УДК 539.3

В.А. Баженов, д-р техн. наук
О.С. Погорелова, канд. фіз.-мат. наук
Т.Г. Постнікова, канд. техн. наук

РОЗВИТОК МЕТОДУ ПРОДОВЖЕННЯ ЗА ПАРАМЕТРОМ ДЛЯ ВІБРОУДАРНИХ СИСТЕМ ПРИ МОДЕЛЮВАННІ УДАРУ СИЛОЮ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ

В статті викладаються теоретичні положення застосування методу продовження розв'язку за параметром для дослідження динаміки віброударних систем під дією періодичного зовнішнього навантаження. Розв‘язки рівнянь руху будуються в залежності від параметра його амплітуди. Удар моделюється нелінійною силою контактної взаємодії, яка описується законом Герца. Теоретичні викладки розроблені для двохмасових систем з двома ступнями вільності. Відмічаються переваги цього методу, які дозволяють суттєво зменшити обчислювальні витрати.

Вступ. Метод продовження розв'язку за параметром був застосований та розвинутий в НДІ будівельної механіки КНУБА (тоді ПНДЛ тонкостінних просторових конструкцій) колективом авторів для побудови та дослідження періодичних розв‘язків звичайних нелінійних диференціальних рівнянь в просторі станів та в амплітудно-частотної області [1]. Плодотворно працювали в цьому напрямку Є.С.Дехтярюк та його учні і послідовники. Зокрема, була розроблена теорія застосування цього методу для дослідження динаміки та стійкості віброударних систем з n ступнями вільності, якщо удар моделювався граничними умовами з використанням коефіцієнту відновлення [2,3]. Для двомасових віброударних систем з двома ступнями вільності разом з теоретичними розробками був виконаний чисельний аналіз динамічних станів цих систем та досліджена стійкість їхніх коливальних рухів [4].

Відомо, що моделювання удару граничними умовами передбачає удар миттєвим, при цьому швидкості тіл, що співударяються, змінюються в мить удару стрибком. Механічні властивості цих тіл враховуються лише у коефіцієнті відновлення. Але для деяких типів віброударних систем (наприклад, якщо обмежник коливань м'який) тривалість удару може бути порівняна з тривалістю руху між ударами. Такий удар не можна вважати миттєвим, його слід моделювати не граничними умовами, а нелінійною силою контактної взаємодії [5]. В [6] було доведено, що в системах з твердим обмежником коливань моделювання удару контактною силою також дає хороші результати. Тому автори статті вважають доцільним в віброударних системах будь-якого типу удар моделювати силою контактної взаємодії [7]. Такий підхід до моделювання удару зумовлює необхідність використання методу продовження розв’язку за параметром для віброударних систем, якщо удар моделюється контактною силою.

Застосування методу продовження розв’язку за параметром суттєво спрощує побудови, які пов‘язані з дослідженням віброударних режимів коливань пружних систем, та в рази зменшує витрати обчислювального процесу. Він дозволяє знаходити розв’язки рівнянь руху при усталеному режимові коливань в залежності від того чи іншого параметра, який вибраний ведучим. Для кожного значення параметра крок за кроком отримуємо розв‘язки на періоді усталеного режиму, обминаючи при цьому перехідний процес. Використання методу продовження за параметром скорочує час побудови таких розв’язків в десятки разів.

Слід відмітити, що побудови, пов’язані з продовженням розв’язку за параметром у віброударних системах, якщо удар моделюється контактною силою, також спрощуються порівняно з аналогічними побудовами при моделюванні удару граничними умовами з використанням коефіцієнту відновлення.

1. Постановка задачі

В статті розвиток методу продовження за параметром здійснюється для двомасової віброударної системи з двома ступнями вільності, що складається із основного тіла та приєднаного, яке може відігравати роль ударного чи безударного динамічного гасителя коливань. Докладніше ця модель описана в [4,6]. Її розрахункова схема зображена на рис.1.

