

УДК 539.3

**Є.О.Гоцуляк**, д-р техн. наук  
**А.В. Пікуль**

## РЕАЛІЗАЦІЯ ПРОСТОРОВОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА В КРИВОЛІНІЙНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

Розроблено методику розрахунку нетонких пластин та оболонок на основі просторових скінчених елементів у криволінійній системі координат. За цією методикою створено алгоритм та написано програму для розрахунку на мові фортран. На прикладі товстостінного циліндра (задача Ламе) продемонстровано збіжність методу скінчених елементів за метричним критерієм порівняно з точним розрахунком в переміщеннях.

Розглянемо об'ємний криволінійний скінченний елемент оболонки. В центрі скінченного елемента розміщуємо криволінійну систему координат  $x^1, x^2, x^3$  (рис. 1)

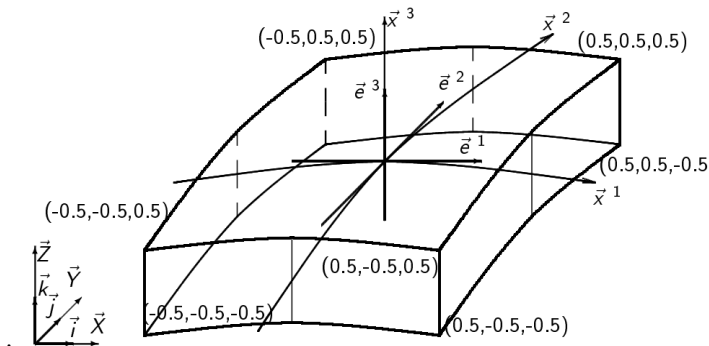


Рис. 1

Таким чином контури СЕ знаходяться в межах від  $x^i = -0.5$  до  $x^i = 0.5$ . Отже розміри сторін визначаються коефіцієнтами першої квадратичної форми поверхні  $\sqrt{g_{ii}}$ , де  $g_{ij} = \vec{e}_i \vec{e}_j$  ( $i, j = \alpha, \beta, \gamma$ ), а об'єм відповідає визначнику метричного тензора  $\sqrt{G}$ :

$$G = \det \|\vec{g}_{ij}\| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}.$$

Серединна поверхня в декартовій системі координат  $XYZ$  описується функціями  $X = X(x^1, x^2, x^3), Y = Y(x^1, x^2, x^3), Z = Z(x^1, x^2, x^3)$ .

Вектори, що описуються залежностями

$$\bar{e}_\alpha = \frac{\partial X}{\partial x^\alpha} \bar{i} + \frac{\partial Y}{\partial x^\alpha} \bar{j} + \frac{\partial Z}{\partial x^\alpha} \bar{k}, \quad \alpha = 1, 2,$$

дотичні до координатних ліній  $x^1, x^2, x^3$  і співпадають з напрямком зростання відповідних координат. Вектор  $\bar{e}_3$  співпадає з ортом нормалі до серединної поверхні

$$\bar{e}_3 = \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}{|\bar{e}_1 \times \bar{e}_2|} = \frac{\bar{e}_1 \times \bar{e}_2}{\sqrt{g}}.$$

Ці вектори являють собою основний локальний базис точок серединної поверхні скінченного елемента оболонки.

Вектори взаємного базису пов'язані з векторами основного базису співвідношеннями

$$\bar{e}^{-1} = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{|\bar{e}_2 \times \bar{e}_3|} = \frac{\bar{e}_2 \times \bar{e}_3}{\sqrt{g}}, \quad \bar{e}^{-2} = \frac{\bar{e}_3 \times \bar{e}_1}{|\bar{e}_3 \times \bar{e}_1|} = \frac{\bar{e}_3 \times \bar{e}_1}{\sqrt{g}},$$

де

$$g = \det \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix}.$$

Переміщення точок елемента оболонки описуються вектор-функцією координат серединної поверхні  $\bar{u} = \bar{u}(x^1, x^2, x^3)$ .

Коваріантні компоненти тензора деформацій визначаються диференціальними залежностями

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \bar{U}}{\partial x^\alpha} \bar{e}_\beta + \frac{\partial \bar{U}}{\partial x^\beta} \bar{e}_\alpha \right).$$

Для однорідного ізотропного матеріалу закон Гука матиме такий вигляд

$$\sigma^{\alpha\beta} = \frac{E}{1-\nu^2} \left[ \nu g^{\alpha\beta} g^{\gamma\omega} + (1-\nu) g^{\alpha\gamma} g^{\beta\omega} \right] \varepsilon_{\gamma\omega},$$

де  $E$  — модуль пружності матеріалу,  $\sigma^{\alpha\beta}$  — коваріантна компонента тензора напружень.

