УДК 539.3

І.В.Жупаненко

МЕТОДИКА ВИЗНАЧЕННЯ РЕАКЦІЇ КРУГЛИХ ДИСКІВ НА НЕСТАЦІОНАРНІ ВПЛИВИ

Для визначення реакції круглих дисків на нестаціонарні впливи реалізовано алгоритм розрахунку дискретно-континуальної моделі методом розкладу руху за власними формами коливань. Частоти і форми власних коливань визначаються двома альтернативними підходами. Ефективність та достовірність методики перевірена при розв’язанні тестової задачі і порівнянням результатів.

Розглядається задача про вимушені коливання просторових лінійно-пружних ізотропних тіл обертання, що відносяться до класу круглих дисків.

Круглі та кільцеві диски знаходять широке застосування як елементи будівель та споруд чи деталі машин та обладнання. Часто при проектуванні таких об’єктів виникає необхідність дослідження режимів їх коливань, наприклад, при розрахунку на сейсмічні впливи конструктивних елементів споруд, що відносяться до категорії відповідальних, або при розрахунку деталей машин, під час роботи яких виникає змінне в часі навантаження.

Найбільш поширеним при розв’язку динамічних задач є підхід, за яким динамічний процес представляється у вигляді суперпозиції характерних часткових рухів – власних коливань у випадку тіл обмежених розмірів. Розроблена на основі узагальненого методу скінченних інтегральних перетворень, чисельно-аналітична методика визначення частот і форм власних коливань нетонких пластин обертання [1–3] дозволяє реалізувати такий підхід для зазначених об’єктів. Дослідженню цього питання присвячена дана стаття.

Розглядаються товсті однорідні ізотропні лінійно-пружні пластини обертання. Для визначення динамічної реакції таких об’єктів на нестаціонарні впливи застосовується підхід, що базується на методі розкладу руху за власними формами коливань [4]. Зазначений метод застосовується для дискретно-континуальної розрахункової моделі, методика побудови та адекватність якої досліджена в роботах [5,6].

Рівняння руху дискретно-континуальної моделі пластини складаються на основі принципу Д’Аламбера і утворюють систему звичайних диференціальних рівнянь за часом, яка при застосуванні методу сил в матричній формі в загальному вигляді записується наступним чином:

$$\mathbf{\Pi}\cdot\mathbf{T}\cdot\frac{d^2\vec{Y}}{dt^2}+\vec{Y}=\mathbf{B}\cdot\vec{P}\,. \tag{1}$$

Згідно з методом розкладу руху за власними формами коливань, шуканий вектор розв'язків $\vec{Y}(t)$ рівнянь руху (1) представляється у вигляді суми:

$$\vec{Y}(t)=q_1(t)\cdot\vec{v}_1+\ldots+q_n(t)\cdot\vec{v}_n=\sum_{k=1}^{n}q_k\cdot\vec{v}_k\;, \tag{2}$$

де $q_k(t)$ – нові невідомі узагальнені переміщення, $\vec{v}_k$ – вектор k-ї форми коливань.

Завдяки ортогональності векторів власних форм коливань після перетворення (2) система рівнянь (1) зводиться до n окремих диференціальних рівнянь, що визначають координати $q_k(t)$:

$$M_k\ddot{q}_k+M_k\omega_k^2q_k=Q_k(t)\,,\ k=1,\ldots,n$$

або

$$\ddot{q}_k=-\omega_k^2q_k+\frac{Q_k(t)}{M_k}\,,\ k=1,\ldots,n\,. \tag{3}$$

Тут $M_k=\sum_{i=1}^{n}m_i\cdot v_{ik}^2\ \left(k=1,\ldots,n\right)$ – узагальнені маси відповідних форм власних коливань, ω_k – відповідна власна частота, $Q_k(t)=\sum_{i=1}^{n}v_{ik}\cdot P_i(t)$ представляє узагальнену зовнішню силу, що відповідає k-й формі коливань. Матриця мас $\mathbf{T}=\left[m_i\right]$ та матриця-стовпчик зосереджених зовнішніх сил $\vec{P}=\left\{P_i(t)\right\}$ $(i=\overline{1,m})$ (m – кількість зосереджених мас) визначаються за методикою, описаною в [5].