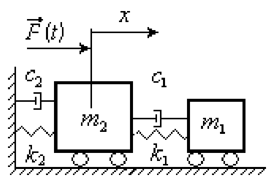


Рис. 1

Нелінійні диференціальні рівняння її руху мають вигляд:

$$\begin{aligned}
\ddot{x}_1 &= -2\xi_1\omega_1(\dot{x}_1-\dot{x}_2)-\omega_1^2(x_1-x_2-D)+\frac{1}{m_1}F_{кон}(t),\\
\ddot{x}_2 &= -2\xi_2\omega_2\dot{x}_2-\omega_2^2x_2-2\xi_1\omega_1\mu(\dot{x}_2-\dot{x}_1)-\omega_1^2\chi(x_2-x_1+D)+\\
&\quad+\frac{1}{m_2}[F(t)-F_{кон}(t)],
\end{aligned} \qquad (1)$$

де $\omega_1=\sqrt{\dfrac{k_1}{m_1}}$, $\omega_2=\sqrt{\dfrac{k_2}{m_2}}$; $\xi_1=\dfrac{c_1}{2m_1\omega_1}$, $\xi_2=\dfrac{c_2}{2m_2\omega_2}$; $\chi=\dfrac{m_2}{m_1}$.

Сила контактної взаємодії $F_{кон}(t)$, яка моделює удар, діє лише під час удару и відсутня в інші моменти часу. Контактна сила може бути описана різними законами, наприклад, законом пружності [5]. В своїх роботах обираємо для її опису контактний закон Герца [8,9]:

$$F_{кон}(t) = K\alpha(t)^{3/2}, \tag{2}$$

де $\alpha(t) = x_2 - x_1$ – відносне зближення тіл ,

$$K = \frac{4}{3}\frac{q}{(\delta_0 + \delta_1)\sqrt{A+B}}, \quad \delta_0 = \frac{1-\mu_0^2}{E_0\pi}, \quad \delta_1 = \frac{1-\mu_1^2}{E_1\pi}, \tag{3}$$

μ_i и E_i – коефіцієнти Пуасона та модулі Юнга для обох тіл, *A, B* и *q* – константи, які характеризують місцеву геометрію зони контакту. Графіки контактної сили в різних масштабах часу зображені на рис.3, *в,г*.

Розглянемо розвиток методу продовження за параметром для цієї моделі при побудові розв‘язків рівнянь (1) на періоді усталеного режиму коливань в залежності від значення амплітуди зовнішнього навантаження. Для цього гармонічне зовнішнє навантаження запишемо у вигляді:

$$F(t) = \lambda F_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \tag{4}$$

де λ - параметр інтенсивності навантаження, за цим параметром будується продовження розв’язку. Модифікація методу розробляється для дослідження *T*-періодичних усталених режимів коливань.

Головна ідея методу така. Розглядаються усталені періодичні рухи. Це обумовлює можливість отримання розв’язку лише на одному періоді. Отримавши розв’язок рівнянь руху системи (1) для деякого фіксованого λ прямим чисельним інтегруванням, обминаємо перехідний процес і розглядаємо отриманий розв’язок на одному періоді руху. Стан, якому відповідає початок обраного періоду, буде вихідним для побудов на наступному кроці. Суть методу полягає в тому, щоб для нового значення ведучого параметра λ одержати розв’язок одразу на цьому одному періоді, не розглядаючи перехідний процес. Це можна зробити, якщо відомі вихідні умови на цьому періоді. Але після зміни значення параметра λ, який отримав приріст, вихідні значення переміщень та швидкостей, тобто вихідні умови, також змінилися, отримавши прирости. Задача полягає в знаходженні цих приростів. Вони визначать нові вихідні умови, які дадуть можливість отримати розв’язок рівнянь руху одразу на одному періоді. Рухаючись таким чином далі крок за кроком отримуємо розв’язки рівнянь руху системи на періоді усталеного періодичного процесу при зміні параметра λ. Звичайно такі розв‘язки можна здобути шляхом прямого чисельного інтегрування рівнянь руху (1) для кожного нового значення λ, але, як вже було відмічено, використання методу продовження за параметром дозволяє обминати перехідний процес і зразу досліджувати усталений режим коливань, що значно скорочує час обчислень.

