УДК 539.3

О.К. Гревцев

РОЗВ'ЯЗАННЯ ОСЕСИМЕТРИЧНОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ТОВСТОСТІННИХ ЦИЛІНДРІВ, НАВАНТАЖЕНИХ ЗМІННИМ ПО ДОВЖИНІ ТИСКОМ

Отримано точне розв'язання у переміщеннях рівнянь теорії пружності для тіл обертання при осесиметричному навантаженні.

Розв'язані задачі для порожнистих циліндрів, які перебувають під дією нормально доданих сил, відповідно до будь-якого закону на його внутрішніх та зовнішніх поверхнях. Краї циліндричної товстої оболонки порожнистого циліндра можуть бути закріплені по-різному.

Розроблена теорія розв'язання задач з галузі теорії пружності у переміщеннях дає можливість знайти умови, за яких з'являються температурні зміни у тілах обертання під дією зовнішніх навантажень.

Вступ

Крайові задачі для товстостінного порожнистого циліндра дуже складні і якщо не згадувати деяких тривіальних випадків, то немає жодного розв'язання задачі теорії пружності, яке цілком задовольняло всім граничним умовам на його бічній поверхні і торцях [1].

До таких тривіальних рішень належить задача визначення напруженого стану порожнистого циліндра вільного від закріплень на його торцях і навантаженого нормальними зусиллями, які змінюються по довжині за лінійним законом або при постійному тиску (задача Ламе).

Основна частина

У пропонованому дослідженні розглядається точне розв'язання осесиметричної задачі теорії пружності для порожнистого циліндра, навантаженого змінним нормальним тиском на його циліндричних поверхнях, з урахуванням різних умов закріплення на кінцях. При цьому тиск змінюється по довжині циліндра за довільним законом (рис. 1).

Диференціальні рівняння рівноваги в циліндричних координатах мають такий вигляд [2]:

в переміщеннях

$$\Delta u_1 - \frac{u_1}{r^2} + \frac{e_{,1}}{1-2\nu} - 2\frac{(1+\nu)}{(1-2\nu)}\alpha\theta_{,1} = 0;\ \Delta u_3 + \frac{e_{,3}}{1-2\nu} - 2\frac{(1+\nu)}{1-2\nu}\alpha\theta_{,3} = 0; \quad (1)$$

і напруженнях

$$\sigma_{11,1} + \sigma_{13,1} + \frac{\sigma_{11} - \sigma_{22}}{r} = 0;\ \sigma_{13,1} + \sigma_{33,3} + \frac{1}{r}\sigma_{13} = 0; \quad (2)$$

У рівняннях (1) і (2) індекс після коми означає частинну похідну за відповідною координатою r або z; u_1 і u_3 – відповідно компоненти радіального і осьового переміщень; Δu– оператор Лапласа від переміщень u_i (i =1,3); σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}, σ_{13} – відповідно компоненти радіальної, окружної, осьової і дотичної напружень.

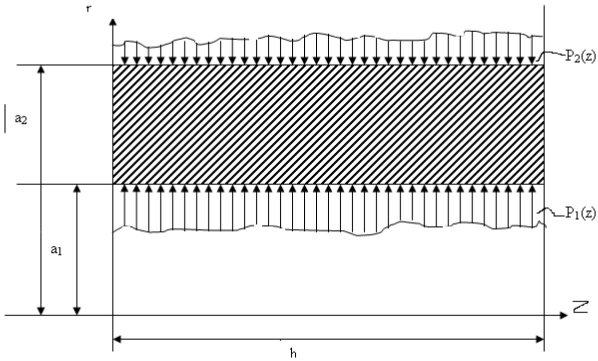

Рис. 1

Компоненти напружень визначаються за законом Гука [2]

$$\sigma_{ij} = 2G\left(e_{ij} + \frac{v}{1-2v}e\delta_{iy} - \frac{1+v}{1-v}\alpha\theta\delta_{iy}\right)_1, \quad iy = 1,2,3; \tag{3}$$

при відомих залежностях між деформаціями і переміщеннями:

$$e_{11} = u_{1,1}; \; e_{22} = \frac{1}{r}u_1; \; e_{33} = u_{3,3}; \; 2e_{13} = u_{1,3} + u_{3,1}. \tag{4}$$

Тут δ_{iy} – символ Кронекера; α і ν – коефіцієнти лінійного теплового розширення і Пуассона; $e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$ – об’ємне розширення; $G = \dfrac{E}{2(1+v)}$ модуль зсуву; E – модуль пружності.

