

УДК 539.3

Ю.В. Ворона, канд. техн. наук  
 М.В. Гончаренко, канд. техн. наук  
 А.А. Козак  
 О.С. Черненко

## КОЛИВАННЯ ДВОВИМІРНИХ МАСИВНИХ ТІЛ, ПОСЛАБЛЕНИХ ТРІЩИНАМИ НОРМАЛЬНОГО ВІДРИВУ

Досліджуються коливання пружних масивних елементів конструкцій, послаблених тріщинами. Отримане граничне інтегральне представлення для напружень, до складу якого входять сингулярний і гіперсингулярний інтегралі. За допомогою інтегрування частинами проведена регуляризація другого з інтегралів. Розв'язані тестові задачі про динамічне навантаження двовимірних масивів з плоскими тріщинами.

Будемо розглядати гармонічні коливання двовимірних об'єктів, послаблених тріщиною. Для розв'язання задачі застосовуватимемо співвідношення методу потенціалу, зокрема, формулу Соміліани для знаходження переміщень у внутрішніх точках розрахункової області  $V$ :

$$u_j(\vec{x}) = \int_{\Gamma} \tau_k(\vec{y}) U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u_k(\vec{y}) T_{jk}(\vec{x}, \vec{y}) d\Gamma_y, \quad (1)$$

де  $\vec{x}\{x_1, x_2\} \in V$ ;  $\vec{y}\{y_1, y_2\} \in \Gamma$ ;  $\Gamma$  - границя області;  $\tau_j$  - напруження на площинці границі з нормаллю  $\vec{n}\{n_1, n_2\}$ :

$$\tau_j(\vec{y}) = \sigma_{jk}(\vec{y}) n_k(\vec{y}) = \lambda n_j(\vec{y}) \frac{\partial u_m(\vec{y})}{\partial x_m} + \mu \left( \frac{\partial u_j(\vec{y})}{\partial y_k} + \frac{\partial u_k(\vec{y})}{\partial y_j} \right) n_k(\vec{y}); \quad (2)$$

$U_{jk}(\vec{x}, \vec{y})$  - фундаментальний розв'язок задачі, що задається виразом [1]:

$$U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}) = \frac{i}{4\mu} \left\{ \delta_{jk} \left[ H_0^{(1)}(\varphi_1) - \frac{H_1^{(1)}(\varphi_2)}{\varphi_2} + \alpha \frac{H_1^{(1)}(\varphi_1)}{\varphi_1} \right] + r_{,j} r_{,k} \left[ H_2^{(1)}(\varphi_2) - \alpha H_2^{(1)}(\varphi_1) \right] \right\}; \quad (3)$$

$\varphi_j = k_j r$ ;  $k_j = \frac{\omega}{C_j}$ ;  $C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}$ ;  $C_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}$ ;  $\alpha = \frac{C_2^2}{C_1^2}$ ;  $\rho$  - щільність матеріалу;  $\omega$  - кругова частота коливань;  $\lambda$  і  $\mu$  - константи Ламе;  
 $r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial y_j} = \frac{y_j - x_j}{r}$ ;  $r^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2$ ;  $T_{jk}(\vec{x}, \vec{y})$  - узагальнена похідна фундаментального розв'язку  $U_{jk}(\vec{x}, \vec{y})$ , тобто напруження на

площинках з компонентами нормалі  $n_j(\bar{y})$ , які виникають в пружному двовимірному просторі від дії вищезгаданої одиничної сили:

$$T_{kj}(\bar{x}, \bar{y}) = \lambda n_j(\bar{y}) \frac{\partial U_{km}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y_m} + \mu n_m(\bar{y}) \left[ \frac{\partial U_{km}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y_j} + \frac{\partial U_{kj}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial y_m} \right] =$$

$$= \frac{i}{4} \left[ r_{,k} n_j T_1 + \left( \delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j} n_k \right) T_2 + r_{,k} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} T_3 \right]; \quad (4)$$

$$T_1 = \frac{2}{r} \left[ H_2^{(1)}(\varphi_2) - \alpha H_2^{(1)}(\varphi_1) \right] - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\varphi_1}{r} H_1^{(1)}(\varphi_1);$$

$$T_2 = \frac{1}{r} \left[ 2H_2^{(1)}(\varphi_2) - \varphi_2 H_1^{(1)}(\varphi_2) - 2\alpha H_2^{(1)}(\varphi_1) \right];$$

$$T_3 = \frac{2}{r} \left[ \varphi_2 H_1^{(1)}(\varphi_2) - 4H_2^{(1)}(\varphi_2) - \alpha \varphi_1 H_1^{(1)}(\varphi_1) + 4\alpha H_2^{(1)}(\varphi_1) \right]; \quad (5)$$

$H_k^{(1)}$  - функція Ганкеля 1-го роду порядку  $k$ .

