УДК 539.3

А.Д. Легостаєв, канд. техн. наук
Н.А. Гречух
О.О. Яковенко

УЗАГАЛЬНЕНІ КООРДИНАТИ РЕДУКОВАНИХ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ ОБОЛОНКОВИХ КОНСТРУКЦІЙ НЕРЕГУЛЯРНОЇ СТРУКТУРИ

Викладено алгоритм розв'язання задачі про власні коливання оболонкових конструкцій нерегулярної структури, який ґрунтується на положеннях методу підконструкцій. Модель конструкції передбачає розділення її на окремі фрагменти по границям, які чітко визначають на стадії створення конструкції. В межах кожного фрагмента будується регулярна сітка скінченних елементів із забезпеченням співпадіння вузлів на границях суміжних фрагментів. Співвідношення МСЕ будуються у переміщеннях. За узагальнені координати рівнянь руху редукованої моделі конструкції прийняті конфігурації границь фрагментів і форми коливань їх внутрішніх областей, які уточнюються в ітераційному процесі визначення частот власних коливань, число яких і точність обчислення призначаються заздалегідь.

Задачі динаміки оболонкових конструкцій, які є основними несучими елементами машин і будівель є важливим розділом забезпечення їх надійності. По перше, потрібно визначити динамічні характеристики таких конструкцій, знання яких виключає можливість резонансу, по друге – форми власних коливань, як ортогональні вектори, використовуються у якості базису при розв'язанні задач на дію динамічних навантажень довільного характеру у просторі і часі. Застосування методу скінченних елементів щодо розв'язання таких задач потребує створення дискретних моделей з великим числом ступенів вільності для забезпечення достовірної апроксимації геометричних і фізичних характеристик моделей. В той же час практичну цінність має тільки деяка частина нижчого спектру власних частот. У зв'язку з цим виникла потреба побудови редукованих моделей, число ступенів вільності яких суттєво менше аніж вихідної дискретній моделі, але частоти і форми власних коливань вихідної і редукованої моделей співпадають. Для оболонкових конструкцій регулярної структури створення редукованих моделей адекватних вихідній моделі не викликає особливих труднощів. Для такого випадку створені алгоритми, які забезпечують реалізацію процесу ітерацій з деякою частиною власних векторів спектру власних коливань вихідної дискретної моделі із забезпеченням щільності нижчої частини спектру. Процес ітерацій передбачає забезпечення умов ортогональності власних векторів, число яких заздалегідь призначено. Ці вектори утворюють своєрідний підпростір. Розмірність векторів, які його складають, відповідає числу ступенів вільності вихідної дискретної моделі. Тобто задача про власні коливання реалізується без зменшення просторової апроксимації області, яка рухається. Число ітерацій залежить від початкового значення власних векторів. Процес швидко завершується, якщо наближені значення векторів початкового етапу ітерацій досить близькі до дійсних значень векторів, які слід визначити.

Для забезпечення вище указаної умови, побудуємо наближені вектори власних коливань за методом базисних вузлів. Суть цього методу полягає в тім, що у випадку використання функцій переміщень в якості розв'язувальних, будується редукована модель вихідної дискретної моделі, число ступенів вільності якої відповідає числу переміщень тільки деякої сукупності вузлів. Ці вузлі називаються базисними, а їх переміщення новими узагальненими координатами. Для забезпечення їх незалежності по напрямку переміщень базисних вузлів ставляться абсолютно жорсткі в'язі. Перетворена таким чином вихідна модель аналогічна основній схемі методу переміщень будівельної механіки. Зв'язок між узагальненими координатами вихідної і редукованої дискретних моделей виконується за формулою:

$$\{u\} = [U]\{q\}, \tag{1}$$

де $\{q\}$ – вектор нових узагальнених координат.

Побудова матриці перетворень $[U]$ виконується шляхом розрахунку основної системи на змушені одиничні зміщення базисних вузлів по напрямку накладення в'язей. Кількість рядків матриці $[U]$ відповідає розмірності вихідної дискретної моделі, а кількість стовпців – кількості нових узагальнених координат. Таким чином побудова редукованої моделі виконується без погіршення просторової апроксимації вихідної моделі.