Потенціальну енергію деформації запишемо у вигляді

$$Y = \frac{1}{2} \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} \sigma^{\alpha\beta} \varepsilon_{\alpha\beta} \sqrt{G} dx^1 dx^2 dx^3.$$

Вектор-функцію переміщень апроксимуємо рядом Маклорена

$$\bar{U}(x^1, x^2, x^3) = \bar{U}^0 + \frac{\partial \bar{U}^0}{1! \partial x^\alpha} x^\alpha + \frac{\partial^2 \bar{U}^0}{2! \partial x^\alpha \partial x^\beta} x^\alpha x^\beta + \frac{\partial^3 \bar{U}^0}{3! \partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma} x^\alpha x^\beta x^\gamma + \dots$$

Отримуємо залежності для деформацій

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( U_{\alpha\beta}^0 + U_{\beta\alpha}^0 U_{\alpha\beta\gamma}^0 x^\gamma + U_{\beta\alpha\omega}^0 x^\omega + \frac{1}{2!} U_{\alpha\beta\gamma\omega}^0 x^\gamma x^\omega \right),$$

або в матричному вигляді

$$\{\varepsilon\} = [D_\varepsilon]\{\varphi\},$$

де  $[D_\varepsilon]$  - матриця коефіцієнтів, що пов'язують деформації з набором коефіцієнтів апроксимуючого ряду переміщень  $\{\varphi\}$ :

$$\{U\} = \{U_1^0, U_2^0, U_1^0, U_3^0, U_{11}^0, U_{21}^0, U_{31}^0, U_{12}^0, U_{22}^0, U_{32}^0, U_{13}^0, U_{23}^0, U_{33}^0, U_{112}^0, U_{212}^0, U_{312}^0, U_{113}^0, U_{213}^0, U_{313}^0, U_{123}^0, U_{223}^0, U_{323}^0, U_{1123}^0, U_{2123}^0, U_{3123}^0\}^T.$$

Вектор вузлових переміщень:

$$\{U\} = \{U_1^{---}, U_2^{---}, U_3^{---}, U_1^{+--}, U_2^{+--}, U_3^{+--}, U_1^{+-+}, U_2^{+-+}, U_3^{+-+}, U_1^{++-}, U_2^{++-}, U_3^{++-}, U_1^{+-+}, U_2^{+-+}, U_3^{+-+}, U_1^{++-}, U_2^{++-}, U_3^{++-}\}^T,$$

де символами «+» і «-» позначені величини +0,5 і -0,5 координат  $x^1, x^2, x^3$ .

Пряма та зворотня залежності вектора вузлових переміщень і вектора коефіцієнтів апроксимуючого ряду визначаються матрицею  $[P]$ :

$$\{U\} = [P]\{\varphi\},$$

$$\{\varphi\} = [P]^{-1}\{U\} = [S]\{U\}.$$

Де компоненти матриці  $[P]$  визначаються з наступних співвідношень

$$U_j^{\alpha\beta\gamma} = U_i \cdot a_{j\alpha\beta\gamma}^i + U_{i\alpha} \cdot a_{j\alpha\beta\gamma}^i \cdot \alpha + \frac{1}{2!} U_{i\alpha\beta} \cdot a_{j\alpha\beta\gamma}^i \cdot \alpha\beta + \dots$$

$$a_{j\alpha\beta\gamma}^i = \bar{e}^i(0,0,0) \cdot \bar{e}_j(\alpha, \beta, \gamma).$$

Потенціальну енергію елемента через вузлові переміщення визначається функціоналом

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} \{U\}^T [S]^T [D_\varepsilon]^T [A] [D_\varepsilon] [S] \{U\} \sqrt{G} dx^1 dx^2 dx^3 - \{U\}^T [F] - \{U\}^T [R],$$

де  $[A]$  - матриця пружних сталей матеріалу,  $[F]$  - вектор вузлових навантажень,  $[R]$  - вектор реакцій.

З умови стаціонарності функціоналу повної потенціальної енергії скінченного елемента

$$\delta\Pi = [K]\{U\} - [F] - [R] = 0,$$

визначаємо вектор реакцій

$$[R] = [K]\{U\} - [F],$$

де  $[K]$  - матриця жорсткості, котра має наступний вигляд

$$[K] = \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} \int_{-0.5}^{0.5} [S]^T [D_\varepsilon]^T [A] [D_\varepsilon] [S] \sqrt{G} dx^1 dx^2 dx^3.$$

**Оцінка методики.** МСЕ використовує принцип можливих переміщень  $a(u, v) + l(v) = 0$ , де дійсне переміщення  $u$  та довільне можливе переміщення  $v$  визначені на області  $\Omega$  і належать енергетичному простору  $V$ .