Для того, щоб отримати граничне інтегральне рівняння (ГІР) відносно незаданих граничними умовами амплітуд переміщень і напружень, зробимо наступне [2, 3]. За допомогою виключення з розрахункової області  $V$  малого кругового сектору радіусу  $\varepsilon$  з центром в полюсі  $\bar{x}_0$  утворимо допоміжну розрахункову підобласть  $V_0$  (рис. 1). Границею цієї підобласті буде поверхня  $\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s$ , причому  $\Gamma_s$  - це частина кола радіусу  $\varepsilon$ .

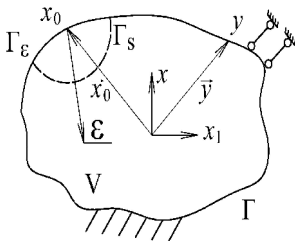


Рис. 1. Утворення допоміжної підобласті

По відношенню до області  $V_0$  точка

$\bar{x}_0$  є зовнішньою, тому формула Соміліани набуває вигляду

$$\int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} \tau_k(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} u_l(\bar{y}) T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = 0, \quad j=1,2. \quad (6)$$

Зауважимо, що яким би малим не був радіус сектору  $\varepsilon$ , полюс  $\bar{x}_0$  лежить поза межами  $V_0$ , і тому тотожність (6) лишається справедливою:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} \tau_k(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} u_k(\bar{y}) T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = 0. \quad (7)$$

Будемо розташовувати т.  $\bar{x}_0$  на гладкій частині контуру  $\Gamma$ . Тоді при  $\varepsilon \rightarrow 0$  границю сектору  $\Gamma_s$  можна вважати півколом. Далі, припустимо, що переміщення  $u(\bar{y})$  поблизу точки  $\bar{x}_0$  можна представити у вигляді:

$$u_j(\bar{y}) = u_j(\bar{x}_0) + \frac{\partial u_j(\bar{x}_0)}{\partial x_m} (y_m - x_{0m}) + O(r^{1+\alpha}). \quad (8)$$

В свою чергу

$$\sigma_{kj}(\bar{y}) = \sigma_{kj}(\bar{x}_0) + O(r^\alpha) \text{ та } \tau_k(\bar{y}) = \sigma_{kj}(\bar{y})n_j(\bar{y}) = \sigma_{kj}(\bar{x}_0)n_j(\bar{y}) + O(r^\alpha). \quad (9)$$

Розглянемо границю першого з інтегралів, що входять до (7):

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} \tau_k(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = \\ & = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \tau_k(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \int_{\Gamma_s} [\sigma_{km}(\bar{x}_0)n_m(\bar{y}) + O(r^\alpha)] U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = \\ & = \oint_{\Gamma} \tau_k(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \sigma_{km}(\bar{x}_0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} [n_m(\bar{y}) + O(r^\alpha)] U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad (10) \end{aligned}$$

де символ  $\oint_{\Gamma}$  відповідає значенню поверхневого інтеграла за Коші.

В місцевій полярній системі координат елемент контуру  $\Gamma_s$  може бути поданий у вигляді  $d\Gamma = r d\theta$ , а крім того при  $r \rightarrow 0$

$$U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) = \frac{1}{8\pi(1-\nu)\mu} [r_{,j} r_{,k} - (3-4\nu)\delta_{jk} \ln r] + C + O(r), \quad (11)$$

де  $C$  – деяка константа, а для точок на контурі  $\Gamma_s$  справедливо

$$r = \varepsilon; \quad r_{,j}(\bar{x}_0, \bar{y}) = -n_j(\bar{y}). \quad (12)$$

З урахуванням залежностей (9), (11), (12) можемо записати:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} \tau_k(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = 0 \quad (13)$$

і далі

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} \tau_k(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = \int_{\Gamma} \tau_k(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y. \quad (14)$$

Звернемось тепер до визначення границі другого з інтегралів, що входять до складу (7). Враховуючи (8), запишемо

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} u_k(\bar{y}) T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u_k(\bar{y}) T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \right. \\ \left. + u_k(\bar{x}_0) \int_{\Gamma_s} T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \frac{\partial u_k(\bar{x}_0)}{\partial x_m} \int_{\Gamma_s} (y_m - x_{0m}) T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\}. \quad (15)$$