Редукована модель фрагмента будується шляхом підстановки (1) в рівняння руху його дискретної моделі

$$\{\delta u\}^T ([k]\{u\} + [M]\{\ddot{u}\}) = 0 . \tag{2}$$

Рівняння руху редукованої моделі набуває вигляду:

$$[A]\{q\} + [B]\{\ddot{q}\} = 0 , \tag{3}$$

де

$$[A] = [U]^T [k][U] , \tag{4}$$

$$[B]=[U]^T[M][U], \tag{5}$$

$$\{g(t)\}=[U]^T\{Q(t)\}, \tag{6}$$

відповідно матриці жорсткості, мас і вектор узагальнених сил, які характеризують рух редукованої моделі.

Для оболонкових конструкцій нерегулярної структури використовується метод підконструкцій, суть якого полягає в розділенні конструкції на окремі фрагменти регулярної структури. Кожен фрагмент розглядається як оболонка тонка або середньої товщини. Геометрія фрагментів описується точковим каркасом на обмежуючих поверхнях в декартовій прямокутній системі координат, єдиній для цілої конструкції. Побудова дискретної моделі фрагмента виконується методом скінченних елементів. Сітка скінченних елементів в межах кожного фрагмента формується автономно, але із забезпеченням умов збіжності вузлів на границях суміжних фрагментів. Вузли дискретної моделі фрагмента нумеруються в топологічній системі координат x^1, x^2, x^3, пов’язаній із цим фрагментом. Така система координат еквівалентна Лагранжевій. Вона не змінюється у процесі руху об’єкта, до якого віднесена. Сукупність трьох координат (x^1, x^2, x^3) визначає положення вузла в сітковій області і забезпечує обчислення параметрів топологічної моделі фрагмента та розміри робочих і інформаційних масивів для реалізації обчислень на ЕОМ.

Кожному вузлу сітки відповідає трійка значень Z^1, Z^2, Z^3 глобальної декартової системи координат, яка визначає положення вузла дискретної моделі в просторі.

На вхідному рівні геометрія оболонки подається точковим каркасом – координатами вузлів сітки на обмежуючих поверхнях оболонки в декартовій прямокутній системі координат.

На оперативному рівні інформація про геометрію зображується точковим каркасом вузлів на серединній поверхні і значеннями функції товщин у вузлах. Координати вузлів на серединній поверхні обчислюються як напівсума координат відповідних вузлів на обмежуючих поверхнях. Функція товщин обчислюється як різниця координат відповідних вузлів на обмежуючих поверхнях, що можна трактувати як проекції відрізка, що з’єднує відповідні вузли, на осі глобальної декартової системи координат. Така проста заміна змінних дала змогу покращити обумовленість матриці жорсткості моделі фрагмента і підвищити точність розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь високого порядку. При цьому число невідомих МСЕ не змінюється.

Для кожного фрагмента вводиться система базисних вузлів, частина яких повинна належати границі суміжних фрагментів, а частина – внутрішній області. Встановлюється послідовність побудови редукованих моделей фрагментів і виконується наскрізна нумерація узагальнених координат їх редукованих моделей. Введено поняття «глобальний номер узагальненої координати редукованої моделі», що суттєво спрощує процедуру побудови матриці жорсткості і мас цілої конструкції. Матриці будуються шляхом підсумовування коефіцієнтів відповідних редукованих матриць фрагментів, що мають одинакові глобальні номери узагальнених координат.

При такому підході побудови редукованої матриці жорсткості оболонкової конструкції сумісність переміщень для цілої моделі забезпечується тільки в граничних точках (базисних вузлах). Внутрішні точки також фігурують в загальній матриці, але характеризують той фрагмент, до якого вони відносяться. Побудова редукованої моделі конструкції за викладеним способом передбачає призначення стикових вузлів тільки з частини вузлів сіткової області, які розташовані на границі. Це може привести до умов розривності переміщень на границях.

Для запобігання такому явищу передбачено уточнення умов нерозривності на границях фрагментів шляхом використання у якості узагальнених координат конфігурації границі суміжних фрагментів в формах коливань фрагментів і самих форм коливань для внутрішньої області, отриманих за допомогою моделі першого рівня наближення.

