УДК 539.3

Д.Г. Чорнописький, канд. фіз.-мат. наук

ЗБІЖНІСТЬ ПЕРШОГО ТА ДРУГОГО ВАРІАНТІВ МЕТОДУ ЗБУРЕННЯ ФОРМИ ГРАНИЦІ В ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧАХ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТІЛ, ОБМЕЖЕНИХ НЕКАНОНІЧНИМИ ПОВЕРХНЯМИ

Отримано розклад точного розв'язку осесиметричної задачі пружності про рівномірний розтяг-стиск середовища з еліпсоїдальною порожниною по степенях параметра, що характеризує її ексцентриситет. При цьому коефіцієнти розкладу точного розв'язку задачі в точності співпали з першими трьома коефіцієнтами при степенях параметра наближеного розв'язку, отриманого 1-им варіантом методу збурення форми границі, які визначають величину концентрації напружень на поверхні порожнини. Виконано порівняння числових даних коефіцієнтів концентрації напружень точного розв'язку задачі Ламе для оболонок, обмежених еліпсоїдальними поверхнями або близькими до них, з їх величиною отриманою згідно з наближеними розв'язками 1-го і 2-го варіантів методу збурення форми границі.

Перший і другий варіанти методу збурення форми границі та його застосування для розв'язку просторових задач пружної рівноваги тіл, обмежених неканонічними поверхнями, детально викладено в монографіях [2, 6]. Основою методу є представлення компонент напружено-деформованого стану (НДС) тіла неканонічної форми в ряди по степенях параметру, що характеризує величину відхилення неканонічної поверхні від відповідної канонічної. В даному випадку розв'язок задачі для визначення НДС тіла неканонічної форми зводиться в кожному із наближень до послідовності граничних задач для тіла канонічної форми у відповідній системі координат, які мають в замкненому вигляді точний або наближений аналітичний розв'язок включно з нульовим наближенням. Згідно з методом збурення форми границі для кожного із послідовних наближень в загальному вигляді у системах координат (прямокутна, циліндрична, сферична) в [6] приведено в загальному вигляді диференціальні оператори, залежні від функції із рівняння неканонічної поверхні тіла, що дозволяють на основі аналітичних розв'язків в попередніх наближеннях отримати граничні умови для наступного наближення.

1. Перший варіант методу збурення форми границі орієнтований на розв'язок класу просторових задач теорії пружності для тіл, обмежених неканонічними поверхнями, які віднесені до криволінійної ортогональної системи координат ρ, γ, φ. В довільній точці M координатної поверхні S

(ρ = const) між одиничними векторами (ортами) $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\gamma, \vec{e}_\varphi$ і ортом нормалі $\vec{n}$ до S виконуються умови ортогональності

$$\vec{e}_\rho \cdot \vec{e}_n = 1, \ \vec{e}_\gamma \cdot \vec{e}_n = 0, \ \vec{e}_\varphi \cdot \vec{e}_n = 0 \,. \tag{1}$$

Вважаємо, що контур поперечного перерізу поверхні обертання порожнини в криволінійних координатах ρ, γ, φ задано рівнянням

$$r_0^{-1}\omega(\xi) = \xi + \varepsilon f(\xi)\,, \tag{2}$$

де r_0 — характерний розмір порожнини, $\xi = \rho e^{i\gamma}, \, i = \sqrt{-1}, \, |\,\varepsilon\,| << 1.$ Для поверхонь обертання зв'язок між безрозмірними сферичними r, θ, α (θ — кут довготи, α — широти) і криволінійною системою координат представимо співвідношенням [2]:

$$r = \frac{1}{r_0}\sqrt{\omega(\xi)\varpi(\xi)}, \ \theta = arc\text{tg}\frac{\text{Im}\varpi(\xi)}{\text{Re}\,\omega(\xi)}, \ \alpha = \varphi \,. \tag{3}$$

Зокрема, якщо в (2) задати функцію $f(\xi) = \xi^{-1}$ при ρ = const, то отримаємо рівняння поверхні еліпсоїдної порожнини з параметрами

$$\varepsilon = \frac{a-b}{a+b}\left(\frac{a}{b} = \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right), \tag{4}$$

де a, b — півосі еліпсоїда обертання, ε — ексцентриситет. Значенням $\varepsilon > 0$ ($a > b$) відповідає відносно Oz витягнута, а при $\varepsilon < 0$ ($a < b$) — стиснута еліпсоїдальні порожнини.