2. Теоретичні основи модифікованого методу продовження розв‘язку за параметром

Подивимось докладніше, як реалізуються такі побудови. Візьмемо деяке фіксоване значення параметру навантаження $\lambda_{(k)}$ і знайдемо шляхом прямого чисельного інтегрування розв’язок рівнянь руху (1) $x_{1(k)}(t), x_{2(k)}(t)$, який зображений на рис. 2.

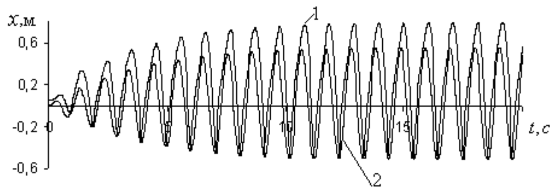
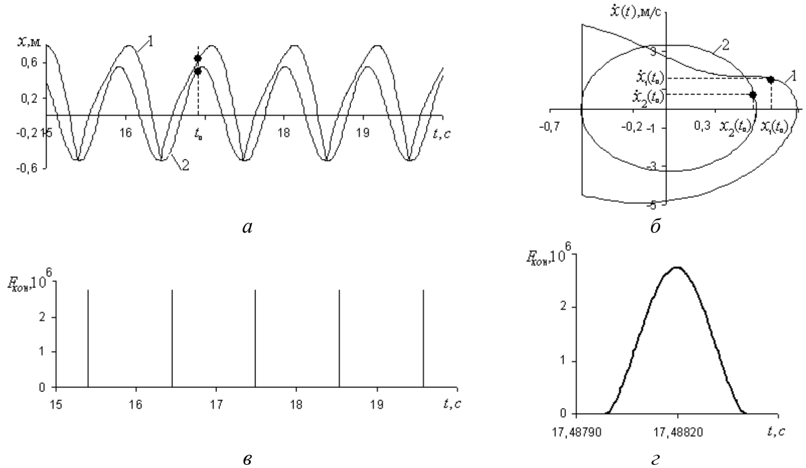


Рис. 2

На всіх рисунках зображені розв‘язки рівнянь руху, що отримані для моделі рис. 1 при певних значеннях її параметрів та вихідних умов, які приведені в [6]. Цифрою 1 позначений криві, що відносяться до приєднаного тіла m_1, цифрою 2 – до основного тіла m_2 .

Обминаємо перехідний процес та обираємо в усталеному режимові коливань стан при деякому $t=t_0$, який буде вихідним для подальших побудов. На графіках цьому стану відповідає точка при $t=t_0$ (рис.3 *а,б*).



а *б*

в *г*

Рис. 3

В цьому стані маємо значення переміщень та швидкостей обох тіл, наприклад: $t_0 = 16,92\ c$, $x_{1(k)}(t_0) = 0,64 м$, $x_{2(k)}(t_0) = 0,53\ м$, $\dot{x}_{1(k)}(t_0) = 1,57\ м/с$, $\dot{x}_{2(k)}(t_0) = 0,78\ м/с$.

Розв'язок рівнянь руху (1) на одному періоді при таких вихідних даних зображений на рис.4

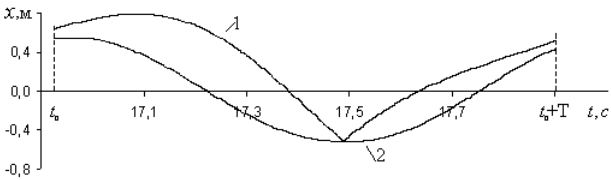


Рис.4.

Переходячи до наступного кроку, надамо параметрові $\lambda_{(k)}$ приріст

$$\lambda_{(k+1)} = \lambda_{(k)} + \Delta\lambda_{(k)}. \tag{5}$$

Очевидно, що при новому значенні амплітуди навантаження процес коливань зміниться і, зокрема, при $t = t_0$ значення переміщень та швидкостей будуть іншими, що наочно видно на рис. 5.