Ще належить відпрацювати прийоми ідентифікації границь і їх конфігурацій, які будуть використані у якості нових узагальнених координат. Кожну з таких границь слід закріпити. Для побудови редукованої матриці фрагмента необхідно знов таки побудувати матрицю перетворення до нових координат. Для цього виконується розрахунок фрагмента на змушене зміщення границі стільки раз, скільки наближених форм коливань будуть використані для формування нових узагальнених координат. Конфігурація внутрішньої області фрагмента, яка також розглядається як узагальнена координата, приймається відповідно наближеній формі коливань.

Процес визначення динамічних характеристик складних оболонок методом підконструкцій за викладеною схемою передбачає ітераційний процес розв'язання задач.

Розв'язок узагальненої проблеми про власні значення редукованих матриць спочатку зводиться до задачі про власні значення симетричної матриці.

$$([A]-\lambda[B])\{q\}=0\,. \quad (7)$$

З цією метою використовується факторизація матриці $[B]$ методом Холецького [1]:

$$[B]=[S]^T[S]\,, \tag{8}$$

де $[S]$ – права трикутна матриця.

Підставляючи (8) в (7) з послідуючими визначеними добутку на $[S]^{T^{-1}}$ ліворуч отримаємо:

$$([\tilde{A}]-\lambda[E])\{\tilde{q}\}=0\,, \tag{9}$$

де

$$[\tilde{A}]=[S]^{T^{-1}}[A][S]^{-1}\,; \tag{10}$$

$$\{\tilde{q}\}=[S]\{q\}\,. \tag{11}$$

Розв’язок повної проблеми про власні значення (9) реальної симетричної матриці $[\tilde{A}]$ реалізується методом обертання Якобі [1].

В основі цього методу закладена побудова послідовності матриць, ортогонально подібній вихідній в яких монотонно зменшуються до нуля суми квадратів усіх поза діагональних коефіцієнтів. Власні значення матриці визначаються як границя послідовності діагональних коефіцієнтів. Одночасно обчислюються і власні вектори. Аналізуючи різні варіанти в алгоритмі Якобі було встановлено, що найбільш сприйнятливим є циклічний процес з бар’єрами. Він має перевагу над процесом, побудованим на послідовному вилученні найбільших поза діагональних елементів, що виключає необхідність пошуку цих членів. В процесі з бар’єрами вводиться визначена нумерація поза діагональних елементів і їх ліквідація виконується у відповідності з прийнятою послідовністю монотонного зменшення до нуля додатних чисел $\alpha_!, \alpha_2, \alpha_3, ...\alpha_\kappa$, які названі бар’єрами.

При циклічному перегляді анулюється лише той з поза діагональних елементів, який по модулю менший α_1. В подальшому бар’єр α_1 замінюється бар’єром α_2 і так далі, до повного завершення циклу.

Метод обертань за поданою схемою досить просто реалізується, він стійкий у відношенні до помилки округлення і має високу швидкість збіжності. Наявність кратних і близьких по значенню власних значень приводить до прискорення завершення циклічного процесу.

Найбільш сприйнятливим для задачі про власні коливання є алгоритм ітерації у підпросторі, який застосовується як для однофрагментної моделі, так і для багатофрагментних моделей методу підконструкцій. Метод реалізується у такій послідовності:

1) будується матриця жорсткості дискретної моделі для вихідного числа ступенів вільності;
2) довільним чином задається n лінійно незалежних векторів;
3) розв'язується система рівнянь, де у якості «правої» частини використовується n довільних, але лінійно незалежних векторів.

Результати розв'язку цієї системи рівнянь є нові вектори

$$[K][U]_{(j)} = [P]_{(j-1)} . \tag{12}$$

Визначаємо матрицю

$$[A]_{(j)} = [U]_{(j)}^{T}[P]_{(j-1)} \tag{13}$$

і редуковану матрицю мас $n \times n$

$$[B]_{(j)} = [U]_{(j)}^{T}[M][U]_{(j)} . \tag{14}$$

Виконується ортогоналізація наближених значень власних векторів, з яких складена матриця $[U]_{(j)}$, що отримана в (12), методом обертання Якобі.