Оскільки при  $r \rightarrow 0$

$$T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) = \frac{(1-2\nu)}{4\pi(1-\nu)r} \left[ (1-2\nu)(r_{,j} n_k - r_{,k} n_j) - \left( \frac{2r_{,j} r_{,k}}{1-2} + \delta_{jk} \right) \frac{\partial r}{\partial n} \right], \quad (16)$$

то, враховуючи (12), а також те, що

$$\int_{\Gamma_s} \frac{r_{,m} r_{,j}}{r} d\Gamma_y = \frac{\pi}{2} \delta_{mj}, \quad (17)$$

і крім того

$$\frac{\partial r(\bar{x}_0, y)}{\partial n} = -1, \quad y \in \Gamma_s, \quad (18)$$

отримаємо

$$\int_{\Gamma_s} (y_m - x_{0m}) T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = 0, \quad \int_{\Gamma_s} T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = 0.5\delta_{jk}, \quad (19)$$

внаслідок чого

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} u_k(\bar{y}) T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = 0.5u_j(\bar{x}_0) + \int_{\Gamma} u_k(\bar{y}) T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y. \quad (20)$$

Тепер, виходячи з (14) і (20), ГІР (7) набуває вигляду

$$0.5u_j(\bar{x}_0) + \int_{\Gamma} u_k(\bar{y}) T_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \int_{\Gamma} \tau_k(\bar{y}) U_{jk}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y. \quad (21)$$

де обидва інтеграли є невласними і розуміються за Коші.

Відомо, що ГІР (21) у випадку масивів, послаблених тріщинами, є виродженими [4]. Для таких об'єктів варто застосовувати ГІР на основі інтегрального подання напружень. Наведемо, спершу, формулу Соміліани для визначення напружень у внутрішніх точках розрахункової області:

$$\sigma_{jk}(\bar{x}) = \int_{\Gamma} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}, \bar{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad \bar{x} \in V, \quad \bar{y} \in \Gamma, \quad (22)$$

де

$$\begin{aligned}
D_{jkl}(\bar{x}, \bar{y}) &= \lambda \delta_{jk} \frac{\partial U_{ml}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x_m} + \mu \frac{\partial U_{jl}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial U_{kl}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x_j} = \\
&= -\frac{i}{4} \left[ r_{,l} \delta_{kj} T_1 + (\delta_{lk} r_{,j} + \delta_{lj} r_{,k}) T_2 + r_{,k} r_{,j} r_{,l} T_3 \right]; \quad j = 1, 2; \\
S_{jkl}(\bar{x}, \bar{y}) &= \lambda \delta_{jk} \frac{\partial T_{ml}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x_m} + \mu \frac{\partial T_{jl}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x_k} + \mu \frac{\partial T_{kl}(\bar{x}, \bar{y})}{\partial x_j} = \\
&= -\frac{i\mu}{4} \left[ (n_l r_{,k} r_{,j} + r_{,l} \frac{\partial r}{\partial n} \delta_{kj}) S_1 + [\frac{\partial r}{\partial n} (\delta_{jl} r_{,k} + \delta_{kl} r_{,j}) + \right. \\
&\left. + r_{,l} (n_{j,r,k} + n_{k,r,j}) \right] S_2 + r_{,k} r_{,j} r_{,l} \frac{\partial r}{\partial n} S_3 + (\delta_{jl} n_k + \delta_{kl} n_j) 2 \frac{T_2}{r} + n_l \delta_{jk} S_4 \Big]; \quad (23) \\
S_1 &= 2 \left[ \frac{T_3}{r} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\varphi_1^2}{r^2} H_2(\varphi_1) \right]; \quad S_2 = \frac{2T_3}{r} + \frac{\varphi_2^2}{r^2} H_2(\varphi_2); \\
S_3 &= 2 \left[ -\frac{6T_3}{r} - 2 \frac{\varphi_2^2}{r^2} H_2(\varphi_2) + 2\alpha \frac{\varphi_1^2}{r^2} H_2(\varphi_1) \right]; \\
S_4 &= \frac{4}{r^2} [H_2(\varphi_2) - \alpha H_2(\varphi_1)] - \frac{2\lambda}{\mu} \frac{\varphi_1 H_1(\varphi_1)}{r^2} + \frac{\lambda^2}{\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{\varphi_1^2 H_2(\varphi_1)}{r^2}.
\end{aligned}$$