Точні аналітичні розв'язки просторових задач теорії пружності для тіл, обмежених еліпсоїдальними поверхнями, отримано в [9]. Зокрема, в [5] приведено точний розв'язок задачі про концентрацію напружень на поверхні еліпсоїдальної порожнини в круговому циліндрі при крученні його моментом M. У випадку рівномірного розтягу-стиску ізотропного середовища з еліпсоїдальною порожниною точний аналітичний розв'язок задачі про концентрацію напружень на її поверхні отримано в [1]. В [4] отримано точний аналітичний розв'язок просторової задачі через його представлення поліномами Лежандра 1-го і 2-го роду про пружну рівновагу еліпсоїдальної оболонки під дією внутрішнього тиску p (задача Ламе). При цьому аналітичні та числові результати про НДС еліпсоїдальної оболонки отримані на основі розв'язку скінченої алгебраїчної системи рівнянь 20-го порядку, що слідує із асимптотики для поліномів Лежандра при редукції безкінечної системи алгебраїчних рівнянь як коефіцієнтів при невідомих високого порядку.

Таким чином, точні аналітичні розв'язки і числові результати просторових задач теорії пружності про кручення вала, розтяг-стиск ізотропного середовища з еліпсоїдальною порожниною, задача Ламе для еліпсоїдальної оболонки порівнювались з числовими даними [2], отриманими із розв'язків вище вказаних задач згідно 1-го варіанта методу збурення форми границі на основі перших трьох наближень в аналітичному вигляді й дослідженням їх практичної числової збіжності. Однак, питання про збіжність цього варіанта методу збурення форми границі залишалось відкритим. У статті [3] вперше отримано розклад точного розв'язку задачі [5] про кручення циліндричного вала з еліпсоїдальною порожниною в ряд по степеням параметра ε (ε - ексцентриситет порожнини, що характеризує відхилення її поверхні від сфери). При цьому поверхню еліпсоїдальної порожнини в [2] прийнято за основу неканонічною, що є близькою до сферичної ($\varepsilon \ll 1$). В результаті було отримано перші три члени розкладу з точністю до $O(\varepsilon^3)$, коефіцієнти яких при степенях ε^0, ε^1, ε^2 точно співпали [3] відповідно з коефіцієнтами при тих же степенях, отриманих згідно з 1-м варіантом методу збурення форми границі [2].

2. Розглянемо розклад в ряд по степенях ε точного розв'язку задачі [10] про рівномірний всебічний розтяг-стиск ізотропного середовища з еліпсоїдальною порожниною зусиллям постійної інтенсивності σ_0 = const. Для викладок в подальшому скористаємось позначеннями, які прийняті в монографії [2] та статті [3].

Віднесемо поверхню еліпсоїдальної порожнини до ортогональної криволінійної системи координат ρ, γ, φ, яка співпадає з координатною поверхнею ρ = const.

Основний напружений стан середовища має вигляд

$$\hat{\sigma}_{\rho\rho} = \hat{\sigma}_{\gamma\gamma} = \hat{\sigma}_{\varphi\varphi} = \sigma_0 \ \ (\hat{\sigma}_{\rho\gamma} = \hat{\sigma}_{\rho\varphi} = \hat{\sigma}_{\gamma\varphi} = \sigma_0) \tag{5}$$

($\sigma_0 > 0$ — розтяг, $\sigma_0 < 0$ — стиск).