Динамічна реакція системи на нестаціонарні впливи визначається на основі рівнянь (3) за наступним алгоритмом.

На першому етапі розрахунку будується дискретно-континуальна розрахункова модель і визначається матриця інерції $\left[\mathrm{T}\right]$ та вектор $\left\{P\right\}$ навантажень на дискретні маси. Далі за одним із запропонованих в роботах [1] чи [5] алгоритмів визначаються частоти і форми власних коливань об'єкта розрахунку. Із знайдених власних частот утворюється матриця власних частот $[\Omega^2]$, а із нормованих власних векторів формується матриця $\left[\mathrm{V}\right]$. Це дає можливість визначити матрицю узагальнених мас $[\mathrm{M}_q]$ та вектор узагальнених сил $\vec{Q}$ і сформувати праву частину рівнянь (3).

Другим кроком алгоритму є чисельне інтегрування на заданому проміжку часу рівнянь (3) для кожного k $\left(k=1,\ldots,n\right)$ (n – кількість форм коливань, що утримуються в розкладі (2)). Оскільки шукані розв'язки не обов'язково повинні задовольняти рівняння (1) в будь-який момент часу t, а лише на окремих коротких відрізках Δt, то чисельне інтегрування виконується за допомогою покрокової процедури. При цьому диференціальне рівняння другого порядку (3) зводиться до еквівалентної системи двох звичайних диференціальних рівнянь відносно q_k та $\dot{q}_k$ (коефіцієнтів розкладу вектора переміщень та вектора швидкостей). Така система на кожному часовому відрізку Δt розв'язується чисельно за алгоритмом Рунге-Кутта-Мерсона четвертого порядку точності.

На останньому етапі розрахунку по знайдених коефіцієнтах розкладу q_k для кожного часового кроку за формулою (2) визначається шуканий вектор переміщень $\vec{Y}$.

Аналізуючи рівняння (3), можна сказати, що точність розрахунку динамічної реакції системи на нестаціонарні впливи визначається точністю визначення частот і форм власних коливань. При цьому, відносний вклад окремих режимів власних коливань в загальний розв'язок нестаціонарної задачі і, відповідно, кількість утримуваних в розкладі (2) форм визначається характером навантаження, а тому потребує додаткового аналізу в кожному окремому випадку. З огляду на це, слід зауважити, що проведені в роботі [3] дослідження для високочастотної області підтвердили достовірність і високу точність розв'язків за методикою, що базується на покроковому методі, в той час як в роботі [5] виявлено, що точність розрахунку дискретно-континуальної моделі погіршується з ростом номера частоти. Тому, вбачається більш раціональним визначення параметрів власних коливань покроковим методом.

Для тестування алгоритму розрахунку на нестаціонарні впливи розглянуто задачу про динамічну реакцію жорстко защемленої по контуру круглої пластини товщиною $H=0{,}1\,м$ і радіусом $R=1\,м$ на дію нормального вісесиметричного навантаження в двох варіантах:

$$1)\quad P_1\left(t\right)=1,\ 0\le t\le\infty;\ 2)\quad P_2\left(t\right)=\begin{cases}1,\ 0\le t\le t_0\\ 0,\ t_0\le t\le\infty.\end{cases}$$

Максимальні значення прогину u_z в різні моменти часу для задачі 1 та задачі 2 наведено в таблиці 1. Значення, отримані по запропонованій вище методиці при визначенні частот і форм власних коливань покроковим методом (колонки 3) і при розрахунку дискретно-континуальної моделі (колонки 4), порівняно з результатами, отриманими в роботі [7] на основі дискретизації вихідної моделі просторової лінійної теорії пружності за допомогою напіваналітичного методу скінченних елементів (колонки 1) та на основі теорії типу Тимошенка (колонки 2). Приведені фізико-механічні характеристики взяті з роботи [7] : модуль Юнга $E = 1$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,3$, щільність $\rho = 1$.

Для забезпечення об’єктивності оцінки, розрахунок, як і в роботі [7], виконано при утриманні перших шести частот і форм власних коливань. Чисельні експерименти підтвердили також дослідження автора роботи [7] стосовно несуттєвого уточнення переміщень при врахуванні наступних власних форм.

