УДК 539.3

А.Д. Легостаєв, канд. техн. наук
Н.А. Гречух
О.О. Яковенко

ПОБУДОВА РОЗРАХУНКОВИХ МОДЕЛЕЙ МСЕ РІЗНОМАНІТНИХ КОНСТРУКЦІЙ ПРИ ВИЗНАЧЕННІ ЇХ ДИНАМІЧНИХ ХАРАКТЕРИСТИК І НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ВІД ДІЇ СТАТИЧНИХ І ДИНАМІЧНИХ НАВАНТАЖЕНЬ

Приведені результати розв’язання задач на власні коливання комбінованих конструкцій, отриманих методом скінченних елементів. Викладена суть алгоритму розв'язання задач динаміки, який побудований на основі методу підконструкцій і редукованих моделей фрагментів. Використовується універсальний тривимірний скінченний елемент, співвідношення для якого отримані в переміщеннях. Редукована дискретна модель фрагмента будується шляхом переходу до нових узагальнених координат – переміщень базисних вузлів, призначених з числа повного набору вузлів скінченноелементної моделі фрагмента.

Пропонуються прийоми побудови розрахункових моделей МСЕ різноманітних конструкцій, які мають застосування в якості несучих елементів будівель і машин.

Розвиток методів розв’язання задач механіки зорієнтований у напрямку більш глибокого вивчення окремих важливих для практики класів задач з метою отримання наближених, але прийнятливих результатів.

Актуальною є задача визначення динамічних характеристик перехресно балочних систем, які часто застосовуються в промислових і транспортних спорудах. Розглянемо розв’язання задачі про визначення динамічних характеристик системи з трьох поздовжніх балок, опертих на кінцях на жорсткі опори, і однієї поперечної балки, яка об’єднує поздовжні балки в просторову систему (рис. 1). Вважаємо, що нейтральні осі балок лежать в одній горизонтальній площині $Z_1 O Z_2$.

Розв’язання задачі виконаємо методом підконструкцій. Розглянемо розрахункову модель складену з чотирьох фрагментів – балок із забезпеченням умов нерозривності переміщень в областях сполучення поперечної балки з поздовжніми. В межах кожної балки будуємо регулярну сітку скінченних елементів таким чином, щоб вузли сіток СЕ балок, що сполучаються, співпадали.

Регулярною вважається сітка скінченних елементів якщо є прості засоби обчислення номерів вузлів сітки та їх координати. Вузли СЕ моделі

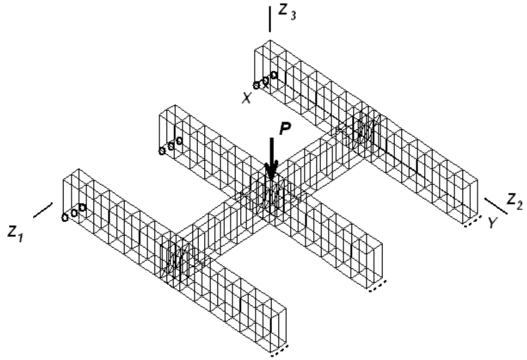


Рис. 1. Загальній вигляд балкової конструкції

фрагмента нумеруються в лагранжевій (локальній) системі координат $x_1 x_2 x_3$, пов'язаній з фрагментом. Така система не змінюється в процесі руху фрагмента. Кожному вузлу сітки відповідає трійка значень $Z_1 Z_2 Z_3$ глобальної декартової системи координат, введеної для всієї конструкції, яка визначає положення вузла СЕ моделі фрагмента у просторі.

Рівняння руху дискретної моделі кожного фрагмента формується у відповідності з варіаційним принципом можливих переміщень і має вигляд:

$$\{\delta u\}^T ([k]\{u\} + [M]\{\ddot{u}\}) - \{Q\{(t)\}) = 0 , \qquad (1)$$

де $\{u\},\{\ddot{u}\}$ – вектори переміщень і прискорень вузлів; $[K],[M]$ – матриці жорсткості і мас; $\{Q(t)\}$ – вектор зведених до вузлів навантажень дискретної моделі фрагмента. Розміри матриць відповідають числу ступенів вільності дискретної скінченноелементної моделі фрагмента, тобто числу переміщень вузлів у базисній декартовій системі координат.