Компоненти, що відповідають напруженому стану середовища при наявності порожнини, позначимо відповідно $\sigma^{\text{т}}_{\rho\rho} = \sigma^{\text{т}}_{\gamma\gamma} = \sigma^{\text{т}}_{\varphi\varphi}$, $\sigma^{\text{т}}_{\rho\gamma} = \sigma^{\text{т}}_{\rho\varphi} = \sigma^{\text{т}}_{\gamma\varphi}$. Тоді в припущенні, що поверхня порожнини вільна від напружень, отримуємо граничні умови.

$$\sigma_{\rho\rho}\Big|_{\rho=1} = \left(\sigma^{\text{т}}_{\rho\rho} + \hat{\sigma}_{\rho\rho}\right)\Big|_{\rho=1} = 0, \ \ \sigma_{\rho\gamma}\Big|_{\rho=1} = \left(\sigma^{\text{т}}_{\rho\gamma} + \hat{\sigma}_{\rho\gamma}\right)\Big|_{\rho=1} = 0\,. \tag{6}$$

Для визначення компонент $\sigma^{\text{т}}_{ij}$ $(i,j = \rho, \gamma)$, що відповідають точному розв'язку [10], використано представлення їх через гармонічні функції напружень у формі П.Ф. Папковича, а у випадку 1-го варіанта методу збурення форми границі в [2] — представлено розв'язки у вигляді розкладів в ряди по степенях малого параметра ε за умови ($\varepsilon \ll 1$). При цьому в [2] коефіцієнти при степенях ε, як компоненти напружень, визначаються через гармонічні функції в сферичній системі координат згідно роботи В.Т. Чена [11]. В нульовому наближенні при ε^0 отримуємо розв'язок про напружений стан рівномірного розтягу-стиску на "нескінченності" середовища з сферичною порожниною. В подальшому скористаємось представленням визначальних коефіцієнтів концентрації напружень згідно із точними розв'язками [10], а саме:

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^*}{\sigma_0}\right|_{\rho=1,\,\gamma=\frac{\pi}{2}} = 1+\frac{\xi_1}{2N}\left[2(1+\nu)c^2\xi_1 - c\left(2\nu\xi_1+2\nu+7\xi_1\right)+1+4\xi_1+2\nu\right],$$

$$\left.\frac{\sigma_{\gamma\gamma}^*}{\sigma_0}\right|_{\rho=1,\,\gamma=\frac{\pi}{2}} = 1+\frac{1}{2N}\Big\{\xi_1\Big[2(1+\nu)c^2\xi_1 - c\left(\xi_1+6+4\nu(2\xi_1-1)\right)+$$

$$+4\nu\xi_1+3\Big]+2(1-\nu)\Big\}, \tag{7}$$

де $N=-(1+\nu)c^2\xi_1^2+c\left[\xi_1^2-2(1-\nu)\xi_1\right]+\xi_1+1-\nu$; ν — коефіцієнт Пуансона ізотропного середовища. Величини c і ξ_1 в (7) визначаються так:

1^0 сплюснута еліпсоїдальна порожнина в полюсах (–ε, $a<b$) по відношенню до осі Oz

$$c=\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{\xi_1-1}}{\sqrt{\xi_1-1}} \quad \left(\xi_1=\frac{b}{\rho^*}=\left(\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{1-(-\varepsilon)}{1+(-\varepsilon)}\right)^2=\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2>1.\right. \tag{8}$$

Надалі при $\varepsilon>0$ в кінцевих формулах для виразів розкладу коефіцієнтів концентрації напружень згідно 1^0 ε міняємо на (–ε).

2^0. витягнута еліпсоїдальна порожнина в полюсах ($\varepsilon>0$, $a>b$) по відношенню до осі Oz

$$c=\frac{1}{\sqrt{1-\xi_1}}\left[\ln\left(1+\sqrt{1-\xi_1}\right)-\frac{1}{2}\ln\xi_1\right] \quad \left(\xi_1=\frac{b}{\rho^*}=\left(\frac{b}{a}\right)^2=\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2<1\right). \tag{9}$$

Відмітимо, що у випадку $\xi_1<1$ в статті [10] допущена друкована помилка у виразі для величини c, де у знаменнику замість значення $\sqrt{\xi-1}$ ($\xi=\xi_1$) повинно бути $\sqrt{1-\xi}$. В дальшому використовуємо заміну змінної ξ_1-1 на $u(\varepsilon)$ згідно з [3] у випадку 1^0 сплюснутого еліпсоїда обертання ($\varepsilon<0$)

$$u(\varepsilon)=\xi_1-1=\left(\frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}\right)^2-1, \tag{10}$$

