

УДК 539.3

І.В. Жупаненко

А.М. Станкевич, канд. техн. наук

В.К. Чибіряков, д-р техн. наук

Л.Т. Шкельов, д-р техн. наук

## ЧАСТОТИ ВІЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ТОВСТОЇ ШАРНІРНО-ОПЕРТОЇ ПЛАСТИНИ

З позицій плоскої задачі теорії пружності пропонується методика розрахунку частот власних коливань прямокутного в перерізі пружного тіла, що реалізує комбінований двоетапний чисельно-аналітичний підхід. На першому етапі розрахунку застосовується два альтернативні підходи, ефективність та збіжність яких перевірена при розв'язанні тестових задач та порівнянні результатів.

З позицій плоскої задачі теорії пружності розглядаються коливання прямокутного в перерізі пружного тіла (рис. 1), закріпленого по торцях ( $x=0$  та  $x=l$ ) в'язями, що виключають вертикальні переміщення ( $v(0, y) = 0$ ,  $v(l, y) = 0$ ) та дозволяють зміщення точок торців в горизонтальному напрямку, що відповідає граничним умовам  $\sigma_x(0, y) = 0$

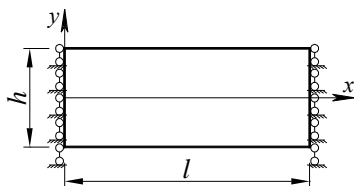


Рис. 1

та  $\sigma_x(l, y) = 0$ . З точки зору кінематики такі умови відповідають шарнірно-рухомому закріпленню в теорії тонких пластин.

Динаміка такої пластини при вільних коливаннях описується рівняннями динамічної задачі теорії пружності, які запишемо у вигляді диференціальних рівнянь в частинних

похідних першого порядку по просторовій координаті:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \sigma_x = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \sigma_y = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \tau_{xy} = \mu \frac{\partial v}{\partial x} + \mu \frac{\partial u}{\partial y}. \end{cases} \quad (1)$$

Відповідну граничну задачу будемо розв'язувати комбінованим чисельно-аналітичним методом, на першому кроці якого знижується вимірність вихідних рівнянь та граничних умов. Для зниження вимірності граничної задачі скористаємось узагальненим методом скінченних інтегральних перетворень [1], де шукані функції представляються у вигляді розкладів по координаті  $y$  по системі нормованих в скалярному добутку

$$(\varphi(x), g(x)) = \int_{-0.5h}^{0.5h} \varphi(x)g(x)dx, \quad (2)$$

поліномів Лежандра

$$f(x, y) = f(x)P_i^H(y). \quad (3)$$

Тут і далі використовуються індексні позначення і дії з індексними величинами. Відповідно, вживається угода Ейнштейна, згідно з якою по індексах, що повторюються, передбачено підсумовування.

Далі вихідні рівняння (1) та граничні умови множаться скалярно на нормовані поліноми Лежандра  $P_j^H(y)$  ( $j=1, 2, \dots, N$ ) і отримуються редуковані рівняння та граничні умови:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^i \sigma_x}{\partial x} - \frac{2}{h} m^{ji} \tau_{xy}^j = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial^i \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{2}{h} m^{ji} \sigma_y^j = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \sigma_x^i = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{2}{h} m^{ij} v^j, \\ \sigma_y^i = \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{2}{h} m^{ij} v^j, \\ \tau_{xy}^i = \mu \frac{\partial v}{\partial x} + \mu \frac{2}{h} m^{ij} u. \end{array} \right. \quad (4)$$

$$\left. \begin{array}{l} v^i(0) = 0, v^i(l) = 0; \\ \sigma_x^i(0) = 0, \sigma_x^i(l) = 0. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Матриця  $\{m^{ij}\}$  описана в [1]. Виключаючи з перших двох рівнянь  $\sigma_x^i$ ,  $\sigma_y^i$  та  $\tau_{xy}^i$  за допомогою трьох інших, отримуємо розв'язувальні рівняння

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u^i}{\partial x^2} - \frac{4}{h^2} \mu m^{ji} m^{j\alpha} u^{\alpha} + \frac{2}{h} (\lambda m^{ij} - \mu m^{ji}) \frac{\partial v^j}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u^i}{\partial t^2}, \\ \frac{2}{h} (\mu m^{ij} - \lambda m^{ji}) \frac{\partial u^i}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v^j}{\partial x^2} - \frac{4}{h^2} (\lambda + 2\mu) m^{ji} m^{j\alpha} v^{\alpha} = \rho \frac{\partial^2 v^j}{\partial t^2}. \end{cases} \quad (6)$$