Щоб отримати на основі (22) ГПР, знову звернемося до допоміжної розрахункової підобласті  $V_0$  (рис.1), по відношенню до якої точка  $\bar{x}_0$  є зовнішньою незалежно від величини радіусу  $\varepsilon$ . На підставі цього можемо записати:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} = 0. \quad (24)$$

Розглянемо границю першого з інтегралів, що входять до (24):

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \right. \\
&\left. + \int_{\Gamma_s} [\sigma_{lm}(\bar{x}_0) n_m(\bar{y}) + O(r^\alpha)] D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\} =
\end{aligned}$$

$$= \int_{\Gamma} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \sigma_{3m}(\bar{x}_0) \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} n_m(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y. \quad (25)$$

Зважимо на те, що при  $r \rightarrow 0$

$$D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) = \frac{1-2\nu}{4\pi r} \left[ \delta_{jl} r_{,k} + \delta_{kl} r_{,j} - \delta_{jk} r_{,l} + \frac{2}{1-2\nu} r_{,k} r_{,j} r_{,l} \right] + O(r), \quad (26)$$

і крім того,

$$\int_{\Gamma_s} r_{,m} r_{,j} r_{,k} r_{,l} d\Gamma_y = r \frac{\pi}{8} (\delta_{mj} \delta_{kl} + \delta_{mk} \delta_{jl} + \delta_{ml} \delta_{kj}). \quad (27)$$

З урахуванням наведених залежностей (14-16) можемо записати:

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} n_m(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \\ & = -\frac{1}{16(1-\nu)} [(3-4\nu)(\delta_{mk} \delta_{lj} + \delta_{mj} \delta_{lk}) - (1-4\nu) \delta_{jk} \delta_{lm}], \end{aligned} \quad (28)$$

і нарешті,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_s} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right] = \int_{\Gamma} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \beta_{kj}^D(\bar{x}_0), \quad (29)$$

де інтеграл в правій частині розуміється за Коші, а

$$\beta_{kj}^D(\bar{x}_0) = -\frac{1}{16(1-\nu)} [2(3-4\nu) \sigma_{jk}(\bar{x}_0) - (1-4\nu) \delta_{jk} \sigma_{ll}(\bar{x}_0)]. \quad (30)$$

Звернемось тепер до визначення границі другого з інтегралів, що входять до складу (24). Враховуючи (8), запишемо

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon+\Gamma_s} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{\Gamma-\Gamma_\varepsilon} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \right. \\ & \left. + u_l(\bar{x}_0) \int_{\Gamma_s} S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \frac{\partial u(\bar{x}_0)}{\partial x_m} \int_{\Gamma_s} (y_m - x_{0m}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Розглянемо третій доданок з правої частини рівності (31). Враховуючи (17), (27) та зважаючи на те, що при  $r \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & (y_m - x_{0m}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) = \\ & = \frac{\mu r_{,m}}{2\pi r(1-\nu)} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[ 2(1-2\nu) \delta_{jk} r_{,l} + 2\nu (\delta_{jl} r_{,k} + \delta_{lk} r_{,j}) - 8r_{,j} r_{,k} r_{,l} \right] + \right. \end{aligned}$$

$$+n_j[2\nu r_{,k} r_{,l} + (1-2\nu)\delta_{kl}] + n_k[2\nu r_{,j} r_{,l} + (1-2\nu)\delta_{jl}] + n_l[2(1-2\nu)r_{,j} r_{,k} - (1-4\nu)\delta_{jk}] + O(r)\}, \quad (32)$$

отримаємо:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} (y_m - x_{0m}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \frac{\mu}{8(1-\nu)} [\delta_{mj} \delta_{kl} + \delta_{ml} \delta_{kj} + \delta_{mk} \delta_{jl}], \quad (33)$$

після чого

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_l(\bar{x}_0)}{\partial x_m} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\Gamma_s} (y_m - x_{0m}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y &= \frac{\mu}{8(1-\nu)} \left[ \delta_{jk} \frac{\partial u_l(\bar{x}_0)}{\partial x_l} + \frac{\partial u_j(\bar{x}_0)}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k(\bar{x}_0)}{\partial x_j} \right] = \\ &= \frac{1}{8(1-\nu)} \left[ \lambda \delta_{jk} \frac{\partial u_l(\bar{x}_0)}{\partial x_l} + \mu \left( \frac{\partial u_j(\bar{x}_0)}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k(\bar{x}_0)}{\partial x_j} \right) - (\lambda - \mu) \delta_{jk} \frac{\partial u_l(\bar{x}_0)}{\partial x_l} \right] = \\ &= \frac{1}{16(1-\nu)} \left[ 2\sigma_{jk}(\bar{x}_0) + (1-4\nu)\delta_{jk} \sigma_{ll}(\bar{x}_0) \right], \end{aligned} \quad (34)$$

