

УДК 539.3

М.О. Соловей, д-р техн. наук  
 О.П. Кривенко, канд. техн. наук  
 О.С. Дубина

## АНАЛІЗ ЗБІЖНОСТІ ТА ТОЧНОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧІ ЗГИНУ ПРУЖНОЇ ПЛАСТИНИ МЕТОДОМ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ В УЧБОВОМУ КОМПЛЕКСІ

Розв'язки задачі згину пружної пластини, що отримані в учбовому комплексі методом скінченних елементів (МСЕ), порівняні з результатами розрахунків за іншими програмними комплексами та методиками різних авторів.

Студенти 5-го курсу КНУБА за спеціальністю “Промислове та цивільне будівництво” виконують за допомогою учбового розрахункового комплексу (УРК) кафедри будівельної механіки розрахунково-графічну роботу «Розрахунок пластин на згин за методом скінченних елементів». Для аналізу якості отримуваних за УРК розв'язків розглянуто стандартну тестову задачу згину тонкої пружної жорстко затиснутої вздовж контуру квадратної пластини, що навантажена рівномірним нормальним тиском інтенсивністю  $q$  (рис. 1). Додатково розглядалися розв'язки [1], що отримані за моментною схемою скінченних елементів (МССЕ), за методиками О.Зенкевича, В.О.Постнова й І.Я.Хархуріма та за відомими програмними комплексами (ПК) ANSYS, COSMOS, NASTRAN, SCAD, LIRA, ФРОНТ.

В якості розрахункового фрагмента розглядалася чверть пластини з рівномірною сіткою, що обмежена двома площинами симетрії, при наступних вихідних даних: розмір у плані  $a = 200$  см, товщина  $h = 1$  см,

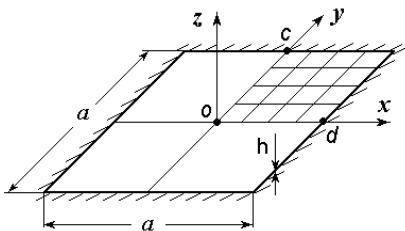


Рис. 1. Жорстко затиснута квадратна пластинка

модуль пружності матеріалу  $E = 2 \cdot 10^6$  кг/см<sup>2</sup>, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.3$ .

За еталонні прийняті аналітичні розв'язки С.П.Тимошенка для прогинів та згинальних моментів, що отримані за теорією тонких пластин [2]. Прогин пластини у центрі (точці  $o$ ) визначається співвідношенням

$$w_o = 0.00126qa^4/D, \quad (1)$$

де  $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$  – жорсткість пластини при згині. З (1) випливає, що

$$q = w_o Eh^3/[0.01512 a^4 (1 - \nu^2)]. \quad (2)$$

Для зручності проведення аналізу розв'язку задачі прийнято  $w_o = 1$  см при відповідно до (2)  $q = 0.0908483$  кг/см<sup>2</sup>.

Таблиця 1

Сітка СЕ	УРК			Кількість невідомих	МССЕ		ПК ЛІРА	
	Кількість невідомих	$w_o$	$\Delta$ , %		$w_o$	$\Delta$ , %	$w_o$	$\Delta$ , %
1×1	12	1.17	17.00	-	-	-	-	-
2×2	27	1.11	11.00	54	0.97937	-2.06	1.10591	10.59
3×3	48	1.06	6.00	96	0.99180	-0.82	1.05574	5.57
4×4	75	1.03	3.00	150	0.99731	-0.27	1.03424	3.42
5×5	108	1.02	2.00	216	0.99993	-0.01	1.02370	2.37
6×6	147	1.02	2.00	294	1.00140	0.14	1.01797	1.80
7×7	192	1.01	1.00	384	1.00220	0.22	1.01504	1.50
8×8	-	-	-	486	1.00280	0.28	1.01202	1.20
9×9	-	-	-	600	1.00320	0.32	1.01073	1.07
10×10	-	-	-	726	1.00340	0.34	1.00923	0.92
С.П. Тимошенко [2]				$w_o = 1$ см				

Аналіз результатів показує швидку збіжність і високу точність розв'язку задачі в УРК за прогином порівняно з МССЕ й ПК ЛІРА (табл. 1) та методиками ПК ANSYS, NASTRAN, COSMOS, ФРОНТ, SCAD, О.Зенкевича, В.О.Постнова (рис. 2).