а в іншому, 2^0, для витягнутого еліпсоїда обертання (ε > 0)

$$z(\varepsilon)=1-\xi_1=1-\left(\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\right)^2. \qquad (11)$$

Згідно з двома випадками форми еліпсоїдальної порожнини при рівномірному розтягу-стиску на поверхні для коефіцієнтів концентрації напружень, як складних функцій залежних від змінних $u(\varepsilon)$ або $z(\varepsilon)$, отримуємо вирази для розкладу в ряд Тейлора по степенях ε в околі точки ε = 0

$$\left.\frac{\sigma_{ii}^*}{\sigma_0}\right|_{\rho=1,\,\gamma=\frac{\pi}{2}}=K_{ii}^*(f(\varepsilon))=K_{ii}^*(f(0))+\frac{dK_{ii}^*(f(\varepsilon))}{df}\cdot\frac{df}{d\varepsilon}\Big|_{\varepsilon=0}\cdot\varepsilon+$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{d^2K_{ii}^*(f(\varepsilon))}{df^2}\cdot\left(\frac{df}{d\varepsilon}\right)^2+\frac{dK_{ii}^*(f(\varepsilon))}{df}\frac{d^2f}{d\varepsilon^2}\right]\Bigg|_{\varepsilon=0}\varepsilon^2+\ \ldots \qquad (12)$$

$$\left(i=\gamma,\varphi;\ \ f(\varepsilon)=\begin{cases}u(\varepsilon) & \text{при } \varepsilon<0\\ z(\varepsilon) & \text{при } \varepsilon>0\end{cases}\right).$$

Аналітичне визначення коефіцієнтів розкладів при степенях ε у виразах (7) на основі величини c з відповідними значеннями ξ_1 із пунктів 1^0 або 2^0 є далеко нетривіальним, оскільки необхідно знаходити границю складних трансцендентних функцій, залежних від ε в точці ε =0, граничним переходом ε→0 з розкриттям невизначеностей типу $\frac{0}{0}$ за правилом Лопіталя.

Як раніше в [3], скористаємось асимптотичним розкладом величини c заданої функціями згідно (8), (9) в ряди відповідно по степенях нових змінних u або z, тобто [1]:

$$\frac{\operatorname{arctg}\sqrt{u}}{\sqrt{u}}=1-\frac{u}{3}+\frac{u^2}{5}-\frac{u^3}{7}+\ldots+(-1)^n\frac{u^n}{2n+1}+\ldots \text{ (при } \varepsilon\to0,\ u(\varepsilon)\to0), \qquad (13)$$

$$\ln\frac{1+\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}}=2\left(\sqrt{z}+\frac{z\sqrt{z}}{3}+\frac{z^2\sqrt{z}}{7}+\ldots+\frac{z^n\sqrt{z}}{2n+1}+\ldots\right) \text{(при} \varepsilon\to0,\ z(\varepsilon)\to0). \qquad (14)$$

Скористаємось представленням точного розв'язку (7) у випадку стиснутої еліпсоїдальної порожнини згідно виразів (8), (13). Опустимо ряд громіздких аналітичних викладок із групування членів при однакових степенях змінної $u(\varepsilon)$ в чисельнику і знаменнику. Для коефіцієнта концентрації напруження $\sigma_{\gamma\gamma}^*/\sigma_0$ відносно параметра ε в ряд виду (12) отримаємо

$$\left.\frac{\sigma^*_{\gamma\gamma}}{\sigma_0}\right|_{\rho=1,\,\gamma=\frac{\pi}{2}} = K_0(u(\varepsilon)) + \frac{dK_1(u(\varepsilon))}{du}\frac{du}{d\varepsilon}\cdot\varepsilon +$$

$$+\frac{1}{2!}\left[\frac{d^2K_2(u(\varepsilon)}{du^2}\left(\frac{du}{d\varepsilon}\right)^2 + \frac{dK_2(u(\varepsilon)}{du}\frac{d^2u}{d\varepsilon^2}\right]\varepsilon^2 + \ldots \tag{15}$$

