УДК 539.3

В.К. Чибіряков, д-р техн. наук
І.В. Жупаненко

ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСНИХ КОЛИВАНЬ ТОВСТИХ ПЛАСТИН НА ОСНОВІ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЇ РОЗРАХУНКОВОЇ МОДЕЛІ

Для визначення частот власних коливань нетонких пластин реалізовано алгоритм розрахунку дискретно-континуальної розрахункової моделі, що враховує інерційні властивості об’єкта дискретно, а жорсткісні – континуально.

Розглядаються однорідні ізотропні лінійно-пружні просторові тіла вісесиметричної структури, об’єднані за термінологією узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень [1] в клас *товстих пластин несиметричної будови*.

Для динамічного аналізу таких елементів існує два підходи. Перший з них передбачає врахування континуальних властивостей мас і пружних характеристик системи, внаслідок чого рівняння руху розрахункової моделі записуються у вигляді диференціальних рівнянь в частинних похідних. З огляду на складність розв’язання таких рівнянь, континуальна розрахункова модель використовується переважно при дослідженні хвильових процесів в тілах, а в задачах про динамічну реакцію системи застосовується той чи інший спосіб дискретизації. Зокрема, найпростіший прийом дискретизації полягає в зосередженні мас в окремих точках континуальної безінерційної системи. Рівняння руху континуальної системи із зосередженими масами (дискретно-континуальної моделі) складаються на основі принципу Д’Аламбера і утворюють систему звичайних диференціальних рівнянь за часом, яка при застосуванні методу сил в матричній формі в загальному вигляді записується в такому вигляді:

$$\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{T} \cdot \frac{d^2\mathbf{Y}}{dt^2} + \mathbf{Y} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{P}, \tag{1}$$

де $\mathbf{Y} = \{y_i\}$ $(i = \overline{1,n})$ - матриця-стовпчик ступенів вільності зосереджених мас, n – кількість динамічних ступенів вільності, $\mathbf{T}$ – матриця мас, $\mathbf{\Pi} = \left[\delta_{ij}\right]$ $(i, j = \overline{1,n})$ - матриця впливу сил інерції (матриця піддатливості), $\mathbf{P} = \left\{ P_k(t) \right\}$ $(k = \overline{1, m})$ - матриця-стовпчик зосереджених зовнішніх сил, $\mathbf{B} = \left[\delta'_{kl} \right]$ $(k, l = \overline{1, m})$ - матриця впливу зосереджених зовнішніх сил.

В статті [2] досліджено особливості побудови матриці мас та матриці піддатливості для тонкої кільцевої пластини. Дана робота присвячена узагальненню отриманих результатів на клас нетонких пластин обертання, а також, як частинний випадок, прямокутних пластин (балки-стінки).

Розглядається задача про власні коливання пластин, що описується однорідною системою (1):

$$\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{T} \cdot \frac{d^2 \mathbf{Y}}{dt^2} + \mathbf{Y} = 0 , \tag{2}$$

розв'язок якої шукатимемо у вигляді $\mathbf{Y}(t) = \mathbf{Y}_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi)$. В результаті підстановки виразу $\mathbf{Y}(t)$ у рівняння (2) та нескладних перетворень, отримаємо:

$$-\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} \cdot \omega^2 \cdot \mathbf{Y}_0 + \mathbf{Y}_0 = 0 ,$$

або

$$\mathbf{\Pi} \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Y}_0 = \lambda \cdot \mathbf{Y}_0 , \tag{3}$$

де $\lambda = \dfrac{1}{\omega^2}$.

Елементи матриці впливу $\mathbf{\Pi}$ визначаються як реакції континуальної системи на зосереджені статичні впливи, що відповідають динамічним ступеням вільності системи. По суті, кожен одиничний стан визначається як розв'язок статичної неоднорідної крайової задачі

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dr} = \left[A(r) \right] \mathbf{Y} + \mathbf{F}, \quad 0 \le r \le L \tag{4}$$

з однорідними граничними умовами

$$\left[C_0 \right] \cdot \mathbf{Y}(0) = \mathbf{0}, \quad \left[C_L \right] \cdot \mathbf{Y}(L) = \mathbf{0}. \tag{5}$$

Особливістю побудови дискретно-континуальної моделі нетонких вісесиметричних пластин (порівняно з тонкими) є дискретизація мас по двох просторових координатах r і z. Компоненти вектора $\mathbf{F}$ в системі (4) визначаються одиничним зосередженим по координатах r і z силовим впливом, що відповідає конкретному одиничному стану. Відповідно до цього, компоненти вектора $\mathbf{F}$ задається за допомогою дельта-функції Дірака в такому вигляді:

$$F(r,z) = F \cdot \delta(r - r_k) \cdot \delta(z - z_m), \quad k = \overline{1, n_r};\ m = \overline{1, n_z} ,$$

де n_r, n_z – кількість точок зосередження мас по координаті r та z відповідно.