Будемо шукати розв'язок у вигляді

$$\begin{aligned} u^i &= u_0^i \sin(\omega t + \varphi), \\ v^j &= v_0^j \sin(\omega t + \varphi). \end{aligned} \quad (7)$$

Після підстановки (7) до рівнянь (6) отримуємо систему звичайних диференціальних рівнянь і відповідних граничних умов відносно амплітудних значень  $u_0^i$ ,  $v_0^j$ :

$$\begin{cases} (\lambda + 2\mu) \frac{d^2 u_0^i}{dx^2} - \frac{4}{h^2} \mu m^{ji} m^{j\alpha} u_0^{\alpha} + \frac{2}{h} (\lambda m^{ij} - \mu m^{ji}) \frac{d v_0^j}{dx} = -\rho \omega^2 u_0^i, \\ \frac{2}{h} (\mu m^{ij} - \lambda m^{ji}) \frac{d u_0^i}{dx} + \mu \frac{d^2 v_0^j}{dx^2} - \frac{4}{h^2} (\lambda + 2\mu) m^{ji} m^{j\alpha} v_0^{\alpha} = -\rho \omega^2 v_0^j. \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} v_0^i(0) = 0, v_0^i(l) = 0; \\ \sigma_{x0}^i(0) = 0, \sigma_{x0}^i(l) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

Граничні умови (9) дозволяють шукати розв'язок граничної задачі у вигляді:

$$u_0^i(x) = u_{0k}^i \cos \frac{k \pi x}{l}, \quad v_0^j(x) = v_{0k}^j \sin \frac{k \pi x}{l}. \quad (10)$$

Після підстановки до рівнянь (8) залежностей (10) для кожного  $k$  отримуюємо задачу на власні значення для симетричної матриці:

$$\begin{cases} \left[ (\lambda + 2\mu) \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 \delta^{i\alpha} + \frac{4}{h^2} \mu m^{ji} m^{j\alpha} - \gamma \delta^{i\alpha} \right] \cdot u_{0k} + \frac{k\pi}{l} \frac{2}{h} (\mu m^{ci} - \lambda m^{i\alpha}) \cdot v_{0k} = 0, \\ \frac{k\pi}{l} \frac{2}{h} (\mu m^{i\alpha} - \lambda m^{ci}) \cdot u_{0k} + \left[ \mu \cdot \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 \delta^{i\alpha} + \frac{4}{h^2} (\lambda + 2\mu) m^{ji} m^{j\alpha} - \gamma \delta^{i\alpha} \right] \cdot v_{0k} = 0, \end{cases} \quad (11)$$

де  $\gamma = \rho\omega^2$  – шукане власне число. Тут  $\delta^{i\alpha}$  – символ Кронекера  $\delta^{i\alpha} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } i = \alpha \\ 0, & \text{якщо } i \neq \alpha \end{cases}$ . Власні числа, а по них відповідні частоти, шукаються за допомогою стандартної комп'ютерної програми для симетричних матриць EIGEN [2].

З метою дослідження вірогідності знаходження частот власних коливань даної пластини в роботі розглядається також альтернативний підхід до розв'язання поставленої задачі. Тут теж пропонується комбінована методика знаходження розв'язку задачі. На першому етапі по координаті  $y$  поперечний переріз пластини поділяється на смужки шириною  $\Delta y = h/n-1$ , які визначаються  $n$  прямими, серед яких пряма  $y = -h/2 (i=1)$  та пряма  $y = h/2 (i=n)$ .

Шукані функції представляються у вигляді розкладів по координаті  $y$  по системі лінійно-незалежних функцій  $\varphi_i(y) (i = \overline{1, n})$ :

$$f(x, y) = f^i(x) \varphi_i(y). \quad (12)$$

Функції  $\varphi_i(y)$  – кусково-лінійні функції, які дорівнюють 1 на прямій  $i$  та 0 на інших прямих. Ці функції не ортогональні в скалярному добутку (2) і тому утворюють косокутний базис. В зв'язку з цим для кожної функції  $g(y)$  необхідно розглядати дві групи величин – коефіцієнти  $g^{ij}$ , що є коефіцієнтами в розкладі (12) та моменти  $g_{ij}$ , що є скалярними добутками  $(g(y), \varphi_i(y))$ . Крім основного базису  $\varphi_i (i = \overline{1, n})$  необхідно також розглядати взаємний базис  $\varphi^i (i = \overline{1, n})$ , який пов'язаний з основним базисом співвідношенням

$$(\varphi_i, \varphi^j) = \delta_i^j = \delta^i_j = (\varphi^i, \varphi_j). \quad (13)$$