Коефіцієнти в (15) залежні від змінної $u(\varepsilon)$ і мають вигляд

$$K_0(u(\varepsilon) = 1 + \frac{7(7-5\nu)+(-7\nu+32)u}{2[7(7-5\nu)+2(7\nu-5)u]},$$

$$\frac{dK_1(u(\varepsilon))}{du}\frac{du}{d\varepsilon} =$$

$$\frac{(-7\nu+32)[7(7-5\nu)+2(7\nu-5)u]-2(7\nu-5)\cdot[7(7-5\nu)+(-7\nu+32)u'\,]}{2[7(7-5\nu)+2(7\nu-5)u]^2},$$

$$K_2(u(\varepsilon)) = 1 + \frac{A(u)}{2B(u)}, \tag{16}$$

де

$$A(u) = 35(7-5\nu)+5(-7\nu+32)u+(29\nu-46)u^2,$$

$$B(u) = 35(7-5\nu)+10(7\nu-5)u+(-37\nu+23)u^2,$$

$$A' = [5(-7\nu+32)+2(29\nu-46)u]u',\;\; A'' = 5(-7\nu+32)u''+(29\nu-46)\cdot 2(u')^2,$$

$$B' = 10(7\nu-5)u'+2(-37\nu+23)uu',\;\; B'' = 10(7\nu-5)u''+2(-37\nu+23)(u')^2,$$

$$K_2' = \frac{A'B-AB'}{2B^2},\;\; K_2'' = \frac{(A''B-AB'')B-2(A'B-AB')B'}{2B^3},$$

$$u' = \frac{4(1+\varepsilon)}{(1-\varepsilon)},\quad u'' = 8\frac{2+\varepsilon}{(1-\varepsilon)^4}, \tag{17}$$

де $'$ і $''$ — позначають першу та другу похідні по змінній ε.

Переходимо до границі у виразі (15) з врахуванням (16), (17) при умові $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} u(\varepsilon) = 0$.

При цьому згідно (17) вирази $A(0)=B(0)$. Тоді для коефіцієнтів розкладу (16) при степенях ε отримуємо значення

$$K_0(u(0)) = \frac{3}{2};\quad \left.\frac{dK_1(u(\varepsilon))}{du}\frac{du}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \frac{6(2-\nu)}{7-5\nu},$$

$$\frac{1}{2!}\left[\frac{d^2K_2(u(\varepsilon))}{du^2}\cdot\left(\frac{du}{d\varepsilon}\right)^2+\frac{dK_2(u(\varepsilon))}{du}\frac{d^2u}{d\varepsilon}\right]\Bigg|_{\varepsilon=0}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{8(285\nu^2-1311\nu+1104)}{35(7-5\nu)^2}. \qquad (18)$$

Оскільки розглядається розв’язок для середовища з стиснутою еліпсоїдальною порожниною (ε <0), то для перших трьох членів розкладу напружень в ряд по ε згідно з (15) отримаємо

$$\left.\frac{\sigma^*_{\gamma\gamma}}{\sigma_0}\right|_{\rho=1,\ \gamma=\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}-\frac{6(2-\nu)}{7-5\nu}\varepsilon+\frac{4(285\nu^2-1311\nu+1104)}{35(7-5\nu)^2}\varepsilon^2+\ldots \qquad (19)$$

що точно співпадає з його аналітичним виглядом, отриманим в монографії О.М. Гузя і Ю.М. Неміша [2] методом збурення форми границі для розв’язку просторових задач теорії пружних тіл, обмежених неканонічними ортогональними поверхнями. Відмітимо, що величина 3/2 коефіцієнта концентрації напружень відповідає всебічному розтягу-стиску середовища з сферичною порожниною і є числовим значенням нульового наближення методу збурення форми границі. За аналогією з попереднім випадком, можна отримати аналітичний вигляд розкладу по параметру ε для коефіцієнта напружень

$$\left.\frac{\sigma^*_{\varphi\varphi}}{\sigma_0}\right|_{\rho=1,\ \gamma=\frac{\pi}{2}}=\frac{3}{2}+\varepsilon\frac{6(1-2\nu)}{7-5\nu}+\varepsilon^2\frac{4(-111+1389\nu-1200\nu^2)}{35(7-5\nu)^2}, \qquad (20)$$

оскільки точний розв’язок (7) містить аналогічні вирази для величин *N*, *c* як функцій залежних від змінної $u(\varepsilon)$, що справедливі для $\sigma^*_{\gamma\gamma}/\sigma_0$.