Рішення системи рівнянь (1) беремо у вигляді :

$$u_1(r,z) = \frac{1+v}{1-v}\left[\Psi_{,1} + \frac{1}{r}\left(A_5 z - A_3\right)\right] + r\left(A_4 z + \frac{1}{2}A_6\right);$$

$$u_3(r,z) = \frac{1+v}{1-v}\left(\Psi_{,3} - A_5 enr\right) - A_4\left(\frac{v}{1-v}z^2 + \frac{r^2}{2}\right) - \frac{v}{1-v}zA_6 + A_7, \tag{5}$$

де A_i – довільні сталі інтегрування, а $\Psi(r,z)$ функція, яку треба знайти.

Далі по переміщеннях (5) знаходимо деформації (4):

$$e_{11} = u_{1,1} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\left[\Psi_{,11} - \frac{1}{r^2}\left(A_5 z - A_3\right)\right] + A_4 z + \frac{1}{2}A_6;$$

$$e_{22} = \frac{1}{r}u_1 = \frac{1+\nu}{1-\nu}\left[\frac{1}{r}\Psi_{,1} + \frac{1}{r^2}\left(A_5 z - A_3\right)\right] + A_4 z + \frac{1}{2}A_6;$$

$$e_{33} = u_{3,3} = \frac{1+\nu}{1-\nu}\Psi_{,33} - \frac{2\nu}{1-\nu}\left(A_4 z + \frac{1}{2}A_6\right). \tag{6}$$

Підставляючи у закон Гука (3) деформації (6), знаходимо пружності:

$$\sigma_{13} = \frac{E}{1-\nu}\Psi_{,13}; \sigma_{33} = -\frac{E}{1-\nu}\frac{1}{r}\left(r\Psi_{,1}\right)_{,1};$$

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1-\nu}\left[-\frac{1}{r}\Psi_{,1} - \Psi_{,33} - \frac{1}{r^2}\left(A_5 z - A_3\right) + A_4 z + A_6\frac{1}{2}\right];$$

$$\sigma_{22} = \frac{E}{1-\nu}\left[-\Psi_{,11} - \Psi_{,33} + \frac{1}{r^2}\left(A_5 z - A_3\right) + A_4 z + A_6\frac{1}{2}\right]. \tag{7}$$

Формули (5) і (7) є точними розв'язками рівнянь рівноваги (1) і (2), тому що після підстановки перетворюють останні на тотожності.

Як відомо, деформація пружного тіла нерозривно пов'язана зі зміною його температури [3]. Таким чином, зміна поля деформації спричиняє зміну поля температури і навпаки. Нехай температура ненапруженого циліндра при часі $t = 0$, дорівнює деякому постійному значенню T_0. При навантаженні циліндра зовнішніми навантаженнями в ньому з'являється не тільки поле переміщень, а й температурне поле, яке відрізняється від T і не залежить від того, нагріте тіло чи не нагріте. Зміна температури буде $\theta = T - T_0$, де T – абсолютна температура точки тіла. Отже, під час деформації змінюється температура точки тіла і в результаті може відбутися поглинання або виділення тепла пружним неізольованим тілом при взаємодії його з навколишнім середовищем [4].

Якщо деформація тіла досить мала, то після припинення дії зовнішніх сил, які викликають деформацію, тіло повертається у початковий недеформований стан. При цьому процес деформування відбувається дуже повільно, тобто він буде термодинамічно оборотний [5].

Тепер знаходимо температурну зміну $\theta = T - T_0$, яка виникає внаслідок дії зовнішніх навантажень.

Для об'ємного розширення $e = e + e + e$ з виразу (4), маємо:

$$e = \frac{1-2\nu}{1-\nu}2\left(A_4 z + \frac{1}{2}A_6\right) + \frac{1+\nu}{1-\nu}\Delta\Psi, \tag{8}$$

де $\Delta\Psi = \Psi_{,11} + \frac{1}{r}\Psi_{,1} + \Psi_{,33}$.

Підставляючи переміщення (5) та вираз (8) в систему рівнянь рівноваги (1) і роблячи необхідні перетворення, знаходимо температурну зміну, яка з'являється внаслідок дії зовнішніх навантажень:

$$\alpha\theta = \Delta\Psi \,. \tag{9}$$

Розглянемо такі граничні умови для напружень при осесиметричній деформації циліндра:

$$\sigma_{13} = 0 \text{ при } r = a_1, \;\; r = a_2, \;\; z = 0, \;\; z = h \,, \tag{10}$$

$$\sigma_{11} = P_1(z) \text{ при } r = a_1; \;\; \sigma_{11} = -P(z) \text{ при } r = a_2 \,, \tag{11}$$

$$\sigma_{33} = 0 \text{ при } z = 0, \;\; z = h \,, \tag{12}$$

де a_1 і a_2 – внутрішній та зовнішній радіуси циліндра, а h – його довжина.

Для виконання граничних умов візьмемо частинну похідну по r від функції переміщень $\Psi(r,z)$ у вигляді:

$$\Psi_{,1}(r,z) = \varphi(z)\,\frac{1}{r}(r^2 - a_1^2)(r^2 - a_2^2) \tag{13}$$

де $\varphi(z)$– довільна функція від z, яку потрібно визначити з граничних умов.