Відповідно визначаються фундаментальні матриці

$$(\varphi_i, \varphi_j) = g_{ij}, \quad (\varphi^i, \varphi^j) = g^{ij},$$

які є взаємно оберненими  $\{g^{ij}\} = \{g_{ij}\}^{-1}$  завдяки співвідношенню (13). Мають місце співвідношення, які пов'язують коефіцієнти (контраваріантні компоненти) з моментами (коваріантними компонентами):

$$\varphi_i = g_{ij}\varphi^j, \quad \varphi^i = g^{ij}\varphi_j. \quad (14)$$

Надалі використовується матриця  $\{b_{ij}\}$ , елементи якої

$$b_{ij} = (\varphi_i(y), \varphi'_j(y)), \quad (15)$$

де штрихом позначено похідну від функції по змінній  $y$ .

Для зниження вимірності рівнянь (1) скористаємось описаним вище підходом, але з базисними функціями  $\varphi_i$ . В результаті отримуємо систему рівнянь

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{xi}}{\partial x} - b_{ji} g^{ja} \tau_{xya} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xyi}}{\partial x} - b_{ji} g^{ja} \sigma_{y\alpha} = \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2}, \\ \sigma_{xi} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_i}{\partial x} + \lambda b_{ij} g^{ja} v_\alpha, \\ \sigma_{yi} = \lambda \frac{\partial u_i}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) b_{ij} g^{ja} v_\alpha, \\ \tau_{xyi} = \mu \frac{\partial v_i}{\partial x} + \mu b_{ij} g^{ja} u_\alpha. \end{array} \right. \quad (16)$$

і, відповідно, граничних умов

$$\left\{ \begin{array}{l} v_i(0) = 0, \quad v_i(l) = 0; \\ \sigma_{xi}(0) = 0, \quad \sigma_{xi}(l) = 0. \end{array} \right. \quad (17)$$

Якщо в системі рівнянь (16) виключити моменти напружень за допомогою трьох останніх рівнянь, то можна отримати систему рівнянь другого порядку по змінних  $x$  і  $t$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - \mu b_{ji} g^{j\alpha} b_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} u_\gamma + (\lambda b_{ij} g^{j\alpha} - \mu b_{ji} g^{j\alpha}) \frac{\partial v_\alpha}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}, \\ \left( \mu b_{ij} g^{j\alpha} - \lambda b_{ji} g^{j\alpha} \right) \frac{\partial u_\alpha}{\partial x} + \mu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^2} - (\lambda + 2\mu) b_{ji} g^{j\alpha} b_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} v_\gamma = \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2}. \end{array} \right. \quad (18)$$

Далі, виконуючи аналогічні виконаним вище перетворення, задачу зводимо до знаходження власних чисел матриці:

$$\left[ \begin{array}{cc} (\lambda + 2\mu) \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 \delta_i^\alpha + & \frac{k\pi}{l} (\mu b_{ji} g^{j\alpha} - \lambda b_{ij} g^{j\alpha}) \\ \mu b_{ji} g^{j\beta} b_{\beta\epsilon} g^{\epsilon\alpha} - \gamma \delta_i^\alpha & \\ & \mu \cdot \left( \frac{k\pi}{l} \right)^2 \delta_i^\alpha + \\ \frac{k\pi}{l} (\mu b_{ij} g^{j\alpha} - \lambda b_{ji} g^{j\alpha}) & + (\lambda + 2\mu) b_{ji} g^{j\beta} b_{\beta\epsilon} g^{\epsilon\alpha} - \gamma \delta_i^\alpha \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_\alpha^k \\ v_\alpha^k \end{bmatrix} = 0 \quad (19)$$

для кожного окремого  $k$ .

На відміну від (11) матриця системи алгебраїчних рівнянь (19) не є симетричною. Причиною цього є застосування неортонормованої системи функцій  $\varphi_i(y)$  ( $i = 1, n$ ). Щоб симетризувати відповідну матрицю на основі лінійно-незалежної системи функцій за допомогою алгоритму Грама-Шмідта побудуємо ортонормовану систему функцій  $z_i(y)$  ( $i = 1, n$ ). При застосуванні алгоритму ортогоналізації Грама-Шмідта виробляється нижньотрикутна матриця скалярних добутків

$$\Omega = \begin{bmatrix} \omega_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \omega_{21} & \omega_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{n1} & \omega_{n2} & \omega_{n3} & \dots & \omega_{nn} \end{bmatrix},$$

яка є матрицею переходу до нового базису  $z_i(y)$ :

$$\varphi_i(y) = \omega_{ij} z_j(y), \quad z_i(y) = \omega_{ij}^{-1} \varphi_j(y). \quad (20)$$