Розв'язувальна одновимірна система диференціальних рівнянь (4) отримана шляхом редукції вихідних співвідношень лінійної теорії пружності узагальненим методом скінченних інтегральних перетворень по поперечній координаті (циліндрична координата z) та методом Фур'є по коловій координаті θ. Процедура зниження вимірності та матриці $\left[A(r)\right]$, $\left[C_0\right]$, $\left[C_L\right]$ для вісесиметричного випадку докладно описані в [3]. В редукованій системі рівнянь (4) навантаження, що визначає конкретний одиничний стан, задається вектором $\mathbf{F}^i = \left\{ f_r^i, f_z^i \right\}$, компоненти якого нульові окрім тих, що відповідають напряму розглядуваної сили інерції. Ненульові компоненти вектора $\mathbf{F}$ після редукції узагальненим методом скінченних інтегральних перетворень мають вигляд:

$$f^i(r) = \frac{1}{r_k^*} \cdot \delta\left(r - r_k^*\right) \cdot P_i^н(\xi_m), \ \ k = \overline{1, n_r};\ m = \overline{1, n_z} ,$$

де r_k^* – радіус зосередження k –ї маси, визначений в [3], $P_i^н(\xi_m)$ – нормовані поліноми Лежандра [1].

Крайова задача (4), (5) розв'язується чисельно методом дискретної ортогоналізації. Розв'язок неоднорідної задачі в будь-якій точці ортогоналізації r_s шукається у вигляді суми загальних розв'язків однорідної задачі $\mathbf{Z}_j$ і часткового розв'язку неоднорідної задачі $\mathbf{Z}_0$:

$$\mathbf{Y}(x_s^1) = \sum_{j=1}^{n/2} B_j^s \cdot \mathbf{Z}_j(r_s) + \mathbf{Z}_0(r_s) , \tag{6}$$

де B_j^s – вектор сталих інтегрування, елементи якого в останній точці інтервалу визначаються з граничних умов на правому кінці:

$$B_j^L = -\left[C_L \cdot Z(L)\right]^{-1} \times \left[C_L \cdot \mathbf{Z}_0(L)\right],$$

а в решті точок – в процесі виконання зворотного ходу прогонки.

Оскільки граничні умови однорідні і при визначенні вектора $\mathbf{Z}_0$ компоненти початкового вектора теж приймаються рівними нулю, то сам розв'язок $\mathbf{Z}_0$ від початкової до точки прикладення навантаження тотожно рівний нулю. При переході через точку прикладення зосередженого навантаження всі компоненти вектора $\mathbf{Z}_0$ неперервні, за виключенням узагальненої сили σ_{rr}^{i} чи σ_{rz}^{i}, яка змінюється стрибком. Оскільки в інших точках навантаження відсутнє, частковий розв'язок $\mathbf{Z}_0$ неоднорідної задачі визначається при розв'язанні однорідної системи

$$\frac{d\mathbf{Y}_0}{dr} = \left[A(r)\right]\mathbf{Y}_0, \; r_k \le r \le L \tag{7}$$

з неоднорідними початковими умовами в точці прикладення зосередженої сили

$$\mathbf{Y}_0(r_k) = \mathbf{F} \; . \tag{8}$$

Загалом алгоритм побудови дискретно-континуальної розрахункової моделі наступний.

На першому кроці розрахунку здійснюється дискретизація інерційних властивостей об'єкта шляхом розбиття на окремі ділянки і зосередження мас цих ділянок в певних точках континуальної безінерційної системи. На основі здійсненої дискретизації формуються матриця радіусів мас $\mathbf{R}$ та матриця мас $\mathbf{T}$. Інтервал інтегрування розбивається на ділянки точками зосередження мас, які є точками ортогоналізації. Для забезпечення стійкості розрахунку в межах кожної такої ділянки можуть призначатися додаткові точки ортогоналізації.