оскільки

$$\lambda - \mu = -\mu \frac{1-4\nu}{1-2\nu}, \quad \sigma_{ll} = \frac{2\mu}{1-2\nu} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}.$$

Тепер розглянемо другий інтеграл з тих, що містяться в правій частині виразу (31). Перш за все, інтегруючи по півколу, одержимо:

$$\int_{\Gamma_s} r_{,j} d\Gamma_y = -2r n_j(\bar{x}_0),$$

$$\int_{\Gamma_s} r_{,j} r_{,k} r_{,l} d\Gamma_y = \frac{2}{3} r (n_j \delta_{lk} + n_k \delta_{lj} + n_l \delta_{jk} - n_j n_k n_l). \quad (35)$$

Далі, помітимо, що при  $r \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} &r(\bar{x}_0, \bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) = \\ &= \frac{\mu}{2\pi r(1-\nu)} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[ 2(1-2\nu)\delta_{jk} r_{,l} + 2\nu(\delta_{jl} r_{,k} + \delta_{lk} r_{,j}) - 8r_{,j} r_{,k} r_{,l} \right] + \right. \\ &\quad \left. + n_j[2\nu r_{,k} r_{,l} + (1-2\nu)\delta_{kl}] + n_k[2\nu r_{,j} r_{,l} + (1-2\nu)\delta_{jl}] + \right. \\ &\quad \left. + n_l[2(1-2\nu)r_{,j} r_{,k} - (1-4\nu)\delta_{jk}] + O(r) \right\}, \end{aligned} \quad (36)$$

тому при малому радіусі  $\varepsilon$  справедливо

$$u(\bar{x}_0) \int_{\Gamma_s} S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \frac{\mu u(\bar{x}_0)}{\pi(1-\nu)\varepsilon} [2n_j n_k n_l - \delta_{jk} n_l - \delta_{jl} n_k - \delta_{lk} n_j] + O(\varepsilon). \quad (37)$$

Підставимо (34) і (37) в (31) і отримаємо:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon + \Gamma_s} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y \right] = \oint_{\Gamma} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \beta_{jk}^S(\bar{x}_0), \quad (38)$$

де

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{\Gamma - \Gamma_\varepsilon} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu u(\bar{x}_0)}{\pi(1-\nu)\varepsilon} (2n_j n_k n_l - \delta_{jk} n_l - \delta_{jl} n_k - \delta_{lk} n_j) \right], \quad (39) \end{aligned}$$

тобто це – скінченна за Адамаром [5] частина гіперсингулярного інтеграла з ядром  $S_{jkl}$ , тоді як

$$\beta_{kj}^S(\bar{x}_0) = \frac{1}{16(1-\nu)} [2\sigma_{jk}(\bar{x}_0) + (1-4\nu)\delta_{jk}\sigma_{ll}(\bar{x}_0)]. \quad (40)$$

За допомогою (29), (30), (38) і (40) рівність (24) перетворюється на граничний аналог формули Соміліани для напружень:

$$\frac{1}{2} \sigma_{kj}(\bar{x}_0) = \oint_{\Gamma} \tau_l(\bar{y}) D_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y - \oint_{\Gamma} u_l(\bar{y}) S_{jkl}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y, \quad j, k, l=1, 2, \quad (41)$$

який можна використовувати в якості ГР відносно незаданих граничними умовами переміщень і напружень.

Як приклад розглянемо коливання нескінченного простору, послабленого тріщиною, до різних берегів якої в різні боки по нормалі прикладені рівномірно розподілені навантаження з амплітудою  $q$ . Нехай тріщина лежить в площині  $x_1 O x_3$ . Внаслідок симетрії рівняння (30) спрощується і набуває вигляду:

$$2 \oint_{\Gamma^+} u_2(\bar{y}) S_{222}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = q, \quad \bar{x}_0, \bar{y} \in \Gamma^+, \quad q = const, \quad (42)$$