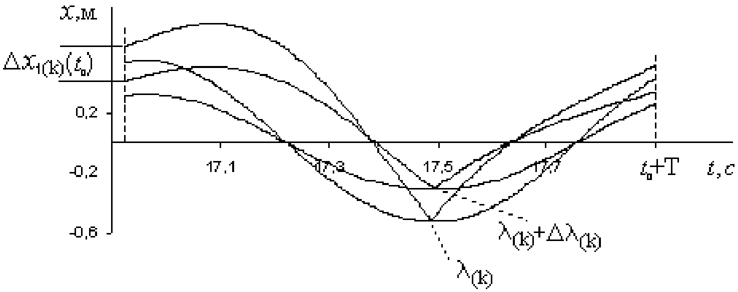


Рис.5

Природно, що розв'язок рівнянь руху взагалі залежить від вихідних умов, тобто

$$\begin{aligned} x_i(t) &= x_i(t, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0), \lambda), \\ \dot{x}_i(t) &= \dot{x}_i(t, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0), \lambda), \quad i = 1,2, \end{aligned} \tag{6}$$

а розв'язок рівнянь руху на періоді залежить від вихідних умов на цьому періоді, тобто від значень переміщень та швидкостей при $t = t_0$. Таким чином залежності типу (6) існують на кожному k-му кроці. Отже, щоб знайти розв'язок рівнянь руху на періоді при кожному новому значенні $\lambda_{(k+1)}$ (5), необхідно знайти нові вихідні умови для переміщень та швидкостей при $t = t_0$, а для цього треба знайти їхні прирости:

$$\begin{aligned} x_{i(k+1)}(t_0) &= x_{i(k)}(t_0) + \Delta x_{i(k)}(t_0), \\ \dot{x}_{i(k+1)}(t_0) &= \dot{x}_{i(k)}(t_0) + \Delta \dot{x}_{i(k)}(t_0), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{7}$$

Для знаходження цих приростів скористуємось умовами періодичності, що виконуються на кожному кроці для T-періодичних усталених режимів коливань, які розглядаються. На (k+1)-му кроці маємо:

$$\begin{aligned} x_{i(k+1)}(t_0+T, x_{1(k+1)}(t_0), x_{2(k+1)}(t_0), \dot{x}_{1(k+1)}(t_0), \dot{x}_{2(k+1)}(t_0), \lambda_{(k+1)}) &= x_{i(k+1)}(t_0), \\ \dot{x}_{i(k+1)}(t_0+T, x_{1(k+1)}(t_0), x_{2(k+1)}(t_0), \dot{x}_{1(k+1)}(t_0), \dot{x}_{2(k+1)}(t_0), \lambda_{(k+1)}) &= \dot{x}_{i(k+1)}(t_0), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{8}$$

Якщо рівності (7) підставити в (8), то отримуємо систему чотирьох нелінійних рівнянь відносно чотирьох невідомих приростів

$$\Delta x_{1(k)}(t_0), \Delta x_{2(k)}(t_0), \Delta \dot{x}_{1(k)}(t_0), \Delta \dot{x}_{2(k)}(t_0), \tag{9}$$

які відповідають приросту $\Delta\lambda_{(k)}$ ведучого параметра:

$$\begin{aligned} & x_{i(k+1)}(t_0+T, x_{1(k)}(t_0) + \Delta x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0) + \Delta x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0) + \\ & + \Delta \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0) + \Delta \dot{x}_{2(k)}(t_0), \lambda_{(k)} + \Delta\lambda_{(k)}) = x_{i(k)}(t_0) + \Delta x_{i(k)}(t_0), \\ & \dot{x}_{i(k+1)}(t_0+T, x_{1(k)}(t_0) + \Delta x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0) + \Delta x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0) + \\ & + \Delta \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0) + \Delta \dot{x}_{2(k)}(t_0), \lambda_{(k)} + \Delta\lambda_{(k)})) = \dot{x}_{i(k)}(t_0) + \Delta \dot{x}_{i(k)}(t_0), \\ & \qquad i = 1, 2. \end{aligned} \tag{10}$$