Диференціюючи похідну (13) по z і підставляючи у дотичну напругу, σ_{13} з (7), знаходимо:

$$\sigma_{13} = \frac{E}{1-\nu}\Psi_{,13} = \frac{E}{1-\nu}\varphi_{,3}(z)\frac{1}{r}\left(r^2 - a_1^2\right)\left(r^2 a_2^2\right), \tag{14}$$

при цьому:

$$\varphi_{,3}(z)\big|_{z=0} = 0; \;\; \varphi_{,3}(z)\big|_{z=h} = 0 \tag{15}$$

і граничні умови (10) виконуються.

Підставляючи похідну (13) в осьову напругу σ_{33} з (7), знаходимо:

$$\sigma_{33} = -\frac{E}{1-\nu}\varphi(z)\left[4r^2 - 2\left(a_1^2 + a_2^2\right)\right]. \tag{16}$$

Гранична умова (12) буде виконана, якщо

$$\varphi(z)\big|_{z=0} = 0; \;\; \varphi(z)\big|_{z=h} = 0. \tag{17}$$

Для знаходження радіальної напруги σ_{11} з (7) знаходимо функцію $\Psi(r,z)$, для чого інтегруємо похідну (13) по r:

$$\Psi(r,z) = \varphi(z)\int_{a_1}^{r}\frac{1}{r}\left(r^2 - a_1^2\right)\left(r^2 - a_2^2\right)dr + f(z)\,, \tag{18}$$

$f(z)$ - довільна функція інтегрування.

Використовуючи похідну (13) і двічі диференціюючи функцію (18) по z, а потім підставляючи у формулу (7), отримаємо:

$$\sigma_{11}=\frac{E}{1-\nu}\left\{-\varphi(z)\frac{1}{r^2}\left(r^2-a_1^2\right)\left(r^2-a_2^2\right)-\varphi_{,33}(z)\int\limits_{a_1}^{r}\frac{1}{r}\left(r^2-a_1^2\right)\left(r^2-a_2^2\right)dr-\right.$$

$$\left.-f_{,33}(z)-\frac{1}{r^2}\left(A_5z-A_3\right)+A_4z+\frac{1}{2}A_6\right\}. \tag{19}$$

Якщо виконати граничні умови (11), то знайдемо рівняння для визначення функцій $\varphi_{,33}(z)$ і $f_{,33}(z)$:

$$-\varphi_{,33}(z)=-\frac{P_1(z)-P_2(z)}{a_2^2-a_1^2}\frac{1-\nu}{E\beta}+\frac{A_5z-A_3}{a_1^2a_2^2\beta}, \tag{20}$$

де $\beta=\dfrac{a_1^2a_2^2}{a_2^2-a_1^2}\ln\dfrac{a_2}{a_1}-\dfrac{a_1^2+a_2^2}{4}$ та

$$-f_{,33}(z)=-P_1(z)\frac{1-\nu}{E}+\frac{A_5(z)-A_3}{a_1^2}-\left(A_4(z)+\frac{1}{2}A_6\right). \tag{21}$$

Підстановка похідної (21) у формулу (19) дає:

$$\sigma_{11}=-P_1(z)+\frac{E}{1-\nu}\left\{-\varphi(z)\frac{1}{r^2}\left(r^2-a_1^2\right)\left(r^2-a_2^2\right)-\right.$$

$$\left.-\varphi_{,33}(z)\int\limits_{a_1}^{r}\frac{1}{r}\left(r^2-a_1\right)\left(r^2-a_2^2\right)dr+\frac{A_5(z)-A_3}{a_1^2}\left(1-\frac{a_1^2}{r^2}\right)\right\}. \tag{22}$$

Аналогічно для окружного напруження матимемо:

$$\sigma_{22}=-P_1(z)+\frac{E}{1-\nu}\left\{-\varphi_{(z)}\left[3r^2-\left(a_1^2+a_2^2\right)-\frac{a_1^2a_2^2}{r^2}\right]-\right.$$

$$\left.-\varphi_{,33}(z)\int\limits_{a_1}^{r}\frac{1}{r}\left(r^2-a_1^2\right)\left(r^2-a_2^2\right)dr+\frac{A_5z-A_3}{a_1^2}\left(1+\frac{a_1^2}{r^2}\right)\right\}. \tag{23}$$

Знаходимо функцію $f(z)$, для чого двічі проінтегруємо рівняння (21):

$$f(z)=\frac{1-\nu}{E}\int\limits_0^z\int\limits_0^z P_1(z)\,dzdz-\frac{1}{a_1^2}\left(A_5\frac{z^2}{6}-A_3\frac{z^2}{2}\right)+A_4\frac{z^2}{6}+A_6\frac{z^2}{4}+C_3z+C, \tag{24}$$

де C_3 і C_4 – довільні сталі інтегрування.