Співвідношення МСЕ побудовані в переміщеннях з використанням положень тривимірної теорії пружності і моментної схеми скінченних елементів [1], що дає змогу автоматично враховувати деформації зсуву і переміщення СЕ як жорсткого цілого. Для моделювання інерційних властивостей конструкції використовується узгоджена матриця мас СЕ, співвідношення для якої будуються за умов розподіленої маси в межах СЕ. Значення мас, зведених до вузлів СЕ, обчислюються з використанням функцій форми, тобто, за такою ж схемою, як і обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості. Узгоджена матриця мас СЕ повністю заповнена і моделює інерційні характеристики, що відповідають поступальним переміщенням і кутам повороту, а тому вона більш повно описує інерційні властивості системи.

Використання методу підконструкцій передбачає побудову редукованих моделей фрагментів, рівняння руху яких записується для переміщень деякої сукупності вузлів дискретної моделі фрагмента, так званих базисних вузлів. До числа цих вузлів необхідно обов'язково включати співпадаючі сіткові вузли на границях суміжних фрагментів.

Переміщення базисних вузлів вважаються новими узагальненими координатами. Їх число значно менше ніж число ступенів вільності вихідної дискретної моделі.

У базисних вузлах, що розташовані на границях суміжних фрагментів (стикувальних вузлах) необхідно враховувати всі ступені вільності для забезпечення умов нерозривності переміщень на границі.

Призначаючи нові узагальнені координати для внутрішньої області, рекомендується зберігати тільки ті переміщення базисних вузлів, що орієнтовані у напрямку меншої жорсткості конструкції. Наприклад, для балки – за нормаллю до осі балки, тобто ті, що відповідають згину. Призначення таких базисних вузлів виконується за умови, щоб вони рівномірно (не скупчено) розміщувалися в сітковій області.

Зв'язок між узагальненими координатами вихідної та редукованої моделі визначається за формулою

$$\{u\} = [U]\{q\}, \tag{2}$$

де $\{q\}$ – вектор нових узагальнених координат – переміщень базисних вузлів.

Для забезпечення незалежності нових узагальнених координат, у напрямку переміщень базисних вузлів необхідно поставити абсолютно жорсткі в'язі. Перетворена таким чином вихідна модель МСЕ фрагмента аналогічна основній системі методу переміщень будівельної механіки. Елементи матриці перетворень $[U]$ в (2) визначаються шляхом розрахунку основної системи на змушені одиничні зміщення накладених в'язей. Таким чином, кількість стовпців в $[U]$ відповідає числу нових узагальнених координат редукованої моделі фрагмента, а кількість рядків – числу ступенів вільності вихідної дискретної моделі фрагмента. Це дає змогу стверджувати, що перехід до редукованої моделі виконується без погіршення просторової апроксимації переміщень вихідної дискретної моделі.

Рівняння руху такої моделі отримуємо шляхом підстановки (2) в (1). Воно набуває вигляду

$$[A]\{q\} + [B]\{\ddot{q}\} - \{f(t)\} = 0, \tag{3}$$

де $[A]=[U]^T[K][U]$, $[B]=[U]^T[M][U]$, $\{f(t)\}=[U]^T\{Q(t)\}$, відповідно, матриці жорсткості, мас та вектори узагальнених сил редукованої моделі фрагмента.

Призначається послідовність побудови редукованих моделей фрагментів та виконується наскрізна нумерація узагальнених координат їх редукованих моделей в межах усієї конструкції. Введено поняття "глобальний номер узагальненої координати редукованої моделі", що суттєво спрощує процедуру побудови редукованих матриць жорсткості і мас, які характеризують всю конструкцію. Матриці будуються шляхом підсумовування коефіцієнтів відповідних редукованих матриць фрагментів, що мають однакові глобальні номери узагальнених координат. Зшивка матриць виконується по глобальним номерам узагальнених координат стикувальних вузлів на границях фрагментів. А тому сумісність всієї дискретної моделі конструкції забезпечується тільки в граничних точках. Базисні вузли внутрішньої сіткової області також фігурують в загальній матриці, але характеризують тільки той фрагмент, до якого віднесені.

Процедура побудови матриць всієї моделі досить трудомістка, оскільки вимагає ретельного призначення базисних вузлів редукованих моделей фрагментів, визначення глобальних номерів узагальнених координат (переміщень базисних вузлів) із забезпеченням їх відповідності на границях суміжних фрагментів.