Щоб позбутися нелінійності, тобто лінеариувати систему (10), розкладемо ліві частини рівнянь в ряд Тейлора відносно приростів (9) і відкидаючи члени вище першого порядку, отримаємо лінійну алгебраїчну систему чотирьох рівнянь (11) з чотирма невідомими (9):

$$\begin{aligned} c_{11}\Delta x_{1(k)}(0) + c_{12}\Delta x_{2(k)}(0) + c_{13}\Delta \dot{x}_{1(k)}(0) + c_{14}\Delta \dot{x}_{2(k)}(0) &= b_1 \\ c_{21}\Delta x_{1(k)}(0) + c_{22}\Delta x_{2(k)}(0) + c_{23}\Delta \dot{x}_{1(k)}(0) + c_{24}\Delta \dot{x}_{2(k)}(0) &= b_2 \\ c_{31}\Delta x_{1(k)}(0) + c_{32}\Delta x_{2(k)}(0) + c_{33}\Delta \dot{x}_{1(k)}(0) + c_{34}\Delta \dot{x}_{2(k)}(0) &= b_3 \\ c_{41}\Delta x_{1(k)}(0) + c_{42}\Delta x_{2(k)}(0) + c_{43}\Delta \dot{x}_{1(k)}(0) + c_{44}\Delta \dot{x}_{2(k)}(0) &= b_4 \end{aligned} . \tag{11}$$

Тут: діагональні члени

$$c_{ii} = \frac{\partial x_{i(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)}(t_0+T, x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \lambda_{(k)}) - 1, \; i = 1, 2,$$

$$c_{ii} = \frac{\partial \dot{x}_{i-2,(k)}}{\partial \dot{x}_{i-2,(k)}(t_0)}(t_0+T, x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \lambda_{(k)}) - 1, \; i = 3, 4,$$

недіагональні члени

$$c_{ij} = \frac{\partial x_{i(k)}}{\partial x_{j(k)}(t_0)}(t_0 + T, x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \lambda_{(k)}),$$

$$i, j = 1, 2, i \neq j,$$

$$c_{ij} = \frac{\partial x_{i(k)}}{\partial \dot{x}_{j-2,(k)}(t_0)}(t_0 + T, x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \lambda_{(k)}),$$

$$i = 1, 2,\ j = 3, 4,$$

$$c_{ij} = \frac{\partial \dot{x}_{i-2,(k)}}{\partial x_{j(k)}(t_0)}(t_0 + T, x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \lambda_{(k)}),$$

$$i = 3, 4,\ j = 1, 2,$$

$$c_{ij} = \frac{\partial \dot{x}_{i-2,(k)}}{\partial \dot{x}_{j-2,(k)}(t_0)}(t_0 + T, x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \lambda_{(k)}),$$

$$i, j = 3, 4, i \neq j,$$

праві частини

$$b_i = -\frac{\partial x_{i(k)}}{\partial \lambda_{(k)}}(t_0 + T, x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \lambda_{(k)})\Delta\lambda_{(k)} - r_{i(k)},$$

$$i = 1,2, \qquad (12)$$

$$b_i = -\frac{\partial \dot{x}_{i(k)}}{\partial \lambda_{(k)}}(t_0 + T, x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \lambda_{(k)})\Delta\lambda_{(k)} - \dot{r}_{i(k)},$$

$$i = 3,4.$$

В рівностях (12) запроваджені нев’язки k-го кроку методу продовження за параметром:

$$r_{i(k)} = x_{i(k)}(t_0 + T) - x_{i(k)}(t_0), i = 1,2, \qquad (13)$$

$$\dot{r}_{i(k)} = \dot{x}_{i(k)}(t_0 + T) - \dot{x}_{i(k)}(t_0), i = 1,2. \qquad (14)$$

Наявність нев'язки обумовлена чисельним методом розв‘язання задачі. Їхні значення $r_{1(k)}, r_{2(k)}, \dot{r}_{1(k)}, \dot{r}_{2(k)}$ характеризують похибку виконання умов періодичності та регулюються величиною кроку ведучого параметра.