де  $\Gamma^+$  – це верхній берег тріщини, на якому виконуються рівності

$$n_1 = 0, \quad n_2 = -1; \quad r = |y_1 - x_1|; \quad r_{,2} = 0; \quad (r_{,1})^2 = 1; \quad \frac{\partial r}{\partial n} = 0; \quad (43)$$



$$\begin{aligned}
 S_{222}(\bar{x}, \bar{y}) &= -\frac{i\mu}{4r^2} \left[ -S4(r) - 4 \frac{T2(r)}{r} \right] = \\
 &= \frac{i\mu}{4r^2} \left[ \frac{\lambda^2}{\mu(\lambda + 2\mu)} \kappa_1 H_1^{(1)}(\varphi_1) + 12H_2^{(1)}(\varphi_2) - \right. \\
 &\quad \left. -12\alpha H_2^{(1)}(\varphi_1) - 4\varphi_2 H_1^{(1)}(\varphi_2) - 2 \frac{\lambda}{\mu} \varphi_1 H_1^{(1)}(\varphi_1) \right]. \quad (44)
 \end{aligned}$$

Для чисельного визначення розподілу невідомих амплітуд переміщень контур  $\Gamma^+$  розбивається на граничні елементи (ГЕ), і на кожному з них приймається кусково квадратична апроксимація шуканих функцій. За колокаційною схемою на границі обирається сукупність полюсів  $\bar{x}_{0i}$ , в яких повинна виконуватись рівність (42), що дозволяє звести систему ГПР до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень  $u(\bar{x}_{0i})$ . Найбільш складною при такому алгоритмі є процедура обчислення інтегралів по тому ГЕ, на якому розташований полюс.

Перенесемо початок координат в полюс  $\bar{x}_{0i}$  та подамо шукану функцію переміщень на ГЕ, якому належить полюс, у вигляді:

$$u_2(y_1) = u_2(\bar{x}_{0i}) + \frac{\partial u_2(\bar{x}_{0i})}{\partial x_1} y_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_2(\bar{x}_{0i})}{\partial x_1^2} y_1^2. \quad (45)$$

Скінченну за Адамаром частину гіперсингулярного інтегралу по симетричному відрізьку  $\Gamma_c$  довжиною  $2c$  запишемо наступним чином:

$$\begin{aligned}
 &\oint_{\Gamma_c} u_2(\bar{y}) S_{222}(\bar{x}_0, \bar{y}) d\Gamma_y = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_{-c}^{-\varepsilon} u_2(y_1) S_{222}(0, y_1) dy_1 + \int_{\varepsilon}^c u_2(y_1) S_{222}(0, y_1) dy_1 + \mu \frac{u(\bar{x}_{0i})}{\pi\varepsilon(1-\nu)} \right\} = \\
 &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ 2u(\bar{x}_{0i}) \int_{\varepsilon}^c S_{222}(0, y_1) dy_1 + \mu \frac{u(\bar{x}_{0i})}{\pi\varepsilon(1-\nu)} + \frac{\partial^2 u(\bar{x}_{0i})}{\partial x_1^2} \int_{\varepsilon}^c y_1^2 S_{222}(0, y_1) dy_1 \right\}. \quad (46)
 \end{aligned}$$

Інтеграли в правій частині рівності (46) можуть бути визначені в замкненому вигляді за допомогою співвідношень [6]:

$$\begin{aligned}
 &\int \frac{H_1^{(1)}(t)}{t} dt = tH_0^{(1)}(t) - H_1^{(1)}(t) + \Phi(t), \quad \int tH_1^{(1)}(t) dt = \Phi(t), \\
 &\int \frac{H_1^{(1)}(t) - tH_2^{(1)}(t)}{t} dt = H_1^{(1)}(t), \quad \int \frac{3H_2^{(1)}(t) - tH_1^{(1)}(t)}{t^2} dt = -\frac{H_2^{(1)}(t)}{t}, \quad (47)
 \end{aligned}$$

де  $\Phi(t) = \frac{\pi t}{2} \left[ H_1^1 L_0(t) - H_0^1 L_1(t) \right]$ ,  $L_n(t)$  – функція Струве  $n$ -го порядку [6].

Крім того необхідно зауважити, що при малих  $r$  в описаній вище місцевій системі координат

$$S_{222}(0, y_1) = -\frac{\mu}{2\pi y_1^2(1-\nu)} + O(y_1), \quad (48)$$

з урахуванням (47) отримаємо:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_c} u_2(\bar{y}) S_{222}(\bar{x}, \bar{y}) d\Gamma_y &= \frac{i\mu}{2c} \left\{ 4\alpha H_2^{(1)}(k_1 c) - 4H_2^{(1)}(k_2 c) + \right. \\ &+ 4 \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} k_1 c H_1^{(1)}(k_1 c) - \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} k_1 c \left[ k_1 c H_0^{(1)}(k_1 c) + \Phi(k_1 c) \right] \left. \right\} u(\bar{x}_{0i}) + \\ &+ \frac{i\mu c}{4} \left[ 12\alpha H_2^{(1)}(k_1 c) - 12H_2^{(1)}(k_2 c) - \frac{\lambda^2}{\mu^2} \alpha(k_1 c) H_1^{(1)}(k_1 c) \right. \\ &\left. + \frac{\lambda - 6\mu}{\mu} \frac{1}{k_1 c} \Phi(k_1 c) + \frac{8}{k_2 c} \Phi(k_2 c) \right] \frac{\partial^2 u(\bar{x}_{0i})}{\partial x_1^2}. \quad (49) \end{aligned}$$