Температурна зміна $\theta(r_1z)$ визначається з рівняння (9):

$$\theta(r_1z)=\frac{1}{2}\Delta\Psi=\frac{1}{2}\left(\Psi_{,11}+\frac{1}{r}\Psi_{,1}+\Psi_{,33}\right), \tag{25}$$

після підстановки частинних похідних від функції (18) з урахуванням виразу (24) та функції $\varphi(z)$, яка визначається інтегруванням рівняння (20).

Знаючи функцію (18), закон навантаження $P_1(z)$ і $P_2(z)$ та граничні умови спирання кінців циліндра, можна легко знайти температурну зміну $\theta(r,z)$, яка в окремих випадках може дорівнювати нулю. Далі розглянемо деякі приклади розрахунків порожнистих циліндрів для конкретних випадків спирання і завдань різних законів навантаження.

Нехай порожнистий циліндр навантажений нормальним за довжиною тиском на його зовнішній і внутрішній поверхнях (задача Ламе). В цьому випадку маємо P_1 = const і P_2 = const; кінці циліндра вільні. Інтегруючи рівняння (20), отримаємо:

$$-\varphi(z) = -\frac{P_1 - P_2}{a_2^2 - a_1^2}\frac{1-\nu}{E\beta}\frac{z^2}{2} + \frac{A_5}{a_1^2 a_2^2 \beta}\frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2, \tag{26}$$

де A_5, A_3, C_1, C_2 – довільні сталі інтегрування.

Скористаймося граничними умовами (15) та (17), виконання яких дає:

$$A_5 = 0, \quad A_3 = -\frac{(P_1 - P_2)a_1^2 a_2^2}{a_2^2 - a_1^2}\frac{1-\nu}{E}, \; C_1 = C_2 = 0. \tag{27}$$

Звідси для $\varphi(z)$ з (26) маємо:

$$\varphi(z) = 0\,. \tag{28}$$

У цьому випадку пружності (14) і (16) дорівнюють:

$$\sigma_{13} = 0; \;\; \sigma_{33} = 0\,, \tag{29}$$

а для нормальних радіальної та осьової напруг з (22) і (23) отримаємо:

$$\sigma_{11} = \frac{P_1 a_1^2 - P_2 a_2^2}{a_2^2 - a_1^2} - \frac{(P_1 - P_2)a_1^2 a_2^2}{r^2\left(a_2^2 - a_1^2\right)};$$

$$\sigma_{22} = \frac{P_1 a_1^2 - P_2 a_2^2}{a_2^2 - a_1^2} + \frac{(P_1 - P_2)a_1^2 a_2^2}{r^2\left(a_2^2 - a_1^2\right)}. \tag{30}$$

Пружності (29) та (30) мають назву напруг задачі Ламе.

Підставляючи в функцію (21) для A_5 і A_3 з (27), отримаємо після інтегрування по z:

$$f(z) = \frac{P_2 a_2^2 - P_1 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2}\frac{1-\nu}{E}\frac{z^2}{2} + A_4\frac{z^3}{4} + A_6\frac{z^2}{4} + C_3 z + C_4\,, \tag{31}$$

де A_4, A_6, C_3, C_4 – довільні сталі інтегрування.

Для функції переміщення (18), користуючись (28), знаходимо:

$$\Psi\left(r,z\right)=f\left(z\right). \tag{32}$$

Після підстановки (31) у (32) та диференціювання отримаємо:

$$\Psi_{,1}=0; \tag{33}$$

$$\Psi_{,3}=\frac{P_2a_2^2-P_1a_1^2}{a_2^2-a_1^2}\frac{1-\nu}{E}z+A_4\frac{z}{2}+A_6\frac{z}{2}+C; \tag{34}$$

$$\Psi_{,33}=\frac{P_2a_2^2-P_1a_1^2}{a_2^2-a_1^2}\frac{1-\nu}{E}+A_4z+\frac{1}{2}A_6. \tag{35}$$

Знаходимо переміщення (5), підставляючи (33) та (34) і використовуючи сталі (27):

$$u_1\left(r,z\right)=\frac{\left(P_1-P_2\right)a_1^2a_2^2}{r\left(a_2^2-a_1^2\right)}\frac{1+\nu}{E}+r\left(A_4z+A_6\frac{1}{2}\right),$$

$$u_3\left(r,z\right)=\frac{1+\nu}{1-\nu}\left[\frac{P_2a_2^2-P_1a_1^2}{a_2^2-a_1^2}\frac{1-\nu}{E}z+A_4\frac{z^2}{2}+A_6\frac{z}{2}+C_3\right]-$$

$$-A_4\left(\frac{\nu}{1-\nu}z^2+\frac{r^2}{2}\right)-\frac{\nu}{1-\nu}zA_6+A_7. \tag{36}$$