Всяка розрахункова модель є тільки більш або менш вдалою ідеалізацією реальної структури, в якій намагаються зберегти найсуттєвіші властивості конструкції.

Створена на її основі математична модель вимагає перевірки відповідності моделей різного рівня, а також перевіркою адекватності моделі і реальної структури, що виконується шляхом порівняння значень енергії деформацій моделі вихідного і редукованого рівнів.

Вихідними умовами для побудови рівнянь, що визначають редуковані матриці жорсткості і мас, є умова рівності потенціальної енергії деформації редукованого і вихідного фрагмента.

Інший шлях перевірки надійності розрахункової моделі, яка використувується для розв’язання задачі є альтернативний варіант розрахункової моделі. Для задачі про балочну клітку використана модель, що є менш трудомісткою щодо підготовки вхідної інформації для побудови її редукованої моделі. Суть цієї моделі полягає в тому, що на першому кроці використовується пластина, для якої формується сітка МСЕ так, щоб балки вписувались в лінії сітки. Далі вводяться порожнини сіткової області, де відсутній матеріал пластини (рис. 2).

Для перевірки достовірності результатів, що будуть отримані за допомогою запропонованих моделей, розв'язана задача статики від дії зосередженої сили P .

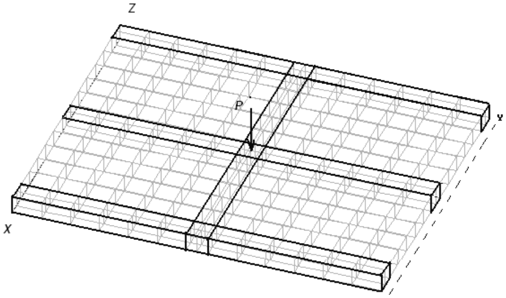
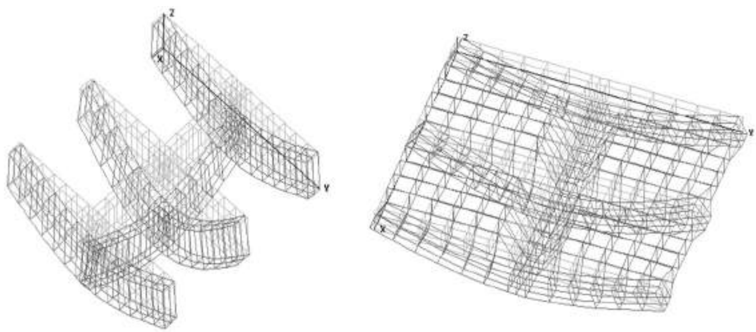


Рис. 2. Скінченноелементна модель пластини

Аналіз результатів розв'язку задачі з використанням наведених моделей показав, що в обох випадках розв'язки практично співпадають щодо значення прогину балочної клітки в точці, де прикладена зосереджена сила, так і за виглядом деформованої конструкції (рис. 3, табл. 1, табл. 2).



а *б*

Рис. 3. Деформовані конструкції: *а* – балочна клітка; *б* – пластина

Таблиця 1

Переміщення в пластині від зосередженої сили у вузлі № 221

№ вуз.	z 1	z 2	z 3
219	0.000000D+00	0.000000D+00	-0.984950D+00
221	0.000000D+00	0.000000D+00	-0.988118D+00
223	0.000000D+00	0.000000D+00	-0.984950D+00

Таблиця 2

Переміщення в балковій клітині від зосередженої сили у вузлі № 45

№ вуз.	z 1	z 2	z 3
43	0.000000D+00	0.000000D+00	-0.100918D+01
45	0.000000D+00	0.000000D+00	-0.101136D+01
47	0.000000D+00	0.000000D+00	-0.100918D+01

Задача про власні коливання цієї ж конструкції розв'язана також з використання обох моделей.

Форми власних коливань стосовно першої і другої частоти зображені на рис. 4 і рис. 5.