Отже, отримано замкнений компактний вираз (49) для обчислення скінченної за Адамаром частини гіперсингулярного ГР. Оскільки інтегрування по решті границі не викликає труднощів, можна вважати питання регуляризації розрахункових співвідношень та алгебраїзації системи ГР вирішеним. Зауважимо, що отримати рівність (49) вдалося тільки після того, як було прийнято гіпотезу про кусково квадратичний характер поведінки шуканих функцій  $u_2(\bar{y})$ .

Результати розв'язку задачі у вигляді амплітуд переміщень  $u_2(\bar{x}_{0i})$  в точках колокації були використані для визначення коефіцієнту інтенсивності напружень (КІН). Порівняння довідкових значень [7] із розрахунковими, отриманими при різній густоті ГЕ-сітки і коефіцієнту Пуассона  $\nu = 0,25$ , містяться в таблиці 1.

На рис. 2 наведені графіки залежності нормованого КІН  $K_1$  від безрозмірного параметру частоти коливань. Лінія, позначена трикутниками, відповідає значенням, взятим з довідкової літератури [7]. Лінією, позначеною ромбами, з'єднані точки, отримані за допомогою розробленого чисельного алгоритму на досить розрідженій сітці граничних елементів (8 елементів на контурі тріщини). Лінія, позначена прямокутниками, побудована за результатами, знайденими на більш густій сітці (40 ГЕ вздовж контуру).

Таблиця 1

$\omega RC_1^{-1}$		0.0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2
Точне значення $K_1$		1	1.05	1.14	1.25	1.31	1.2	0.97
$N=8$	Розрах. знач.	1.034	1.079	1.174	1.284	1.327	1.204	0.956
	похибка, %	3.4	2.8	3.0	2.7	1.3	0.3	1.4
$N=20$	Розрах. знач.	1.014	1.058	1.154	1.265	1.313	1.2	0.96
	похибка, %	1.4	0.8	1.2	1.2	0.2	0	0.9
$N=40$	Розрах. знач.	1.007	1.052	1.147	1.259	1.31	1.2	0.965
	похибка, %	0.7	0.1	0.6	0.7	0.03	0.02	0.6

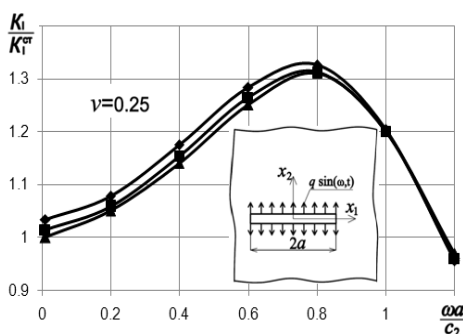


Рис. 2

Наведені результати наочно свідчать про досить швидку збіжність розрахункових даних до точних значень. Так, при  $\omega aC_2^{-1}=0.8$  (значення параметру частоти, поблизу якого  $K_1$  досягає максимуму) похибка визначення КІН на розрідженій сітці не перевищувала 1,5 %, а на густій – 0,2 %. Так само

приблизно в два рази зменшується похибка і в інших точках частотного діапазону, що позитивно характеризує можливості розробленої методики.

Розглянемо далі коливання скінченної пластини, послабленої тріщиною, до торців якої нормально прикладені рівномірно розподілені навантаження з амплітудою  $q$ . Знову для визначення КІН використовуємо результати розв'язку задачі у вигляді амплітуд переміщень  $u(\bar{x}_{0i})$  в точках колокації. Оскільки точного розв'язку цієї задачі не існує, порівнюємо результати розробленої методики за методом граничних елементів з результатами, отриманими за допомогою учбової версії програми ANSYS, в якій реалізовано метод скінченних елементів.

Графіки залежності нормованого КІН  $K_1$  від безрозмірного параметру частоти коливань наведені на рисунку 3. Штрих пунктирна лінія, відповідає значенням, отриманим за методом скінченних елементів. Суцільною лінією, з'єднані точки, отримані за допомогою розробленого чисельного алгоритму на сітці граничних елементів (16 та 32 елементів на контурі тріщини).