За допомогою переміщень (36) можна задавати різні граничні умови на кінцях циліндра. В задачі Ламе цього не можна було зробити, тому що у ній знайдене рішення лише для вільних кінців циліндра. Знайдемо рішення задачі Ламе для труби з вільними від навантажень кінцями, вважаючи у переміщеннях (36) довільні сталі інтегрування рівними: A_4=0, A_7=0, C_3=0:

$$A_6=A_1=\frac{P_1a_1^2-P_2a_2^2}{a_2^2-a_1^2}2\frac{1-\nu}{E};$$

$$A_2=-A_3\frac{1+\nu}{1-\nu}=\frac{\left(P_1-P_2\right)a_1^2a_2^2}{a_2^2-a_2^2}\frac{1+\nu}{E}. \tag{37}$$

Отримаємо переміщення:

$$u_1=A_1\frac{r}{2}+A_2\frac{1}{2};\;\; u_3=-\frac{\nu}{1-\nu}zA_1, \tag{38}$$

які є відомим розв’язком задачі Ламе.

Таким чином, переміщення (36) дають можливість задовольнити різним умовам спирання на кінцях труби і у задачі Ламе.

Тепер з’ясуємо, чи виникає температурна зміна $\theta=T-T_0$ у задачі Ламе.

Для цього використовуємо рівняння (25), функції (33)–(35) та сталі (37):

$$\Psi_{,1}=0;\ \Psi_{,11}=0\,,$$

$$\Psi_{,33}=\frac{P_2a_2^2-P_1a_1^2}{a_2^2-a_1^2}\frac{1-\nu}{E}-\frac{P_2a_2^2-P_1a_1^2}{a_2^2-a_1^2}\frac{1-\nu}{E}=0\,.$$

Таким чином, у задачі Ламе, розв'язок якої задається переміщеннями (38) при P_1 =const і P_2= const, температурна зміна θ дорівнює нулю:

$$\theta=T-T_0=0;\ \mathrm{T}=\mathrm{T}_0,$$

тобто задача Ламе є ізотермічною задачею.

Температурна зміна $\theta(r,z)$ може з'являтися при певних навантаженнях і у задачі Ламе при відповідних умовах спирання на кінцях порожнистого циліндра. Розглянемо, наприклад, такий тип опирання циліндра:

$$u_3=0,\ \text{при}\ z=0;\ z=h. \tag{39}$$

З рівнянь (36) при z=0 знаходимо:

$$\frac{1+\nu}{1-\nu}C_3-A_4\frac{r^2}{2}+A_7=0\,,$$

звідки:

$$A_4=0;\quad A_7=-\frac{1+\nu}{1-\nu}C_3\,.$$

Завдяки довільності сталих інтегрування, вважаємо C_3 = 0 і A_7 = 0, оскільки ці сталі характеризують поступальне переміщення тіла. Враховуючи значення сталих A_4= A_7 = C_3 = 0, отримаємо для осьового переміщення u_3 з (36):

$$u_3(r,z)=\frac{1+\nu}{1-\nu}\left[\frac{P_2a_2^2-P_1a_1^2}{a_2^2-a_1^2}\frac{1-\nu}{E}+A_6\frac{1}{2}\right]z-\frac{\nu}{1-\nu}zA_6\,.$$

Враховуючи ці значення сталих інтегрування у переміщеннях (36) при $z=h$, маємо:

$$A_6=-2\frac{1+\nu}{E}\frac{P_2a_2^2-P_1a_1^2}{a_2^2-a_1^2}\,.$$

Далі знаходимо функції (33) і (35):

$$\Psi_{,33}=-\frac{2\nu}{E}\frac{P_{,}a_2^2-P_1a_1^2}{a_2^2-a_1^2}\,;\ \ \Psi_{,1}=0\,;\ \ \Psi_{,11}=0\,.$$

Підставляючи ці похідні у температурну змінену (25), отримаємо:

$$\theta(r,z) = -\frac{2\nu}{E}\frac{P_2 a_2^2 - P_1^2 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2}. \qquad (40)$$

Таким чином, за даними умовами опирання (39) температурна змінена у порожнистому циліндрі виражається через зовнішні навантаження і не дорівнює нулю. Знімаючи дію зовнішніх навантажень, знову повертаємося у початковий стан, тобто температурна змінена (40) зникає. Отже, маємо пружну й теплову оборотність. Залежно від знака виразу $P_2\ a_2^2\ - P_1\ a_1^2$ у (40), температурне змінення $\theta\ = T - T_0$ може бути позитивною або негативною. Величина $\theta(r,z)$, як бачимо з (40), дуже мала.