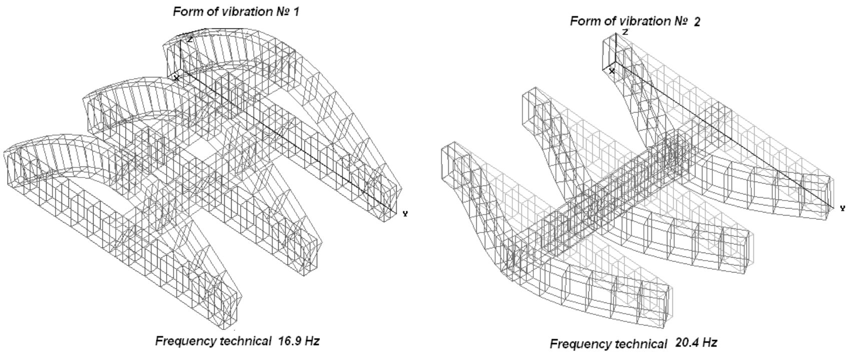


Рис. 4. Форми коливань балкової конструкції

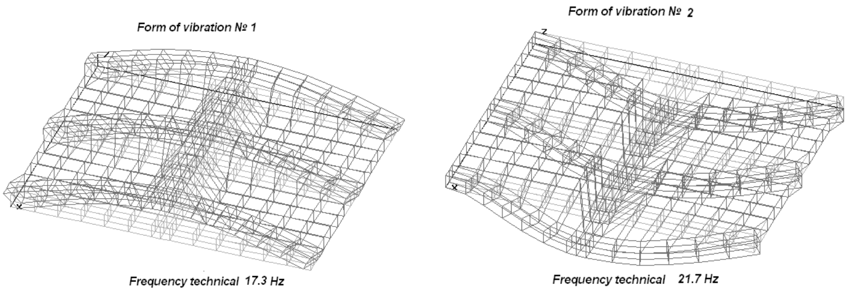


Рис. 5. Форми коливань пластини

За викладеною методикою розв'язана задача про власні коливання ділянки монолітно-каркасної будівлі (рис. 6).

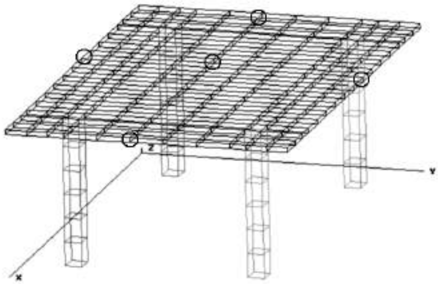


Рис. 6. Фрагмент монолітно-каркасної будівлі

Модель складається з п’яти фрагментів: чотирьох колон і плити перекриття. Стиковка колон з плитою моделюється як жорстке з’єднання. Для кожного стику колони з плитою введено сім узагальнених координат, у якості яких призначені п’ять поступальних і два кутових переміщення, що забезпечують нерозривність переміщень в зоні контакту.

Додатково до зазначених вузлів в межах плити призначені ще п’ять базисних вузлів (рис. 6). У кожному з них враховується одна ступінь вільності – переміщення по нормалі до поверхні пластини, тобто в напрямку її мінімальної жорсткості. Включення до числа базисних вузлів, ще й тих, що належать внутрішній області, дає можливість більш повно описувати інерційні властивості фрагмента, що важливо при розв’язанні задач динаміки. Форми коливань і значення відповідних їм власних частот показані на рис. 7.

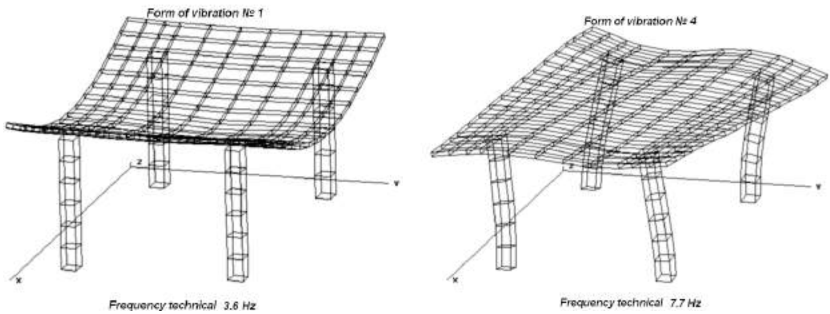


Рис. 7. Форми коливань фрагмента монолітно-каркасної будівлі

Розглянута також більш складна ділянка монолітно-каркасної будівлі, що утворена з трьох елементарних ділянок (рис. 8). Стиковка елементарних ділянок виконується тільки на рівні перерізів колон. Для кожної елементарної ділянки будується редукована модель другого рівня редукції, для якої узагальненими координатами є переміщення оголовка колони. Таким чином, до узагальнених координат елементарного фрагмента будівлі, які забезпечують стик колон і пластини перекриття, додалися ступені вільності моделі на рівні перерізів колон. Для кожного такого фрагмента побудовані редуковані матриці жорсткості і мас, та призначені глобальні номери узагальнених координат. Частина узагальнених координат з повного набору забезпечує стиковку колон з плитою перекриття фрагмента будівлі. Узагальнені координати, які віднесені до обмежуючих перерізів колон, забезпечують стиковку фрагментів.