З цього випливають співвідношення між коефіцієнтами та моментами відносно косокутного базису  $\varphi_i(y)$  та коефіцієнтами (а тут моменти співпадають з коефіцієнтами відносно ортонормованого базису):

$$u^i = \omega_{ij} u^j = \omega_{ij} g^{j\alpha} u_\alpha,$$

$$u^i = \omega_{ij}^{-1} u^j, \quad u_i = \omega_{ji} u^j \quad (u \Leftrightarrow v), \quad (21)$$

де індексом над літерою позначено коефіцієнти відносно ортонормованого базису. З урахуванням співвідношення (21) систему (19) перетворюємо до вигляду, де матриця коефіцієнтів вже є симетричною.

Як приклад застосування розглянутих методик та розроблених програм, за допомогою яких ці методики реалізовані, розглянуто пластину, для якої прийнято  $l = 1 \text{ м}$ ,  $\rho = 2,5 \text{ т/м}^3$ ,  $E = 2,4 \cdot 10^6 \text{ кН/м}^2$ ,  $\nu = 0,3$ . Для пластини товщиною  $h = 0,1 \text{ м}$  (досить тонкої) отримані результати при різних значеннях  $N$  та  $n$  порівнювались з відомими значеннями частот при поперечних коливаннях за класичною теорією пластин (табл. 1). Частоти коливань при  $h = 0,5 \text{ м}$  наведені в табл. 2.

З наведених результатів видно, що обидві альтернативні методики дають однакові результати з високою точністю. Нижні частоти, отримані по класичній теорії з достатньою для практики точністю наближаються до отриманих з урахуванням просторових ефектів.

Таблиця 1

Частоти власних коливань пластини товщиною  $h = 0,1 \text{ м}$

Частота	Кількість прямих $n$				Кількість поліномів $N$				Класична теорія пластин
	5	11	16	21	4	6	8	10	
$\omega_1$	287,7	287,7	287,7	287,7	287,7	287,7	287,7	287,7	292,6
$\omega_2$	1098	1098	1098	1098	1098	1098	1098	1098	1171
$\omega_3$	2311	2309	2309	2309	2309	2310	2309	2309	2634

Таблиця 2

Частоти власних коливань пластини товщиною  $h = 0,5$  м

$k$		$\omega_1$	$\omega_2$	$\omega_3$	$\omega_4$
1	$N = 6$	1092	3151	5076	6643
	$N = 10$				6640
	$n = 7$	1092	3151	5076	6620
	$n = 11$				6638
2	$N = 6$	2957	5399	7283	7643
	$N = 10$			7282	7641
	$n = 7$	2960	5401	7273	7628
	$n = 11$	2957	5400	7281	7639
3	$N = 6$	4875	6511	9308	10410
	$N = 10$			9295	10390
	$n = 7$	4885	6523	9264	10370
	$n = 11$	4877	6513	9291	10390
4	$N = 6$	6768	7772	10830	13110
	$N = 10$			10800	12990
	$n = 7$	6790	7875	10740	12850
	$n = 11$	6770	7779	10790	12980

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Чибіряков В.К., Смоляр А.М. Теорія товстих пластин та оболонок: монографія. – Черкаси: ЧДТУ, 2002. – 160 с.: іл.
2. Форсайт Дж., Малькольм М., Моулдер К. Машинные методы математических вычислений. – М.: Изд. «Мир», 1980. – 280 с.

Отримано 25.05.10



*Жупаненко И.В., Станкевич А.Н., Чибиряков В.К., Шкелёв Л.Т.*

**ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОЛСТОЙ ШАРНИРНО-ОПЕРТОЙ ПЛАСТИНЫ**

С позиции плоской задачи теории упругости предложена методика расчета частот собственных колебаний прямоугольного в сечении упругого тела, реализующая комбинированный двухэтапный численно-аналитический подход. На первом этапе расчета применяется два альтернативных подхода, эффективность и достоверность которых проверена решением тестовых задач и сравнением результатов.

*Zhupanenko I.V., Stankevich A.N., Chybiryakov V.K., Shkelev L.T.*

**THE FREQUENCIES OF FREE VIBRATIONS OF THE HINGE-SUPPORTED THICK PLATE**

From a position of a flat problem of the theory of elasticity a method is proposed for solution of the problem on free vibrations of rectangular in section of the elastic body. The method realizes combined the numerically-analytical approach. At the first stage of calculation it is applied two alternative approaches, which efficiency and reliability has been checked by solving of test problems and comparison of results.