Далі розглянемо приклад, коли нормальний тиск на циліндр змінюється за лінійним законом. У цьому випадку граничні умови будуть такими:

$$\sigma_{11} = -P_1(z) = Mz + N \text{ при } r = a_1;$$

$$\sigma_{22} = -P_2(z) = Qz + R \text{ при } r = a_2, \qquad (41)$$

де M, N, Q, R – задані постійні величини, які можуть мати різний знак.

Зовнішній та внутрішній тиски на циліндр є лінійними функціями від z, тобто змінюються за лінійним законом вздовж його циліндричних поверхонь. З (41) маємо:

$$P_1(z) = -(Mz+N);\ \ P_2(z) = -(Qz+R). \qquad (42)$$

Звідси:

$$P_1(z) - P_2(z) = (Q-M)z+(R-N). \qquad (43)$$

Підставимо у рівняння (20) величину (43) і отримаємо

$$\varphi_{,33}(z) = -\left[(Q-M)z + (R-N)\right]\frac{1-\nu}{E\beta\left(a_2^2 - a_1^2\right)} + \frac{A_5 z - A_3}{a_2^2 a_1^2 \beta}. \qquad (44)$$

Інтегруючи (44) по z, маємо:

$$\varphi_{,3}(z) = -\left[(Q-M)\frac{z^2}{2} + (R-N)z\right]\frac{1-\nu}{E\beta\left(a_2^2 - a_1^2\right)} + \frac{A_5}{\beta a_2^2 a_1^2}\frac{z^2}{2} - \frac{A_3 z}{\beta a_2^2 a_1^2} + C_1. \qquad (45)$$

Знову інтегруючи (45), знаходимо:

$$\varphi(z) = -\left[(Q-M)\frac{z^3}{6} + (R-N)\frac{z^2}{2}\right]\frac{1-\nu}{E\beta\left(a_2^2 - a_1^2\right)} +$$

$$+\frac{A_5}{\beta a_2^2 a_1^2}\frac{z^3}{6} - \frac{A_3}{\beta a_2^2 a_1^2}\frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2. \qquad (46)$$

Використовуючи граничні умови (15), знаходимо значення довільних сталих:

$$C_1 = C_2 = 0; \quad \frac{A_5}{\beta a_2^2 a_1^2} = (Q - M)\,\frac{1-\nu}{E\beta\left(a_2^2 - a_1^2\right)}$$

$$-\frac{A_3}{\beta a_2^2 a_1^2} = \left(R - N\right)\frac{1-\nu}{E\beta\left(a_2^2 - a_1^2\right)}\,. \qquad (47)$$

Підставляючи величини (47) в функцію (46), отримаємо:

$$\varphi\left(z\right) = -\left[\left(Q - N\right)\frac{z^3}{6} + \left(R - N\right)\frac{z^2}{2}\right]\frac{1-\nu}{E\beta\left(a_2^2 - a_1^2\right)} +$$

$$+\left[\left(Q - N\right)\frac{z^3}{6} + \left(R - N\right)\frac{z^2}{2}\right]\frac{1-\nu}{E\beta\left(a_2^2 - a_1^2\right)} = 0\,, \qquad (48)$$

тобто $\varphi\left(z\right) = 0$; $\varphi_{,3}\left(z\right) = 0$; $\varphi_{,33}\left(z\right) = 0$.

При даному виді навантаження усі формули, отримані раніше для розв’язання задачі Ламе, залишаються справедливими, але замість P_1 = const і P_2 = const треба підставити зовнішнє навантаження (42), яке змінюється по довжині циліндра за лінійним законом.

Підставляючи значення сталих з (37) у (36), знаходимо для переміщень:

$$u_1\left(r, z\right) = \frac{P_1 a_1^2 - P_2 a_2^2}{a_2^2 - a_1^2}\frac{1-\nu}{E}r + \frac{\left(P_1 - P_2\right)a_1^2 a_2^2}{a_2^2 - a_1^2}\frac{1+\nu}{E}\frac{1}{r}\,;$$

$$u_3\left(r, z\right) = \frac{P_2 a_2^2 - P_1 a_1^2}{a_2^2 - a_1^2}\frac{2\left(1 + 2\nu\right)}{E}z\,, \qquad (49)$$

де $P_1(z) = -(Mz+N)$; $P_2(z) = -(Qz+R)$.

І у розглянутій задачі температурна змінена $\theta(r, z)$ дорівнює нулю.

Таким чином, відомий розв’язок Ламе є окремим випадком розглянутої у статті більш загальної задачі при навантаженні циліндра за довільним законом та при дотриманні різних умов опирання на його кінцях.

Для підтвердження вищевикладеного розглянемо розв’язок узагальненої задачі теорії пружності для порожнистого циліндра, навантаженого осесиметричним тиском за будь-яким законом на його зовнішній та внутрішній циліндричних поверхнях.