Таким чином, розв’язуючи лінійну алгебраїчну систему (11), знайдемо прирости вихідних умов (9), які розшукуються. Але перш, ніж розв’язувати цю систему, необхідно обчислити її коефіцієнти та праві частини. Для цього знайдемо частинні похідні за вихідними значеннями змінних від обох частин рівнянь (1) . Будемо мати на увазі, що

$$\frac{\partial}{\partial x_{i(k)}(t_0)}(\dot{x}_{j(k)}) = \frac{\partial}{\partial x_{i(k)}(t_0)}\left(\frac{dx_{i(k)}}{dt}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x_{j(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)}\right), i = 1,2,\ j = 1,2. \qquad (15)$$

Отримуємо для змінних $x_{1(k)(t}\ (t_0), x_{2(k)}(t_0)$:

$$\frac{d^2}{dt^2}(\frac{\partial x_{1(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)}) = -2\xi_{11}\omega_1\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial x_{1(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial x_{2(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)}\right) -$$

$$-\omega_1^2\left(\frac{\partial x_{1(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)} - \frac{\partial x_{2(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)}\right) + \frac{1}{m_1}\frac{\partial F_{кон}(t)}{\partial x_{i(k)}(t_0)},$$

$$\frac{d^2}{dt^2}(\frac{\partial x_{2(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)}) = -2\xi_2\omega_2\frac{d}{dt}\frac{\partial x_{2(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)} - \omega_2^2\frac{\partial x_{2(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)} - \tag{16}$$

$$-2\xi_1\omega_1\chi\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial x_{2(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)} - \frac{d}{dt}\frac{\partial x_{1(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)}\right) -$$

$$-\omega_1^2\left(\frac{\partial x_{2(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)} - \frac{\partial x_{1(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)}\right) - \frac{1}{m_2}\frac{\partial F_{кон}(t)}{\partial x_{i(k)}(t_0)},$$

$$i = 1, 2.$$

Частинна похідна контактної сили, що представлена формулами (2),(3), має вигляд:

$$\frac{\partial F_{кон}(t)}{\partial x_{i(k)}(t_0)} = \frac{3}{2}K(x_{2(k)} - x_{1(k)})^{\frac{1}{2}}(\frac{\partial x_{2(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)} - \frac{\partial x_{1(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)}),\quad i = 1, 2. \tag{17}$$

Таким чином при i=1 (16) визначає систему двох диференціальних рівнянь 2-го порядку, розв'язуючи яку з певними вихідними умовами, одержимо коефіцієнти 1-го стовпця алгебраїчної системи (11) $c_{i1}, i = 1,2,3,4$. При i=2 за рівняннями (16) одержимо систему двох диференціальних рівнянь, розв'язуючи яку з певними вихідними умовами визначимо коефіцієнти 2-го стовпця алгебраїчної системи (11) $c_{i2}, i = 1, 2, 3, 4$. Аналогічно визначаються коефіцієнти 3-го та 4-го стовпців алгебраїчної системи (11). Підкреслимо, що вигляд цих 4-х систем диференціальних рівнянь (16) однаковий, але вони мають різні вихідні умови (про що буде сказано далі) і різний сенс мають їхні змінні. Якщо ввести прості позначення:

$$\frac{\partial x_{1(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)} = y_1, \frac{\partial x_{2(k)}}{\partial x_{i(k)}(t_0)} = y_2,\quad i = 1, 2, \tag{18}$$

тоді ці системи приймуть звичний вигляд:

$$\ddot{y}_1 = -2\xi_1\omega_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - \omega_1^2(y_1 - y_2) + \frac{1}{m_1}\frac{3}{2}K(x_{2(k)} - x_{1(k)})^{1/2}(y_2 - y_1),$$
$$\ddot{y}_2 = -2\xi_2\omega_2\dot{y}_2 - \omega_2^2 y_2 - 2\xi_1\omega_1\chi(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - \omega_1^2\chi(y_2 - y_1) - \quad (19)$$
$$-\frac{1}{m_2}\left(\frac{3}{2}K(x_{2(k)} - x_{1(k)})^{1/2}(y_2 - y_1)\right).$$

Для знаходження правих частин системи (11) знайдемо частинні похідні за змінним параметром $\lambda_{(k)}$ від обох частин рівнянь (1)