Таблиця 1

t	$P_1(t)$				$P_2(t)$			
	1	2	3	4	1	2	3	4
2	-18,1	-18,9	-34,8	-32,0	-18,1	-18,5	-34,8	-32,0
4	-110,7	-109,8	-123,0	-116,7	-110,7	-110,0	-123,0	-116,7
6	-230,3	-229,8	-229,5	-224,0	-212,3	-211,8	-194,4	-191,0
8	-304,0	-307,0	-321,0	-316,0	-193,3	-197,2	-197,3	-197,6
10	-361,0	-366,1	-368,8	-360,1	-130,7	-136,8	-138,5	-134,3
12	-344,6	-355,4	-350,1	-340,6	-40,6	-48,6	-28,6	-23,4
14	-245,8	-256,9	-269,2	-264,5	115,2	110,9	99,8	95,8
16	-152,4	-162,2	-161,1	-158,7	192,2	193,7	188,8	181,1
18	-62,4	-64,2	-64,9	-60,68	193,4	191,6	203,7	202,2
20	12,3	12,6	-8,8	-5,5	164,8	173,8	151,4	151,7

Як видно з таблиці, чисельні результати, отримані за всіма окресленими вище підходами, практично збігаються. Це дозволяє говорити про достовірність запропонованої методики розрахунку реакції вісесиметричних пластин на нестаціонарні впливи.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Жупаненко І. В.* Власні коливання товстої кільцевої пластини / І. В. Жупаненко // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-технічн. збірник / Відп. ред. В. А. Баженов. – Вип. 83. – К., 2009. – С. 165 – 172.
2. *Чибіряков В. К.* Методика розв’язання задачі про власні коливання пластин обертання змінної товщини / В. К. Чибіряков, І. В. Жупаненко // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В. А. Баженов. – Вип. 86. – К., 2010. – С. 30 – 46.
3. *Жупаненко І. В.* Про один варіант динамічної теорії нетонких пластин та оболонок / І. В. Жупаненко // Науковий вісник молодих вчених Запорізької державної інженерної академії: збірник наукових праць / Відп. ред. В. І. Пожуєв. – Вип. 1(2). – Запоріжжя, 2011. – С. 47 – 51.
4. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений: учебник для вузов / А. Ф. Смирнов, А. В. Александров, Б. Я. Лащеников, Н. Н. Шапошников. – М. : Стройиздат, 1984. – 416 с.
5. *Чибіряков В. К.* Про один алгоритм розрахунку вісесиметричних коливань круглої пластини / В. К. Чибіряков, І. В. Жупаненко // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. – Вип. 81. – К. : КНУБА, 2007. – С. 43 – 50.
6. *Чибіряков В. К.* Дослідження власних коливань товстих пластин на основі дискретно-континуальної розрахункової моделі / В. К. Чибіряков, І. В. Жупаненко // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник. – Вип. 87. – К. : КНУБА, 2011. – С. 118 - 127.
7. *Григоренко А. Я.* Решение пространственной динамической задачи теории упругости для анизотропных тел / А. Я. Григоренко, И. И. Дыяк, В. М. Макар // Прикладная механика. – 1998. – Т. 34, № 5. – С. 24 – 31.

Стаття надійшла до редакції 03.10.2011 р.

Жупаненко И. В.

МЕТОДИКА ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕАКЦИИ КРУГЛЫХ ДИСКОВ НА НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ

Для определения реакции круглых дисков на нестационарные воздействия реализован алгоритм расчета дискретно-континуальной модели методом разложения движения по собственным формам колебаний. Частоты и формы собственных колебаний определяются двумя альтернативными подходами. Эффективность и достоверность методики проверена решением тестовой задачи и сравнением результатов.

Zhupanenko I. V.

THE PROCEDURE OF DETERMINATION OF DYNAMIC UNSTABLE RESPONSE OF THE AXY-SYMMETRIC PLATES

The dynamic unstable response of the slabs is defined by the decomposition on free vibration modes technique for discrete-continuum computation model. The procedure of determination of natural frequencies and modes is based on two alternative approaches. Efficiency and reliability of the technique has been checked by solving of the test problem and comparison of results.