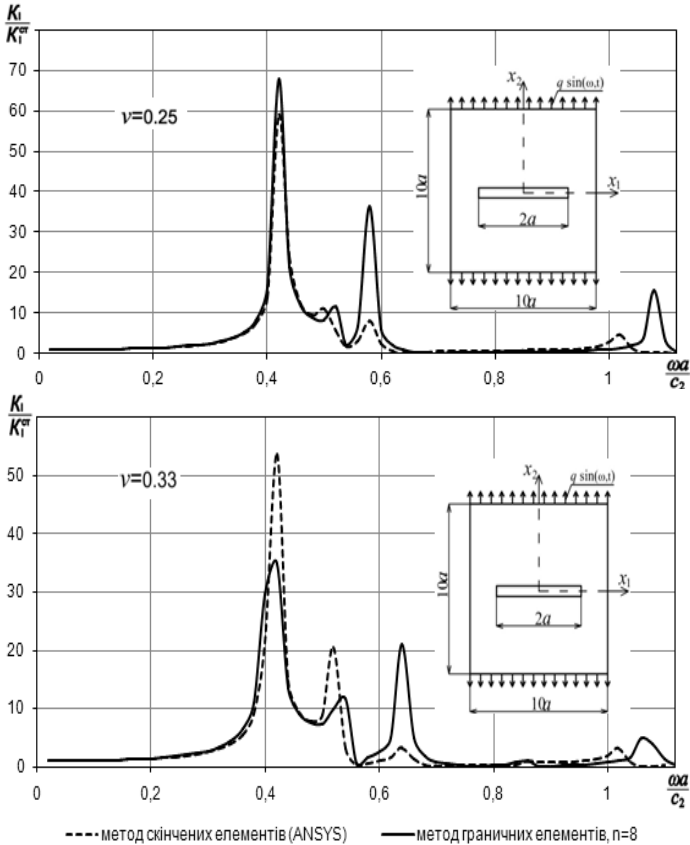


Рис. 3

Як бачимо, цей приклад демонструє задовільну узгодженість розрахункових даних, отриманих за методами граничних та скінченних елементів. Розбіжність результатів при частотах коливань, віддалених від власних, не перевищує 6%. При коливаннях з частотами, близькими до власних, спостерігається досить істотна розбіжність значень, але характер амплітудно-частотної характеристики КІН нормального відриву в обох випадках є схожим. Наведені дані співставлення свідчать про достовірність результатів, отриманих за розробленою методикою.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
2. Guiggiani M., Krishnasamy G., Rudolphi T.J., Rizzo F.J. A general algorithm for the numerical solution of hypersingular boundary integral equations, ASME J.of Applied Mechanics, 59 (1992), pp. 604-614
3. Ворона Ю.В., Геращенко О.В. Методика розв'язання задачі про гармонічні коливання масивів з тріщинами // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2007. – Вип. 81. – С.119–134
4. Cruse T.A. BIE fracture mechanics analysis: 25 years of developments // Computational Mechanics, 18 (1996), pp. 1-11
5. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа. – М: Наука, 1978. – 352 с.
6. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М: Наука, 1979. – 830 с.
7. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х томах. Т.2: Пер. с англ./Под ред. Ю.Мураками. – М: Мир, 1990. – 1016 с.

*Стаття надійшла до редакції 17.10.2011 р.*

*Vorona Yu.V., Goncharenko M.V., Kozak A.A., Chernenko O.S.*

#### **КОЛЕБАНИЯ ДВУМЕРНЫХ МАССИВНЫХ ТЕЛ, ОСЛАБЛЕННЫХ ТРЕЩИНАМИ НОРМАЛЬНОГО ОТРИВА**

Исследуются колебания упругих массивных элементов конструкций, ослабленных трещинами. Получено граничное интегральное представление для напряжений, в состав которого входят сингулярный и гиперсингулярный интегралы. С помощью интегрирования по частям проведена регуляризация второго из интегралов. Решены тестовые задачи про динамическое нагружение двумерных массивов с плоскими трещинами.

*Vorona Yu.V., Goncharenko M.V., Kozak A.A., Chernenko O.S.*

#### **VIBRATIONS OF 2-D SOLIDS WITH OPENING-MODE CRACKS**

Vibrations of elastic solids with cracks are investigated. Boundary integral equation for stresses is received. This expression consists of strongly singular and hypersingular integrals. The latter is regularized using integration by parts. Numerical examples which illustrate abilities of derived technique are presented.