Порівнювальні величини згинальних моментів визначаються такими співвідношеннями [2]:

1) у центрі пластини (точці  $o$ )

$$M_{x0} = M_{y0} = 0.0231 qa^2, \tag{3}$$

2) в середині сторін квадратної пластини (точках *c* та *d*)

$$M_{xd} = M_{yc} = -0.0513 qa^2. \tag{4}$$

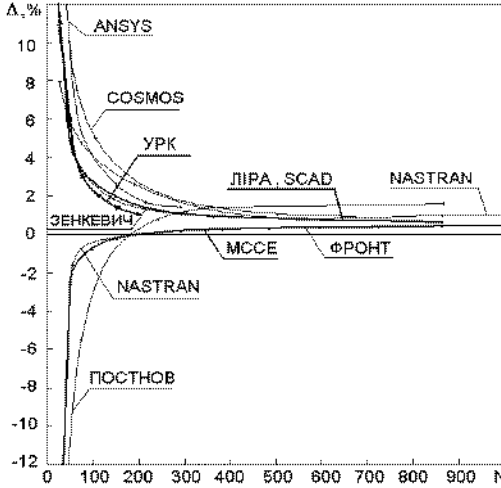


Рис. 2. Порівняння збіжності прогину центра пластини  $w_0$

В УПК згинальні моменти обчислюються у вузлах скінченних елементів (СЕ). В МССЕ [1] та в ПК ЛІРА [3] ця процедура виконується в центрах СЕ. Тому для визначення зусиль у вузлових точках *o*, *c*, *d* були отримані розрахункові співвідношення зі застосуванням інтерполяційної формули Лагранжа [4] та врахуванням прийнятого шаблону (рис. 3) й існуючих площин симетрії:

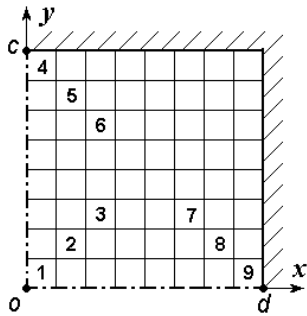


Рис. 3. Чверть розрахункової пластини

$$M_{xo} = 1.2201 M_{x1} - 0.2717 M_{x2} + 0.0489 M_{x3},$$

$$M_{yo} = 1.2201 M_{y1} - 0.2717 M_{y2} + 0.0489 M_{y3},$$

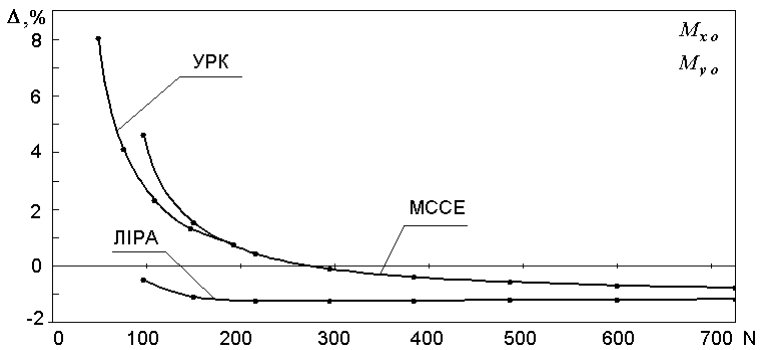
$$M_{yc} = 1.8750 M_{y4} - 1.2500 M_{y5} + 0.3750 M_{y6},$$

$$M_{xd} = 1.8750 M_{x9} - 1.2500 M_{x8} + 0.3750 M_{x7},$$

де  $M_{x1} - M_{x9}$ ,  $M_{y1} - M_{y9}$  – згинальні моменти в центрах СЕ шаблону з відповідними номерами 1 – 9.

Таблиця 2

Сітка СЕ	УРК			Кількість невідомих	МССЕ		ПК ЛІРА	
	Кількість невідомих	$M_{x0}$	$\Delta$ , %		$M_{x0}$	$\Delta$ , %	$M_{x0}$	$\Delta$ , %
3×3	48	90.6936	8.04	96	87.8195	4.62	83.5209	-0.50
4×4	75	87.3897	4.10	150	85.2196	1.52	83.0028	-1.12
5×5	108	85.8805	2.31	216	84.2891	0.41	82.8963	-1.25
6×6	147	85.0341	1.30	294	83.8424	-0.12	82.8906	-1.25
7×7	192	84.5753	0.75	384	83.6045	-0.40	82.9054	-1.24
8×8	-	-	-	486	83.4564	-0.58	82.9225	-1.22
9×9	-	-	-	600	83.3604	-0.70	82.9375	-1.20
10×10	-	-	-	726	83.2891	-0.78	82.9500	-1.18
С.П. Тимошенко [2]				$M_{x0} = M_{y0} = 83.9438$ кг·см				