Аналогічні аналітичні викладки можна провести для розкладу точного розв’язку для коефіцієнтів концентрації напружень на поверхні еліпсоїдальної порожнини, витягнутої в полюсах відносно осі Oz ($\varepsilon > 0$) згідно асимптотичного розкладу справедливого для функції (14), залежної від змінної $z(\varepsilon)$.

У рамках застосування 1-го варіанта методу збурення форми границі в просторових задачах теорії пружності у випадку тіл, обмежених неканонічними ортогональними поверхнями, є можливість порівняння наближених розв’язків з точними для еліпсоїдальних областей. Стосовно 2-го варіанта методу, орієнтованого на розв’язок задач пружної рівноваги для тіл з неканонічними неортогональними поверхнями точні розв’язки практично відсутні.

Якщо задамо в безрозмірних сферичних координатах r, θ, α неортогональну поверхню обертання порожнини, що описується рівнянням

$$S\sim\ r = 1 + \varepsilon \cos 2\theta \quad (|\,\varepsilon\,| < 1,\ 0 \le \theta \le \pi \ \text{— кут довготи}), \qquad (21)$$

то поверхня, задана рівнянням (21), співпадає з формою поверхні еліпсоїдальної стиснутої порожнини ($\varepsilon > 0$) на екваторі ($\theta = \pi/2$) та витягнутої в полюсах $(\theta = 0, \pi)$. В іншому випадку ($\varepsilon < 0$) поверхня (21) відповідає витягнутій еліпсоїдальній порожнині вздовж осі Oz. Зауважимо, що поверхня (21) незначно відхиляється від контуру поверхні еліпсоїдальної порожнини в околі полюсів. В [8] наведено числові дані для коефіцієнтів концентрації напружень на поверхні порожнини (21) в ізотропному середовищі при значенні $\nu = 0{,}3$ у випадку рівномірного розтягу-стиску (τ — величина інтенсивності), які отримані за 2-им варіантом методу збурення форми границі [2] на основі аналітичних розв'язків задачі для перших трьох наближень із точністю $O(\varepsilon^3)$.

Порівняння числових значень величини концентрації напружень точного розв'язку задачі всебічного розтягу-стиску ізотропного середовища з еліпсоїдальною порожниною з врахуванням розв'язків перших трьох наближень згідно із 1-им варіантом (еліпсоїдальна порожнина) і 2-им варіантом (поверхня порожнини задана рівнянням (21)) методу збурення форми границі приведено в табл.1.

Таблиця 1

$\frac{b}{a}$	ε	1-й варіант методу збурення форми границі [2]				2-й варіант методу збурення форми границі [8]			
		$\frac{\sigma^{п}_{\gamma\gamma}}{\sigma_0}$	$\Delta_{\gamma\gamma}$, %	$\frac{\sigma^{п}_{\varphi\varphi}}{\sigma_0}$	$\Delta_{\varphi\varphi}$, %	$\frac{\sigma^{п}_{\theta\theta}}{\tau}$	$\Delta_{\theta\theta}$, %	$\frac{\sigma^{п}_{\alpha\alpha}}{\tau}$	$\Delta_{\alpha\alpha}$, %
0,707	0,172	1,264	0,2	1,597	0,1	1,111	12,2	1,596	0,12
1,225	– 0,101	1,716	0,2	1,4636	0,03	1,663	3,3	1,463	0,07