Розглянемо такі нелінійні закони розподілу навантажень:

$$\sigma_{11} = -P_1(z) = D_1 z \quad \text{при } r = a_1;$$

$$\sigma_{22} = -P_2(z) = D_2 z \quad \text{при } r = a_2, \qquad (50)$$

де D_1 та D_2 – задані постійні величини.

Тоді:

$$P_1(z) - P_2(z) = -(D_1 z - D_2 z). \quad (51)$$

Для зручності подальшого розв’язку введемо в рівняння для визначення функції $\varphi(z)$ (20) такі позначення:

$$\beta_2 = \frac{A_5}{a_2^2 a_1^2 \beta}; \ \ \beta_3 = \frac{A_3}{a_2^2 a_1^2 \beta}; \ \ \beta_1 = \frac{1-\nu}{E\beta(a_2^2 - a_1^2)}. \quad (52)$$

Підставляючи (52) в рівняння (20), з урахуванням (1), отримаємо:

$$-\varphi_{,33} = \left(D_1 z^3 - D_2 z^2\right)\beta_1 + \beta_2 z + \beta_3. \quad (53)$$

Інтегруючи (22) двічи по z, отримаємо для (z):

$$-\varphi(z) = \left(D_1 \frac{z^5}{20} - D_2 \frac{z^4}{12}\right)\beta_1 + \beta_2 \frac{z^3}{6} + \beta_3 \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2. \quad (54)$$

Задовольняючи граничним умовам (15) та (17) на кінцях циліндра, знаходимо сталі β_2 і β_3:

$$\beta_2 = \left(D_2 h - D_1 \frac{9h^2}{10}\right)\beta_1, \ \ \beta_3 = \left(D_1 \frac{h^3}{5} - D_2 \frac{h^2}{6}\right)\beta_1. \quad (55)$$

Підставляючи їх у функцію (54), отримаємо:

$$-\varphi_{(z)} = \left(D_1 \frac{z^5}{20} - D_2 \frac{z^4}{12}\right)\beta_1 + \left(D_2 h - D_1 \frac{9h^2}{10}\right)\beta_1 \frac{z^3}{6} + \left(D_1 \frac{h^3}{5} - D_2 \frac{h^2}{6}\right)\beta_1 \frac{z^2}{2}. \quad (56)$$

З (56) знаходимо похідні $\varphi_{,3}$ і $\varphi_{,33}$:

$$-\varphi_{,3} = \left(D_1 \frac{z^4}{4} - D_2 \frac{z^3}{3}\right)\beta_1 + \left(D_2 h - D_1 \frac{9h^2}{10}\right)\beta_1 \frac{z^2}{2} + \left(D_1 \frac{h^3}{5} - D_2 \frac{h^2}{6}\right)\beta_1 z;$$

$$-\varphi_{,33} = \left(D_1 z^3 - D_2 z^2\right)\beta_1 + \left(D_2 h - D_1 \frac{9h^2}{10}\right)\beta_1 z + \left(D_1 \frac{h^3}{5} - D_2 \frac{h^2}{6}\right)\beta_1. \quad (57)$$

З позначень (52) маємо з урахуванням (55):

$$A_3 = -\left(D_1 \frac{h^3}{5} - D_2 \frac{h^2}{6}\right)\beta_1 a_2^2 a_1^2 \beta, \ \ A_5 = \left(D_2 h - D_1 \frac{9h^2}{10}\right)\beta_1 a_2^2 a_1^2 \beta. \quad (58)$$

де $\beta_1 = \dfrac{1-\nu}{E\beta(a_2^2 - a_1^2)}$.

Напруги отримаємо з формул (14), (16), (22) і (23):

$$\sigma_{13} = \frac{E}{1-\nu}\varphi_{,3}(z)\frac{1}{r}\left(r^2 - a_1^2\right)\left(r^2 - a_2^2\right);$$

$$\sigma_{11} = -P_1(z) + \frac{E}{1-\nu}\left\{-\varphi(z)\frac{1}{r^2}\left(r^2 - a_1^2\right)\left(r^2 - a_2^2\right) - \right.$$

$$-\varphi_{,33}(z)\int_{a_1}^{r}\frac{1}{r}\left(r^2-a_1^2\right)\left(r^2-a_2^2\right)dr+\frac{A_5z-A_3}{a_1^2}\left(1-\frac{a_1^2}{r^2}\right)\Bigg\},$$

$$\sigma_{22}=-P_1(z)+\frac{E}{1-\nu}\left\{-\varphi(z)\left[3r^2-\left(a_1^2+a_2^2\right)-\frac{a_1^2a_2^2}{r^2}\right]-\right.$$

$$\left.-\varphi_{,33}(z)\int_{a_1}^{r}\frac{1}{r}\left(r^2-a_1^2\right)\left(r^2-a_2^2\right)dr+\frac{A_5z-A_3}{a_1^2}\left(1+\frac{a_1^2}{r^2}\right)\right\}. \quad (59)$$

У формулах (59): $P_1 = -D_1z$, $P_2 = -D_2z$; $\varphi(z)$ та її похідні визначені у (56) і (57); A_5 та A_3 знаходимо з (58).