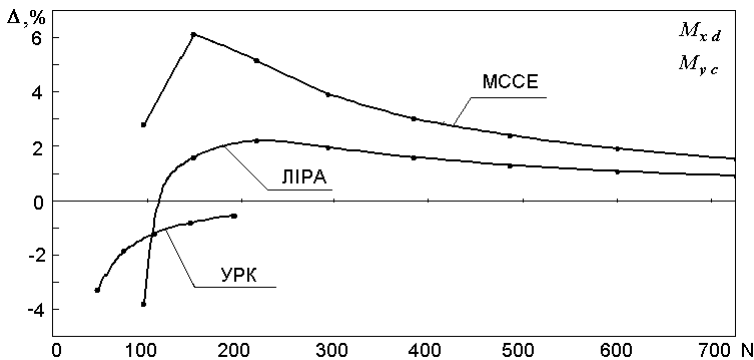
Рис. 4. Збіжність розв'язків за моментами  $M_{x0}$  і  $M_{y0}$  в центрі пластини

Проведене дослідження підтверджує швидко збіжність та високу точність розв'язків в УРК за моментами при порівнянні з результатами МССЕ та ПК ЛІРА (табл. 3 - 4, рис. 4 - 5). Похибка між порівнювальними розв'язками знаходиться в межах 1 - 2 %.

Таблиця 3

Сітка СЕ	УРК			Кіль- кість невідомих	МССЕ		ПК ЛІРА	
	Кількість невідомих	$M_{xd}$	$\Delta, \%$		$M_{xd}$	$\Delta, \%$	$M_{xd}$	$\Delta, \%$
3×3	48	-180.0819	-3.29	96	-191.4327	2.80	-179.1302	-3.81
4×4	75	-182.7331	-1.87	150	-197.6032	6.11	-189.1620	1.58
5×5	108	-183.9568	-1.21	216	-195.7868	5.14	-190.2987	2.19
6×6	147	-184.6706	-0.83	294	-193.4937	3.91	-189.8226	1.94
7×7	192	-185.1805	-0.56	384	-191.8326	3.02	-189.1727	1.59
8×8	-	-	-	486	-190.6801	2.40	-188.6246	1.29
9×9	-	-	-	600	-189.7450	1.89	-188.2008	1.07
10×10	-	-	-	726	-189.0567	1.53	-187.8806	0.89

С.П. Тимошенко [2]  $M_{xd} = M_{yc} = -186.4207$  кг·см

Рис. 5. Збіжність розв'язків за моментами  $M_{xd}$  і  $M_{yc}$  в середині сторін пластины

Таким чином, на прикладі стандартної тестової задачі згину тонкої пружної пластини визначено швидку збіжність та достатню точність розв'язків, що обчислюються за допомогою учбового розрахункового комплексу кафедри будівельної механіки КНУБА.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Кривенко О.П., Соловей М.О.* Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури. – К.: ЗАТ “Віпол”, 2010. – 316 с.
2. *Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. - М.: Наука, 1966. – 636 с.
3. *Лантух-Лященко А.И.* Программный комплекс для расчета и проектирования конструкций. – К.-М.: Факт, 2001. – 360 с.
4. *Корн Г.А., Корн Т.М.* Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1974. – 832 с.

Отримано 20.08.2010

*Соловей Н.А., Кривенко О.П., Дубина А.С.*

#### **АНАЛИЗ СХОДИМОСТИ И ТОЧНОСТИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ИЗГИБА УПРУГОЙ ПЛАСТИНЫ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В УЧЕБНОМ КОМПЛЕКСЕ**

Решения задачи изгиба упругой пластины, которые были получены в учебном комплексе методом конечных элементов, сравнивались с результатами расчетов по другим программным комплексам и методикам разных авторов.

*Solovey M.O., Kryvenko O.P., Dubyna O.S.*

#### **THE ANALYSIS OF CONVERGENCE AND ACCURACY OF THE SOLUTIONS FOR THE PROBLEM OF THE CURVING OF ELASTIC PLATE BY A METHOD OF FINAL ELEMENTS AT THE EDUCATIONAL PROGRAM**

The solutions of the analysis of curving of elastic plate, which were received at the educational program by a method of final elements, were compared with results of accounts by other programs complexes and techniques of the different authors.