Далі будуються одиничні стани для визначення матриці піддатливості $\mathbf{\Pi}$. Кожна зосереджена маса може мати два ступені вільності, з-поміж яких обираються ті, що будуть враховані в даному конкретному випадку. Таким чином призначаються способи прикладення одиничного зосередженого навантаження – одиничні стани. Далі розрахунок кожного одиничного стану складається з чотирьох основних етапів.

На першому етапі виконується прямий хід методу ортогональної прогонки для однорідної крайової задачі (4), (5) і визначається матриця фундаментальних розв'язків $\mathbf{Z}$.

На другому етапі послідовно для кожного ступеня вільності системи будується частковий розв'язок $\mathbf{Z}_0$ неоднорідної системи (7) – (8) від точки прикладення відповідного зосередженого навантаження до правого кінця відрізку інтегрування. При цьому вектор $\mathbf{Z}_0$ ортогоналізується до знайдених векторів фундаментальної системи розв'язків $\mathbf{Z}_j$. Для кожного одиничного стану з граничних умов на правому кінці визначаються невідомі сталі інтегрування.

Третім етапом розрахунку одиничних станів є зворотний хід ортогональної прогонки для визначення сталих інтегрування в точках ортогоналізації і побудови загального розв’язку задачі відповідно до співвідношення (6).

Оскільки ступенями вільності системи є компоненти вектора переміщень $U\{u_z, u_r\}$, то на останньому етапі розрахунку виконується зворотний перехід узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень від отриманого розв’язку в зображеннях (відносно моментів невідомих) до оригіналу (шуканих переміщень). З останніх вибираються компоненти δ_{jk} матриці піддатливості $\mathbf{\Pi}$ як переміщення по напрямку *j*-ї ступені вільності від зосередженої сили по напрямку *k*-ї ступені вільності.

Варто зазначити, що визначення елементів матриці впливу на основі редукованих узагальненим методом скінченних інтегральних перетворень рівнянь теорії товстих пластин має порівняно з іншими теоріями певні переваги. Зокрема, дискретизація по товщині пластини дозволяє розраховувати з єдиних позицій пластини та оболонки при будь-якому значенні відносної товщини, в тому числі й товсті, а також досліджувати планарні режими коливань.

Алгоритм визначення частот і форм власних коливань дискретно-континуальної моделі описано в [2].

Для якісної і кількісної оцінки достовірності запропонованого алгоритму розв’язано тестові задачі, розв’язки яких порівняно з результатами, отриманими при реалізації покрокового методу [3], а також з відомими в літературі.

Для тестування алгоритму у випадку вісесиметричних об’єктів розглянуто задачу про власні коливання защемленої по зовнішньому контуру кільцевої пластини товщиною $H = 0,5\ м$, зовнішній і внутрішній радіуси якої $R = 1\ м$ і $R = 0,5\ м$ відповідно. В табл. 1 наведено значення перших чотирьох частот $\Omega^2 = \omega^2 \dfrac{\rho \cdot l^2}{E}$ вісесиметричних власних коливань, отриманих при значенні коефіцієнта Пуассона $\nu = 0,3$. В першій колонці таблиці наведено результати, отримані в роботі [4] на основі дискретизації вихідної моделі просторової лінійної теорії пружності за допомогою напіваналітичного методу скінченних елементів. В останній колонці визначено похибку розв’язків на основі дискретно-континуальної моделі по відношенню до розрахунку покроковим методом.

За наведеними в табл. 1 результатами можна сказати, що у випадку вісесиметричних товстих пластин (при умові дискретизації в радіальному і в поперечному напрямку) запропонований варіант дискретизації інерційних властивостей забезпечує достатню точність динамічного розрахунку.

Таблиця 1

Частоти власних коливань кільцевої пластини

Чисельний розв'язок динамічної задачі теорії пружності [4]	Покроковий метод	Дискретно-континуальна модель при кількості мас		Δ, %
		10×2	10×5	
0,2577	0,2588	0,2591	0,2580	0,3
0,5487	0,6169	0,6092	0,6127	0,7
0,7656	0,6423	0,6478	0,6428	0,1
0,9958	0,9861	0,9882	0,9887	0,3