Функцію переміщень $\psi(r,z)$ знаходимо з (18), при цьому для функції $f(z)$ з (24) маємо:

$$f(z)=-\frac{1-\nu}{E}D_1\frac{z^5}{20}-\frac{1}{a_1^2}\left(A_5\frac{z^3}{6}-A_3\frac{z^2}{2}\right)+A_4\frac{z^3}{6}+A_6\frac{z^2}{4}+C_3z+C_4. \quad (60)$$

Температурна змінена $\theta = T - T_0$ в циліндрі від дії зовнішніх навантажень визначаємо з (25), в яке потрібно підставити похідні від функції (18):

$$\psi_{,1}=\phi(z)\frac{1}{r}\left(r^2-a_1^2\right)\left(r^2-a_2^2\right);\ \psi_{,11}=\varphi(z)\left[3r^2-\left(a_1^2+a_2^2\right)-\frac{a_1^2a_2^2}{r^2}\right];$$

$$\psi_{,33}=\varphi_{,33}(z)\int_{a_1}^{r}\frac{1}{r}\left(r^2-a_1^2\right)\left(r^2-a_2^2\right)dr+f_{,33}(z), \quad (61)$$

де маємо з (60):

$$f_{,33}=-\frac{1-\nu}{E}D_1z^3-\frac{1}{a_1^2}\left(A_5z-A_3\right)+A_4z+\frac{1}{2}A_6.$$

У цьому разі температурна змінена $\theta(r,z)$ відмінна від нуля і має досить складний вигляд. Радіальне і осьове переміщення визначаються з формул (5), які дозволяють задовольнити різним умова опирання на кінцях циліндра завдяки довільності постійних сталих інтегрування A_4; A_6; A_7 і C_3.

Висновки

Таким чином, у пропонованій статті розглянуто узагальнення задачі Ламе на зовнішнє навантаження будь-якого закону і можливість задовольнити різним умовам опирання на кінцях товстої циліндричної оболонки, яка навантажена осесиметрично.

Отримані рішення свідчать про те, що дія зовнішніх зусиль приводить до появи температурної змінени у циліндрі, яка залежить від виду навантаження і граничних умов на його кінцях.

У випадку постійного або лінійного навантаження вздовж циліндричних поверхонь тіла обертання температурна змінена відсутня. Отже, не завжди зовнішнє навантаження спричиняє появу температурної змінени.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в трех томах. Том2. Под ред.. И.А. Биргера, Я.Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968. – 463 с.
2. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
3. *Жермен П.* Курс механики сплошных сред. – М.: Высшая школа, 1983. – 399 с.
4. *Фен Дж.* Машины, энергия, энтропия. – М.: Мир, 1986. – 336 с.
5. *Ландау Л.Д. и Лившиц Е. М.* Теория упругости. – М.: Наука. 1987. – Т. VII. –246 с.

Стаття надійшла до редакції 20.10.2011 р.

Гревцев А.К.

РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ НАГРУЖЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫМ ПО ДЛИНЕ ДАВЛЕНИЕМ

Получено точное решение в перемещениях уравнений теории упругости для тел вращения при осесимметричной нагрузке.
Решены задачи для полых цилиндров, которые находятся под воздействием нормально прилагаемых сил, согласно любого закона, на его внутренней и внешней поверхностях. Края цилиндрической толстой оболочки, полого цилиндра могут быть закреплены по-разному.
Разработанная теория решения задач из области теории упругости в перемещениях дает возможность обнаружить условия, при которых появляются температурные изменения в телах вращения под действием внешних нагрузок.

Grevtsev O.K.

SOLUTION OF AXIALLY SYMMETRICAL TASK OF ELASTICITY THEORY FOR THICK-WALLED CYLINDERS LOADED LENGTHWISE BY FLUCTUATING STRESS

The exact solution in the shifts of equations of elasticity theory for axially symmetrical rotary bodies under symmetric loading is obtained. (At the symmetrical axis to a loading).
Problems for hollow cylinders, which are under the influence of normally, applied forces on its interior and exterior surfaces, according to any law, are resolved. The edges of a cylindrical thick shell of the hollow cylinder can be fixed differently.
The developed theory of tasks solution related to the elasticity theory in the shifts gives the opportunity to find out the conditions under which thermal changes in axially symmetrical rotary bodies under the influence of exterior loadings appear.