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial x_{1(k)}}{\partial\lambda_{(k)}}\right) = -2_1\xi_2\omega_1\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial x_{1(k)}}{\partial\lambda_{(k)}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial x_{2(k)}}{\partial\lambda_{(k)})}\right) - \omega_1^2\left(\frac{\partial x_{1(k)}}{\partial\lambda_{(k)}} - \frac{\partial x_{2(k)}}{\partial\lambda_{(k)}}\right) +$$
$$+\frac{1}{m_1}\frac{3}{2}K(x_{2(k)} - x_{1(k)})^{1/2}\left(\frac{\partial x_{2(k)}}{\partial\lambda_{(k)}} - \frac{\partial x_{1(k)}}{\partial\lambda_{(k)}}\right),$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{\partial x_{2(k)}}{\partial\lambda_{(k)}}\right) = -2_2\omega_2\frac{d}{dt}\frac{\partial x_{1(k)}}{\partial\lambda_{(k)}} - \omega_2^2\frac{\partial x_{1(k)}}{\partial\lambda_{(k)}} - 2\xi_1\omega_1\chi\left(\frac{d}{dt}\frac{\partial x_{1(k)}}{\partial\lambda_{(k)}} - \frac{d}{dt}\frac{\partial x_{2(k)}}{\partial\lambda_{(k)}}\right) - \quad (20)$$
$$-\omega_1^2\chi\left(\frac{\partial x_{1(k)}}{\partial\lambda_{(k)}} - \frac{\partial x_{2(k)}}{\partial\lambda_{(k)}}\right) +$$
$$+\frac{1}{m_2}\left(F_0\cos(\omega t + \varphi_0) - \frac{3}{2}K(x_{1(k)} - x_{2(k)})^{1/2}\left(\frac{\partial x_{1(k)}}{\partial\lambda_{(k)}} - \frac{\partial x_{2(k)}}{\partial\lambda_{(k)}}\right)\right).$$

Якщо ввести прості позначення:

$$\frac{\partial x_{1(k)}}{\partial\lambda_{(k)}} = y_1, \frac{\partial x_{2(k)}}{\partial\lambda_{(k)}} = y_2, \quad (21)$$

тоді цю систему можна записати у звичному вигляді:

$$\ddot{y}_1 = -2\xi_1\omega_1(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) - \omega_1^2(y_1 - y_2) + \frac{1}{m_1}\frac{3}{2}K(x_{2(k)} - x_{1(k)})^{1/2}(y_2 - y_1),$$
$$\ddot{y}_2 = -2\xi_2\omega_2\dot{y}_2 - \omega_2^2 y_2 - 2\xi_1\omega_1\chi(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) - \omega_1^2\chi(y_2 - y_1) + \quad (22)$$
$$+\frac{1}{m_2}\left(F_0\cos(\omega t + \varphi_0) - \frac{3}{2}K(x_{2(k)} - x_{1(k)})^{1/2}(y_2 - y_1)\right).$$

Таким чином, маємо п’ять систем диференціальних рівнянь 2-го порядку, розв’язки яких являються коефіцієнтами лінійної алгебраїчної системи (11). Розв’язуючи ці системи с певними вихідними умовами, тобто розв’язуючи п’ять задач Коші, отримуємо коефіцієнти системи (11). Раніше [3,4]відмічалось, що згідно з теорією диференціальних рівнянь перші чотири задачі Коші, які визначаються системами (19) мають такі вихідні умови:

$$y_1(t_0) = \delta_{1i}, y_2(t_0) = \delta_{2i}, \dot{y}_1(t_0) = \delta_{3i}, \dot{y}_2(t_0) = \delta_{4i}, i = 1,2,3,4, \qquad (23)$$

де δ_{ji} – символ Кронекера, i – номер відповідної задачі Коші.

Коефіцієнти $c_{1i}, c_{2i}, c_{3i}, c_{4i}$ (i=1,2,3,4) системи (11) обчислюються, виходячи з розв'язку цих задач Коші в момент часу $t = t_0 + T$:

$$c_{1i} = y_1(t_0 + T), c_{2i} = y_2(t_0 + T), c_{3i} = \dot{y}_1(t_0 + T), c_{4i} = \dot{y}_2(t_0 + T), i = 1,2,3,4.$$

Праві частини системи (11) визначаються шляхом розв'язання 5-ої задачі Коші (22) з нульовими вихідними умовами:

$$y_1(t_0) = 0, y_2(t_0) = 0, \dot{y}_1(t_0) = 0, \dot{y}_2(t_0) = 0. \qquad (24)$$