При цьому числові значення коефіцієнтів концентрації напружень, що відповідають точному розв'язку [10], мають наступні величини:

$$\frac{\sigma^*_{\gamma\gamma}}{\sigma_0} = 1{,}266;\quad \frac{\sigma^*_{\varphi\varphi}}{\sigma_0} = 1{,}598\ (\,b/a = 0{,}707;\ \varepsilon = 0{,}172);$$

$$\frac{\sigma^*_{\gamma\gamma}}{\sigma_0} = 1{,}719;\quad \frac{\sigma^*_{\varphi\varphi}}{\sigma_0} = 1{,}464\ (\,b/a = 1{,}225;\ \varepsilon = -\,0{,}101).$$

В табл. 1 величина Δ_{ii} характеризує процентне відхилення числового значення коефіцієнтів концентрації напружень, отриманих методом збурення форми границі від їх числових величин із точного розв’язку, прийнятих за 100 %. У випадку 2-го варіанта методу для меридіонального напруження $\sigma_{\theta\theta}^{п} / \tau$ різниця 12,2 % від його точного значення $\sigma_{\gamma\gamma}^{*} / \delta_0$, прийнятого за 100%, зумовлене відхиленням контуру порожнини (21) від поверхні еліпсоїдальної порожнини.

3. Для задачі про напружений стан еліпсоїдальної оболонки під дією внутрішнього рівномірного тиску в [4] точний розв’язок та числові результати, отримано із розв’язку скінченої алгебраїчної системи рівнянь 20-го порядку редукцією безкінечної системи на основі асимптотики функцій Лежандра 1-го і 2-го роду високого індекса.

В даному випадку практично можливе тільки порівняння числових даних про НДС ізотропної еліпсоїдальної оболонки під дією внутрішнього тиску з їх числовими даними, отриманими 1-им та 2-им варіантом метода збурення форми границі [2, 7], яке приведено в табл. 2 в залежності від зміни її товщини r_1.

На основі 2-го варіанту методу збурення форми границі отримано числові результати для НДС оболонки в безрозмірних сферичних координатах r, θ, α (θ — довгота, α — широта) під дією постійного внутрішнього тиску з внутрішньою $S_0 \sim 1 + \varepsilon\cos 2\theta$ і зовнішньою поверхнями $S_1 \sim r_1 + \varepsilon\cos 2\theta$ ($\varepsilon = 0{,}1$; $\nu = 0{,}25$). При заданих рівняннях поверхонь оболонка є аналогом оболонки еліпсоїдальної форми із незначним відхиленням між ними в околі полюсів, оскільки товщина першої оболонки є постійною на відміну від еліпсоїдальної.

Згідно викладеного вище встановлено, що на основі розкладів коефіцієнтів концентрації напружень, як точних розв’язків, на поверхні еліпсоїдальної порожнини по степенях параметра ε (ε — ексцентриситет порожнини) у випадку задачі кручення та розтягу-стиску середовища, в точності співпадають з їх аналітичними виразами, які отримані методом збурення форми границі (1-й варіант) в результаті послідовних наближень з використанням відповідних диференціальних операторів для кожного із них. Проведено для вказаних задач порівняння числових даних коефіцієнтів концентрації напружень, отриманих відповідно згідно 1-го та 2-го варіантів цього методу, з їх числовими значенням що слідують із точних розв’язків. Аналогічне порівняння виконано у випадку задачі Ламе для еліпсоїдальної оболонки.

Таблиця 2

r_1	Точний розв'язок [4]	1-й варіант методу збурення форми границі [2]		2-й варіант методу збурення форми границі [7]	
	$k_{\gamma\gamma}^{т}$	$k_{\gamma\gamma}^{п}$	Δ_γ, %	$\sigma_{\alpha\alpha}^{п} / \tau$	Δ_α, %
1,01	40,438	40,543	0,3	40,666	0,6
1,05	8,455	8,465	0,1	8,162	3,5
1,1	4,454	4,460	0,1	4,281	3,9
1,5	1,270	1,263	0,6	1,257	1,0
2,0	0,8774	0,8763	0,1	0,8744	0,3
3,0	0,7102	0,7105	0,04	0,7138	0,5