Враховуючи, що рівняння (4) при умові $R_0 \to \infty$ описують плоский напружений стан прямокутних пластин (балки-стінки), в якості другого прикладу розглянуто задачу про власні коливання балки-стінки довжиною $l = 1\,м$ і висотою $h = 0,4\,м$ з граничними умовами, що відповідають типу шарнірного обпирання в класичній теорії. В табл. 2 наведені значення власних частот $\Omega^2 = \omega^2 \dfrac{\rho \cdot l^2}{E}$ для різних значень параметра відносної довжини півхвилі $\mu = \dfrac{l}{n \cdot h}$ (n – число півхвиль деформації) при значенні коефіцієнта Пуассона $\nu = 0,25$. В колонках 2 і 6 табл. 2 наведено значення, отримані в роботі [5] на основі «теорії третього порядку» (за термінологією автора), що базується на розкладі функцій переміщень в ряди по поліномах Лежандра по висоті пластини при чотирьохмодовій апроксимації. В колонках 3 і 7 та 4, 8 наведено значення, отримані при реалізації покрокового методу та при розрахунку дискретно-континуальної моделі відповідно, а в колонках 5 і 9 визначено похибку розрахункових значень для дискретно-континуальної моделі.

Дискретно-континуальна розрахункова модель побудована при 80 точках зосередження мас (4 по висоті і 20 по довжині). Як видно з таблиці, розрахунок дискретно-континуальної моделі забезпечує добру збіжність для нижчих частот, яка з ростом номера частоти погіршується, проте для найвищої з наведених частот не перевищує 8 %. Варто зазначити, що в табл. 2 наведено частоти лише для відповідних значень параметру μ, в той час як загалом згадана частота є вісімнадцятою власною частотою пластини, що розглядається.

Таблиця 2

Частоти власних коливань балки-стінки

μ	Поздовжні коливання			Δ, %	Поперечні коливання			Δ, %
1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	9,774	9,772	9,728	0,5	0,879	0,879	0,881	0,2
	62,919	63,027	58,514	7,2	36,475	36,409	35,336	2,1
2,5	36,501	36,506	35,689	2,2	7,753	7,573	7,587	0,2
	64,246	64,240	60,864	5,3	67,164	67,158	62,933	6,3
1,667	57,595	57,593	55,772	3,2	22,394	22,392	22,173	1,0
	99,686	99,640	92,937	6,7	113,386	113,422	104,701	7,7

На прикладі розв'язаних тестових задач підтверджено достовірність запропонованої методики побудови дискретно-континуальної розрахункової моделі. Зокрема, похибка власних частот дискретно-континуальної моделі товстих пластин порівняно з розрахунковими значеннями для континуальної моделі (покроковий метод) складає до 8 %, що дозволяє говорити про достовірність прийнятого способу дискретизації інерційних властивостей об'єкта та алгоритму побудови матриці впливу сил інерції.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Чибіряков В.К.* Теорія товстих пластин та оболонок: монографія / В. К. Чибіряков, А. М. Смоляр. – Черкаси: ЧДТУ, 2002. – 160 с.
2. *Чибіряков В.К.* Про один алгоритм розрахунку вісесиметричних коливань круглої пластини / В.К. Чибіряков, І.В. Жупаненко // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. – Вип. 81. – К. : КНУБА, 2007. – С. 43 – 50.
3. *Жупаненко І.В.* Власні коливання товстої кільцевої пластини / І. В. Жупаненко // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. – Вип. 83. – К.: КНУБА, 2009. – С. 165 – 172.
4. *Григоренко А.Я.* Решение пространственной динамической задачи теории упругости для анизотропных тел / А. Я. Григоренко, И. И. Дыяк, В. М. Макар // Прикладная механика. – 1998. – Т. 34, № 5. – С. 24 – 31.

5. *Амосов А.А.* Применение метода ортогональной прогонки к расчету толстостенных оболочек вращения / А. А. Амосов, С. С. Ирискулов // Вопросы вычисл. и прикл. математики. – 1985. – Вып. 78. – С. 77 – 87.

Стаття надійшла до редакції 17.10.2011 р.

Чибиряков В.К., Жупаненко И.В.

ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ТОЛСТЫХ ПЛАСТИН НА ОСНОВЕ ДИСКРЕТНО-КОНТИНУАЛЬНОЙ РАСЧЕТНОЙ МОДЕЛИ

Для определения частот собственных колебаний нетонких пластин реализован алгоритм расчета дискретно-континуальной расчетной модели, учитывающей инерционные свойства объекта дискретно, а жесткостные – континуально.

Chybiryakov V.K., Zhupanenko I.V.

ANALYSIS OF FREE VIBRATIONS OF THICK PLATES BASED ON DISCRETE-CONTINUUM COMPUTATION MODEL

The procedure of determination of natural frequencies of thick plates is based on the calculation of discrete-continuum computation model. The discrete-continuum model is examined as continuum description of severity properties as well as discontinuous description of inertial characteristics.