На цьому побудова розв'язку вихідних рівнянь (1) на періоді в усталеному режимові коливань при зміні параметра інтенсивності зовнішнього навантаження закінчується. Розв'язання п'яти задач Коші (19) та (22) з певними вихідними умовами (23) та (24) дозволяє отримати значення коефіцієнтів лінійної алгебраїчної системи (11). Розв'язки цієї системи являються приростами вихідних значень переміщень та швидкостей (9) тіл віброударної системи для нового значення амплітуди зовнішнього навантаження (5). Значення вихідних переміщень та швидкостей при $t = t_0$ (7) обумовлюють розв'язок вихідних рівнянь (1) для нового значення амплітуди зовнішнього навантаження.

Висновок. Для побудови періодичних розв‘язків систем нелінійних диференціальних рівнянь руху віброударної системи пропонується синтез процедури продовження розв‘язку за параметром та моделювання удару нелінійною силою контактної взаємодії, яка описується законом Герца. Перевагою модифікованого методу є суттєве спрощення побудов, пов‘язаних з аналізом усталених віброударних режимів коливань пружних систем, значне зменшення витрат обчислювального процесу та скорочення часу досліджень.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Дехтярюк Е.С., Гоцуляк Е.А., Лизунов П.П.* Устойчивость периодических режимов колебаний в нелинейних механических системах //Вища школа. – Львов, 1983. – 286 с.
2. *Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М.* Стійкість сталих режимів коливань віброударних систем при періодичному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2001.-Вип.69.-С.10-18.
3. *Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М.* Чисельні методи побудови амплітудно-частотних характеристик періодичних режимів коливань віброударних систем // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник - К.: КНУБА, вип. 70. 2002. - С. 69-81.

4. *Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М.* Аналіз усталених віброударних процесів в пружних системах при внутрішньому ударному контакті // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2003.-Вип.73.- сс.31-44.
5. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Гончаренко С.Н.* Сравнительный анализ способов моделирования контактного взаимодействия в виброударных системах //Пробл. прочности. - 2009. - №4. – С. 69-77.
6. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Лукьянченко О.А.* Численные исследования динамических процессов в виброударных системах при моделировании удара силой контактного взаимодействия// Пробл. прочности. - 2008. - №6. – С. 82-90.
7. *Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.* Застосування різних способів моделювання удару в віброударних системах з твердим та м‘яким обмежниками. Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірн. – К.: КНУБА, 2010 р. Вип. 86.– С.87-93.
8. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел.– М.:Стройиздат, 1965. –448 с.
9. *Джонсон К.* Механика контактного взаимодействия. –М.:Мир, 1989. –509 с.

Стаття надійшла до редакції 26.04.2011 р.

Погорелова О.С., Постникова Т.Г.

РАЗВИТИЕ МЕТОДА ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ ДЛЯ ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ УДАРА СИЛОЙ КОНТАКТНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В статье излагаются теоретические положения применения метода продолжения решения по параметру для исследования динамики виброударных систем под действием периодической внешней нагрузки. Решения уравнений движения строятся в зависимости от параметра ее амплитуды. Удар моделируется нелинейной силой контактного взаимодействия, которая описывается законом Герца. Теоретические выкладки приведены для двухмассовых систем с двумя степенями свободы. Отмечаются преимущества метода, позволяющего существенно уменьшить вычислительные затраты.

Pogorelova O.S., Postnikova T.G.

THE DEVELOPMENT OF CONTINUATION AFTER PARAMETER METHOD FOR VIBROIMPACT SYSTEMS PROVIDED THE IMPACT IS SIMULATED BY CONTACT INTERACTION FORCE

The theoretical positions of continuation after parameter method applying for research of vibroimpact systems dynamic under periodical external loading are given in this article. The solutions of movement equations are obtained depending of external loading amplitude. The impact is simulated by the nonlinear contact interaction force describing by Hertz law. The theoretical manipulations are given for two-mass vibroimpact systems with two degrees of freedom. The advantages of method allowing to reduce essentially the calculating expenditures are marked.