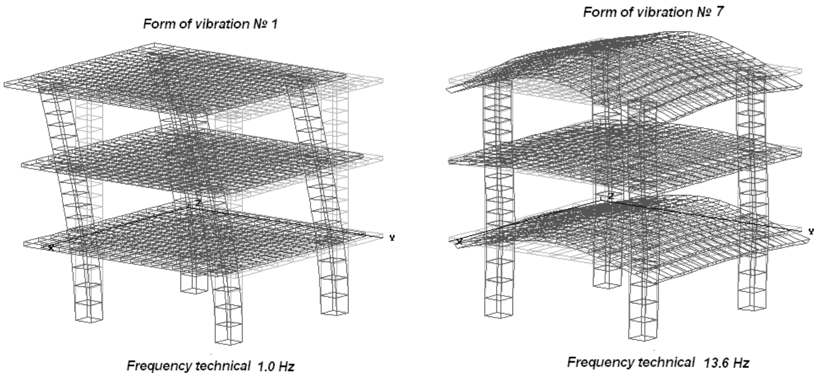


Рис. 8. Форми коливань багатофрагментної ділянки будівлі

Так можна побудувати редуковану розрахункову модель цілої будівля шляхом складання матриць жорсткості і мас моделі з редукованих матриць окремих фрагментів. Зшивка повної матриці виконується по узагальненим координатам, які пов’язані з переміщеннями перерізів колон.

Розглянута задача, яка стосується визначення коливань робочого колеса компресора (рис. 9). Побудова розрахункової моделі колеса виконується з урахуванням умов його циклічної симетрії. Робоче колесо утворено із системи чарунок, які циклічно повторюються (рис.10). Елементами чарунки є континуальні тонкостінні об’єкти (фрагменти), розрахункові дискретні моделі яких будуються на основі МСЕ. Розрахункова модель колеса створюється на основі багаторівневих редукованих моделей складових фрагментів. На першому етапі виконується побудова редукованої моделі чарунки колеса, яка циклічно повторюється.

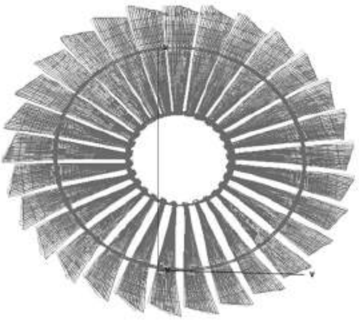


Рис. 9. Загальний вигляд ротора

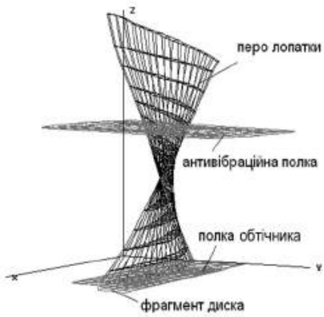


Рис. 10. Циклічна чарунка колеса

Чарунка являє собою багатофрагментне утворення, редукована модель якої будується за вже викладеною схемою. Тобто в межах кожного фрагмента чарунки будується регулярна сітка скінченних елементів так, щоб на границях фрагментів вузли сіток співпадали, і використовується метод базисних вузлів для багатофрагментної моделі. Всі перетворення, що пов’язані з побудовою редукованої моделі чарунки виконуються в єдиній для всіх фрагментів системи декартових координат.

В той же час, такий підхід ускладнює опис граничних умов для фрагментів, довільно орієнтованих у просторі.

Побудова редукованої моделі цілого колеса виконується шляхом переходу до полярної системи координат, пов’язаною з віссю колеса. Перехід до полярної системи координат передбачає перетворення редукованих матриць чарунки до переміщень у полярній системі координат, у відповідності з формулою, що встановлює зв'язок переміщень вузлів дискретної моделі в декартовій і полярній системах координат

$$q_i = C_i^k \nu_k , \tag{4}$$

де q_i - переміщення вузлів в декартовій системі, ν_k - переміщення в полярній системі.