$$[B]_{(j)} = [S]_{(j)}^{T}[S]_{(j)} ,$$

$$[\tilde{A}]_{(j)} = [S]_{(j)}^{T^{-1}}[A]_{(j)}[S]_{(j)}^{-1} , \tag{15}$$

отримаємо власні значення перетворених наближених матриць

$$[\tilde{A}\}_{(j)}]\tilde{V}]_{(j)} = [\overset{*}{\Lambda}]_{(j)} ,$$

$$[V]_{(j)} = [S]_{(j)}^{-1}[\tilde{V}]_{(j)} , \tag{16}$$

$$[V]_{(j)} = [S]^{-1}[\tilde{V}] .$$

Подальші дії пов'язані з такими перетвореннями матриць:

$$[\tilde{R}]_{(j)} = [U]_{(j)}[V]_{(j)} ,$$

$$[M]_{(j)} = diag([R]_{(j)}^{T}[M][\tilde{R}]) ,$$

$$[R]_{(j)} = [\widetilde{M}]_{(j)}[\widetilde{R}]_{(j)},$$

$$[\Lambda]_{(j)} = diag([R]^T [K][R]), \tag{17}$$

$$[P]_{(j)} = [R]_{(j)}. \tag{18}$$

Цикл алгоритму переривається у пункті (17), коли необхідне число перших значень λ_i співпадає з відповідним числом значень $\overset{*}{\lambda}_i$, отримали у п. (16) методом обертання Якобі.

Власні числа $[\Lambda]$ початкового варіанту редукованої моделі конструкції запам'ятовуються. Відповідні їм власні вектори дають змогу побудувати форми коливань повної скінченноелементної моделі конструкції.

Наступний крок розв'язку задачі пов'язаний з уточненням власних чисел, що передбачає призначення нових узагальнених координат – конфігурації границь фрагментів по отриманим наближеним формам коливань і формам коливань фрагментів. Побудова редукованих моделей фрагментів для нових узагальнених координат і обчислення редукованих матриць жорсткості і мас повної моделі. Розв'язується узагальнена проблема для цих матриць в приведеній послідовності (7) – (18).

Отримані власні числа порівнюються з тими, що отримані для попередньої моделі. Процес продовжується до тих пір, поки власні числа j-го та $(j+1)$-го кроку не співпадають з заданою заздалегідь точністю для призначеної кількості власних чисел.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Воеводин В.В.* Вычислительные методы алгебры. Теория и алгоритмы.- М. Наука.1966 г. –236 с.

Отримано 16.07.2010

Легостаев А.Д., Гречух Н.А., Яковенко О.О.

ОБОБЩЕННЫЕ КООРДИНАТЫ РЕДУЦИРОВАННЫХ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ОБОЛОЧЕЧНЫХ КОНСТРУКЦИЙ НЕРЕГУЛЯРНОЙ СТРУКТУРЫ

Изложен алгоритм решения задач о собственных колебаниях оболочечных конструкций нерегулярной структуры, который основан на положениях метода подконструкций. Модель конструкции предопределяет разделение ее на отдельные фрагменты по границам, которые четко определяют на стадии создания конструкции. В пределах каждого фрагмента строится регулярная сетка конечных элементов с обеспечением совпадения узлов на границах смежных фрагментов. Соотношения МКЭ строятся в перемещениях. В качестве обобщенных координат уравнений движения редуцированной модели конструкции приняты конфигурации границ фрагментов и формы колебаний их внутренних областей, которые уточняются в итерационном процессе определения частот собственных колебаний, число которых и точность их вычисления задаются предварительно.

Legostaev A.D.,Grechukh N.A., Iakovenko O.O.

GENERAL CCORDINATES OF REDUCED MODELS IN TASKS OF DYNAMICS OF SHELL CONSTRUCTIONS WITH IRREGULAR STRUCTURE

The algorithm of decision of tasks of own oscillations of shallow constructions of irregular structure is set, which is based on positions of method of subconstructions. The model of construction predetermines dividing of it into separate fragments on boders which clearly determine on the stage of creation of construction. Within the limits of every fragment the regular grid of finite elements is built with providing of coinciding of knots on the borders of contiguous frag-ments. Correlations of MFE are built in displacements. For the generalized coordinates of equa-tions of motion of reduction model of construction configurations of borders of fragments and form of vibrations of their internal areas which are specified in the iteration process of determi-nation of frequencies of own oscillations are taken, the number of which and exactness finding them are set preliminary.