[\overset{\circ}{B}_1\right]\varphi^{(n)}+\left[\overset{\circ}{B}_2\right]\varphi_{,3}^{(n)}\right)+\right.$$

$$+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\left[\left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]_h^T\varphi^{(l)}+\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]_h^T\varphi_{,3}^{(l)}\right)\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\times\right.$$

$$\left.\left.\times\left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]_h\varphi^{(n)}+\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]_h\varphi_{,3}^{(n)}\right)\right]\right\}\sqrt{\overset{\circ}{g}}\,dx^3.$$

Виконуючи чисельне інтегрування за напрямком x^3 з урахуванням неоднорідності, введемо позначення:

$$\left[D_{00}^{ln}\right]=\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\varphi^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}\right]\varphi^{(n)}\sqrt{\overset{\circ}{g}}dx^3=\sum_{m=1}^{M}\varphi_m^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}\right]\varphi_m^{(n)}\left(\sqrt{\overset{\circ}{g}}\right)_m H_m;$$

$$\left[D_{30}^{ln}\right]=\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\varphi_{,3}^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}\right]\varphi^{(n)}\sqrt{\overset{\circ}{g}}dx^3=\sum_{m=1}^{M}\varphi_{,3\,m}^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}\right]\varphi_m^{(n)}\left(\sqrt{\overset{\circ}{g}}\right)_m H_m;$$

$$\left[D_{03}^{ln}\right]=\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\varphi^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}\right]\varphi_{,3}^{(n)}\sqrt{\overset{\circ}{g}}dx^3=\sum_{m=1}^{M}\varphi_m^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}\right]\varphi_{,3\,m}^{(n)}\left(\sqrt{\overset{\circ}{g}}\right)_m H_m;$$

$$\left[D_{33}^{ln}\right]=\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\varphi_{,3}^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}\right]\varphi_{,3}^{(n)}\sqrt{\overset{\circ}{g}}dx^3=\sum_{m=1}^{M}\varphi_{,3\,m}^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}\right]\varphi_{,3\,m}^{(n)}\left(\sqrt{\overset{\circ}{g}}\right)_m H_m;$$

$$\left[D_{00\alpha}^{ln}\right]=\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\varphi^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\varphi^{(n)}\sqrt{\overset{\circ}{g}}dx^3=\sum_{m=1}^{M}\varphi_m^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\varphi_m^{(n)}\left(\sqrt{\overset{\circ}{g}}\right)_m H_m;$$

$$\left[D_{30\alpha}^{ln}\right]=\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\varphi_{,3}^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\varphi^{(n)}\sqrt{\overset{\circ}{g}}dx^3=\sum_{m=1}^{M}\varphi_{,3\,m}^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\varphi_m^{(n)}\left(\sqrt{\overset{\circ}{g}}\right)_m H_m;$$

$$\left[D_{03\alpha}^{ln}\right]=\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\varphi^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\varphi_{,3}^{(n)}\sqrt{\overset{\circ}{g}}dx^3=\sum_{m=1}^{M}\varphi_m^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\varphi_{,3\ m}^{(n)}\left(\sqrt{\overset{\circ}{g}}\right)_m H_m;$$

$$\left[D_{33\alpha}^{ln}\right]=\int\limits_{x^3=-1}^{x^3=1}\varphi_{,3}^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\varphi_{,3}^{(n)}\sqrt{\overset{\circ}{g}}dx^3=\sum_{m=1}^{M}\varphi_{,3\ m}^{(l)}\left[\overset{\circ}{D}_{,\alpha}\right]\varphi_{,3\ m}^{(n)}\left(\sqrt{\overset{\circ}{g}}\right)_m H_m.$$

З урахуванням цих виразів для матриці жорсткості СЕ отримаємо:

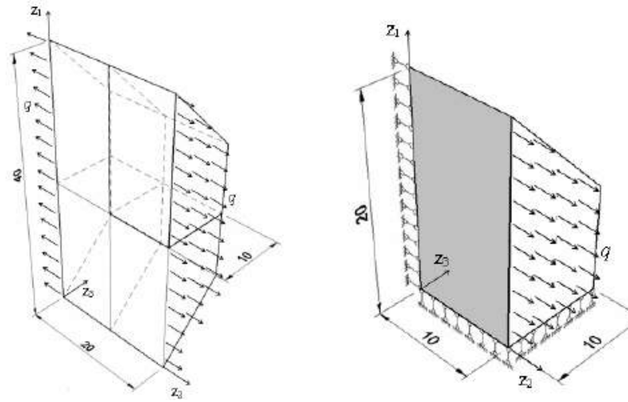
$$\left[K_{ln}\right]_h=\left\{\left[\overset{\circ}{B}_1\right]^T\left[D_{00}^{ln}\right]\left[\overset{\circ}{B}_1\right]+\left[\overset{\circ}{B}_2\right]^T\left[D_{30}^{ln}\right]\left[\overset{\circ}{B}_1\right]+\left[\overset{\circ}{B}_1\right]^T\left[D_{03}^{ln}\right]\left[\overset{\circ}{B}_2\right]+\right.$$
$$+\left[\overset{\circ}{B}_2\right]^T\left[D_{33}^{ln}\right]\left[\overset{\circ}{B}_2\right]+\frac{1}{12}\sum_{\alpha=1}^{2}\left(\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]_h^T\left[D_{00\alpha}^{ln}\right]\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]_h+\right.$$
$$+\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]_h^T\left[D_{30\alpha}^{ln}\right]\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]_h+\left[\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}\right]_h^T\left[D_{03\alpha}^{ln}\right]\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]_h+$$
$$\left.\left.+\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]_h^T\left[D_{33\alpha}^{ln}\right]\left[\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}\right]_h\right)\right\}. \qquad (25)$$

Отримані вирази матриці жорсткості (25) і вектору вузлових реакцій (24) неоднорідного скінченого елемента із змінними компонентами метричного тензора дозволяють будувати дискретні моделі для неоднорідних призматичних тіл складної форми, в тому числі при змінній вздовж утворюючої площею поперечного перерізу.

Розв'язання тестових прикладів. З метою доведення ефективності розроблених підходів, розглянуто тестову задачу про одновісний розтяг обеліску (рис. 4, *а*). Дві грані, що розташовані в площині $z^{1'}-z^{2'}$ закріплені вздовж $z^{3'}$.

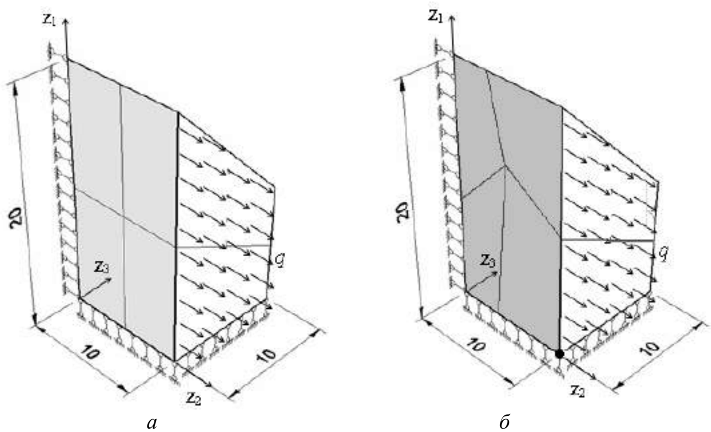
Внаслідок симетрії розрахункова схема і дискретні моделі побудовані для 1/4 об'єкта (рис. 4, *б*). Вихідні дані: зусилля розтягу $q=1$ кг/см^2, модуль пружності $E=1$ кг/см^2, коефіцієнт Пуассона $\nu=0$.

В якості еталонного розв'язку використано результат, отриманий для ортогональної сітки із застосуванням програмного комплексу "Ліра" (рис. 5,*а*). Результати, отримані для косокутної сітки (рис. 5,*б*) побудованої із застосуванням розроблених СЕ, повністю співпали з еталонним розв'язком. Значення переміщення вздовж $z^{2'}$ для вузла позначеного на рис. 5,*б* чорним колом, що отримане на косокутній сітці із СЕ, що не враховують змінність метричного тензору відрізняються від еталонних на 30%.



а *б*

Рис. 4. Тестовий приклад про одновісний розтяг обеліску:
а) схема об’єкту; б) розрахункова модель



а *б*

Рис. 5. Дискретні моделі тіла із ортогональною (а) та косокутною (б) сітками

Ефективність розробленого СЕ також підтверджено результатами розв’язання тестової задачі про розтяг в умовах плоскої деформації в площині $z^{1'}$ - $z^{3'}$ стрижня зі змінною за лінійним законом площею поперечного перерізу (розміром в напрямку $z^{1'}$), розрахунок якого був проведений із використанням МСЕ і НМСЕ [3] (рис. 5). Отримані результати розподілення напружень $\sigma_{3'3'}$ і переміщень $U^{3'}$ за напрямком $z^{3'}$ свідчать, що похибка визначення напружень і переміщень лежить в межах 1% (рис. 5).