Матриця перетворення C_i^k – має вигляд:

$$C_i^k = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\rho\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ \rho\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Переміщення базисних вузлів, що розглядаються як узагальнені координати всієї конструкції, повинні задаватися в напрямку осей полярної системи. Оскільки співвідношення МСЕ побудовані в глобальній декартовій системі координат, ці переміщення також слід віднести до декартової системи координат. Тобто редуковані матриці, що побудовані для переміщень базисних вузлів в декартовій системі координат, перетворюються остаточно до матриць, які відповідають переміщенням базисних вузлів у полярній системі, з використанням формули перетворень (4).

У відповідності до формули для обчислення варіації енергії пружної деформації елементарної чарунки

$$\delta W = K^{ij}_{m(n)} q^{(n)}_j \tag{6}$$

коефіцієнти матриці жорсткості для переміщень в полярній системі координат елементарної чарунки (циклічно повторюваного елемента колеса) обчислюється за формулою:

$$K^{kl}_{mn} = K^{i'j'}_{(mn)} \cdot C^{(m)n}_{i'} C^{(n)l}_{j'} \tag{7}$$

і є не змінюваним для кожної чарунки, що суттєво спрощує побудову редукованої матриці жорсткості усього колеса. Аналогічні перетворення виконуються для побудови редукованої матриці мас.

На рис. 11 показані форми власних коливань робочого колеса компресора.

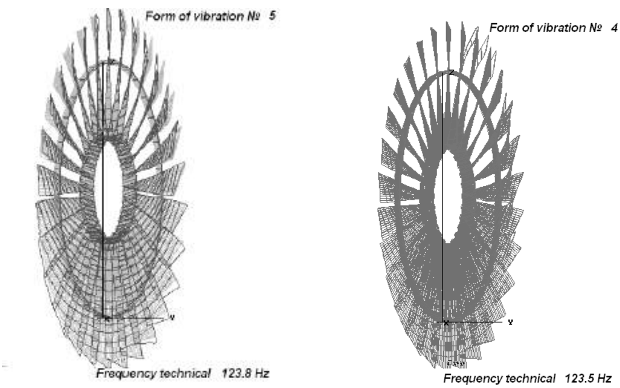


Рис. 11. Форми коливань ротора компресора

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Метод конечных элементов в механике твердых тел/ под общ. редакцией А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. –К. : Вища школа. Головное изд-во. 1982. –480 с.
2. *Сахаров А.С.* Моментная схема конечных элементов (МСКЭ) с учетом жестких смещений. – Сопротивление материалов и теория сооружений. – Киев: Будівельник, 1974, вып. 24. - С. 147–156.

Стаття надійшла до редакції 01.07.2011 р.

Легостаев А.Д., Гречух Н.А., Яковенко О.О.

ПОСТРОЕНИЕ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ МКЭ РАЗНООБОРАЗНЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ИХ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК И НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ОТ ДЕЙСТВИЯ СТАТИЧЕСКИХ І ДИНАМИЧЕСКИХ НАГРУЗОК

Приведены результаты решения задач на собственные колебания комбинированных конструкций, полученные методом конечных элементов. Изложена суть алгоритма решения задач динамики, построенного на основе метода подконструкций и редуцированных моделей фрагментов. Используется универсальный трехмерный конечный элемент, соотношения для которого получены в перемещениях. Редуцированная дискретная модель фрагмента строится путем перехода к новым обобщенным координатам – перемещениям базисных узлов, назначенных из полного набора узлов конечноэлементной модели фрагмента.

Legostaev A.D.,Grechukh N.A., Iakovenko O.O.

CONSTRUCTION OF DESIGN MODELS MFE OF DIFFERENT STRUCTURES AT DEFINITION OF THEIR DYNAMIC CHARACTERISTICS AND STRESS STATE DUE TO STATIC AND DYNAMIC LOADING

There are given results of solution of tasks of own vibration of the combined constructions got by finite elements method. The expounded essence of algorithm of dynamic tasks is built on the basis of method of substructures and reduced models of fragments. An universal three-dimensional finite element is used, correlations for which are built in motion. The reduced discrete model of fragment is built by passing to the new generalized coordinates – motion of base knots, appointed from complete set of knots of finite element model of fragment.