Викладене вище дозволяє зробити висновок про ефективну теоретичну і практичну збіжність розв'язків із послідовних наближень згідно 1-го і 2-го варіанта методу збурення форми границі до точного розв'язку просторових задач теорії пружності тіл, обмежених неканонічними поверхнями.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Абрамович М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
2. *Гузь А.Н., Немиш Ю.Н.* Методы возмущений в пространственных задачах теории упругости. — К.: Вища шк. Головное изд-во, 1982. — 352 с.
3. *Дзира Б.І., Чорнописький Д.Г.* Про збіжність першого варіанту метода збурення форми границі для розв'язку просторових задач теорії пружності у випадку тіл обертання, близьких до канонічних // Опір матеріалів і теорія споруд. — 2008. — № 82. — С. 83—90.
4. *Куценко Г.В., Улитко А.Ф.* Осесимметричная деформация полого эллипсоида вращения. — Тепловые напряжения в элементах конструкций, 1971, вып. 11, с. 37 — 42.
5. *Лехницкий С.Г.* Кручение анизотропных и неоднородных стержней. — М.: Наука, 1971. — 240 с.
6. *Немиш Ю.Н.* Элементы механики кусочно – однородных тел с неканоническими поверхностями. — К.: Наук. думка, 1989. — 312 с.
7. *Немиш Ю.Н, Сагалюк И.С., Чернопиский Д.И.* Осесимметричное напряженно – деформированное состояние трехслойных толстостенных оболочек, близких к сферическим//Прикл. механика. — 1989. 25, № 11. — С. 20 —25.
8. *Немиш Ю.Н., Чернопиский Д.И.* Упругое равновесие гофрированных тел. — К.: Наук. думка, 1983. — 188 с.
9. *Подильчук Ю.Н.* Трехмерные задачи теории упругости. — К.: Наук. думка, 1979. — 240 с.
10. *Шапиро Г.С.* Осесимметричные деформации эллипсоида вращения // Докл. АН СССР. — 1947. — 58, № 7. — С. 1309—1312.
11. *Чен В.Т.* О некоторых задачах для упругих материалов со сферической изотропией. — Труды амер. о – ва инж.- механиков. Прикл.механика, 1966, 33, № 3 с. 71— 79.

Стаття надійшла до редакції 14.12.2010 р.

Чернопиский Д.И.

СХОДИМОСТЬ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ВАРИАНТОВ МЕТОДА ВОЗМУЩЕНИЯ ФОРМЫ ГРАНИЦЫ В ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТЕЛ, ОГРАНИЧЕННЫХ НЕКАНОНИЧЕСКИМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Получено разложение точного решения осесимметричной задачи упругости об равномерном растяжении – сжатии на "безконечности" среды с эллипсоидальной полостью по степеням параметра, что характеризует ее эксцентриситет. При этом коэффициенты разложения точного решения задачи в точности совпали с первыми трьома коэффициентами при степенях параметра приближенного решения, полученого 1-ым вариантом метода возмущения формы границы, которые определяют величину концентрации напряжений на поверхности полости. Выполнено сравнения числовых данных коэффициентов концентрации напряжений точного решения для тел (полостей) и оболочек, ограниченных эллипсоидальными поверхностями или близкими к ним, с их величиной следующей из приближенных решений полученных 1–ым и 2–ым вариантом метода возмущения формы границы.

Chernopysky D.G.

CONVERQENCE OF THE FIRST AND SECOND VARIANTS OF THE METHOD OF BOUNDARY FORM PERTURBATION IN SPATIAL PROBLEMS OF THE THEORY OF ELASTICITY FOR THE BODIES BOUNDED BY NONCANONICAL SURFACES

A decomposition was obtained for the exact solution of axisymmetrical problem of elasticity about uniform extension-compression on the «infinity» of the medium with ellipsoidal cavity by the parameter extents, that characterises its eccentricity. Coefficients of decomposition of the exact problem solution has coincided with the first three coefficients under the degrees of parameter of the approximate solution obtained by the 1st variant of the method of boundary form perturbation, which determine the value of strain concentration on the cavity surface. Comparisons were monde of numerical data of strain concentration coefficients of the exact solution for the bodies(cavities) and shells, bounded by ellipsoidal surfaces or by those close to them, with their value in accordance with approximate solutions obtained by the 1st and 2nd variants of the method of the boundary form perturbation.