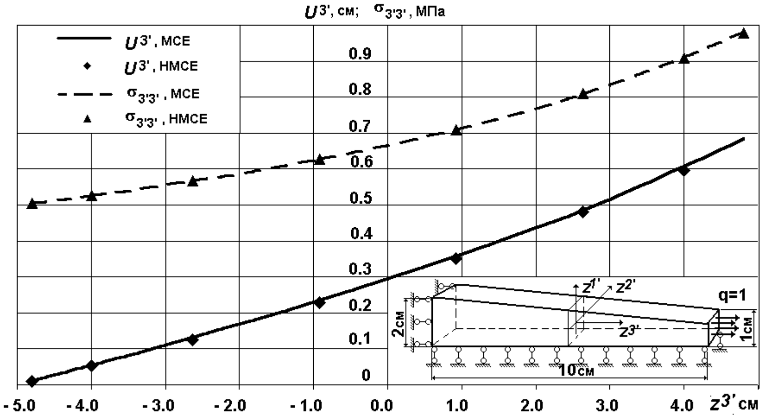


Рис. 5.Стрижень із змінною прощею поперечного перерізу: розрахункова схема та розподілення напружень і переміщень по довжині стрижня

Висновки. В даній роботі отримані вирази матриці жорсткості і вектору вузлових реакцій неоднорідного призматичного СЕ зі змінною площею поперечного перерізу та урахуванням змінності компонентів метричного тензору, з довільними граничними умовами. Ефективність його застосування доведена на тестових задачах. Результати виявили, що урахування змінності компонент метричного тензору в поперечному перерізі СЕ зі змінною площею поперечного перерізу вздовж твірної дозволяє отримувати вірогідні результати на косокутних сітках.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – К.: НИИСМ, 1993. – 376 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
3. *Пискунов С.О., Рутковський В.А., Шкриль О.О.* Призматичний скінчений елемент змінної геометрії // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.- техн. збірник – К.: КНУБА, 2005.- Вип. 76.- С. 83-90.
4. *Баженов В.А., Пискунов С.О., Солодей І.І., Андрієвський В.П., Сизевич Б.І.* Матриця жорсткості і вектор вузлових реакцій скінченого елемента для розв'язання просторових

задач термов’язкопружнопластичності НМСЕ. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник. – К.: КНУБА, 2005. – Вип. 76. – С.3–26.
5. *Блох В.И.* Теория упругости. – Харьков: Изд-во ХГУ, 1964. – 483 с.
6. *Сахаров А.С., Кислоокий В.Н., Киричевский В.В.* Метод конечных элементов в механике твердых тел. – К.: Вища школа, 1982. –479 с.

Отримано 30.04.10

Баженов В.А., Шкрыль А.А., Пискунов С.О., Богдан Д.В.

НЕОДНОРОДНЫЙ ПРИЗМАТИЧЕСКИЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ С ПЕРЕМЕННОЙ ПЛОЩАДЬЮ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ И УЧЕТОМ ПЕРЕМЕННОСТИ КОМПОНЕНТОВ МЕТРИЧЕСКОГО ТЕНЗОРА

Получены разрешающие соотношения полуаналитического метода конечных элементов (ПМКЭ) для косоугольного призматического конечного элемента с переменной площадью поперечного сечения и учетом переменности компонент метрического тензора в площади его поперечного сечения; показана эффективность их использования при решении тестовых задач.

Bazhenov V., Shkril’ A., Piskunov S., Bogdan D.

THE HETEROGENEOUS PRISMATIC FINITE ELEMENT WITH VARIABLE CROSS-SECTIONAL AREA AND TAKING INTO ACCOUNT THE VARIABILITY OF COMPONENTS OF METRIC TENSOR

Obtained resolving relations of semi-analytic finite element method (SFEM) for the oblique-angled prismatic finite element with variable cross-sectional area and taking into account the variability of components of metric tensor in its cross-section area, shows the effectiveness of their use in solving test problems.