Позначимо  $dr$  крок розбивки скінченного елемента,  $d = \max(dr)$ .

МСЕ буде збіжним при умові справедливості рівності:

$$\lim_{d \rightarrow 0} \|U - U_d\|_0 \rightarrow 0,$$

де  $U$  – точний розв’язок,  $U_d$  – розв’язок, отриманий МСЕ.

Оцінка похибки за метричним критерієм  $\|U - U_d\|_0 \leq kh^2 \|U\|_2$ .

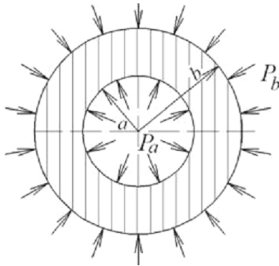


Рис. 2

Дослідження збіжності виконуємо на прикладі задачі Ламе, для котрої існує точний розв’язок в переміщеннях.

Товстостінний циліндр знаходиться під дією внутрішнього  $p_a$  та зовнішнього  $p_b$  тиску (рис. 2).

$$p_b = 100 \text{ кПа}, \quad p_a = 500 \text{ кПа}, \quad E = 2 \cdot 10^8 \text{ кПа}, \\ G = 8 \cdot 10^7 \text{ кПа}, \quad \nu = 0.25, \quad x = \frac{r}{b}, \quad x_1 = \frac{a}{b}.$$

Точний розв’язок у переміщеннях описується формулою:

$$U = \frac{b}{2G(1-x_1^2)} [(1-2\nu)(p_a x_1^2 - p_b)x + (p_a - p_b) \frac{x_1^2}{x}].$$

Розбиваємо циліндр на скінченні елементи – в 1 та 2 шари по товщині, і на  $m=6, 12$  та  $24$  сегмента по колу:

1)  $R=0.1 \text{ м}, h=0.01 \text{ м}$ :

$M$	$U^+$	$U$	$U_d^+$	$U_d$	$\Delta, \%$	
Один елемент по товщині ( $U, 10^{-7} \text{ м}$ )						
6	1,5674	1,6858	1,7451	1,7894	11,34	6,14
12			1,6408	1,6816	4,68	0,25
24			1,6135	1,6536	2,94	1,91
Два елемента по товщині ( $U, 10^{-7} \text{ м}$ )						
6	1,5674	1,6858	1,7324	1,7761	10,53	5,35
12			1,6377	1,6913	4,48	0,32
24			1,6272	1,6815	3,81	0,25

2)  $R=0.1$  м,  $h=0.02$  м:

$m$	$U^+$	$U$	$U_d^+$	$U_d^-$	$\Delta, \%$	
Один элемент по товщині ( $U, 10^{-7}$ м)						
6	6,3541	7,0833	6,7926	7,5036	6,9	5,93
12			6,5544	7,2713	3,15	2,65
24			6,4501	7,1544	1,51	1,01
Два элемента по товщині ( $U, 10^{-7}$ м)						
6	6,3541	7,0833	6,5904	7,4636	3,72	5,37
12			6,4865	7,0872	2,08	0,06
24			6,3794	6,9815	0,39	1,43

Отже, на прикладі даної задачі можна зробити висновок – при зменшенні розмірів скінченно-елементної сітки, похибка зменшується, а значить зростає збіжність методу за метричним критерієм збіжності.

### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Блох В.И. Теория упругости — Х.: Изд-во Харьковск. Гос. ун-та, 1964 — 438 с.
2. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. — М.: Высшая школа. 1966 — 256 с.
3. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 428 с.
4. Городецкий А.С., Евзеров И.Д. Компьютерные модели конструкций. — К.: Факт, 2007. — 394 с.
5. Джонсон, Маклей. Сходимость метода конечных элементов в теории упругости. — Прикладная механика, Сер Е, 1968, №2, с. 68-72.
6. Костіна О.В. Реалізація криволінійних скінченноелементних моделей на основі векторної апроксимації функції форми в задачах теорії оболонок: дисертація канд. техн. наук: 05.23.17 — Київський національний ун-т будівництва і архітектури. - К., 2003.
7. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости. — М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1959 — 364 с.
8. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. — М.: Высшая школа, 1983 — 396 с.

*Стаття надійшла до редакції 14.03.2011 р.*

*Гоцуляк Е.А., Пикуль А.В.*

**РЕАЛИЗАЦИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА В КРИВОЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ**

Разработано методику расчета нетонких пластин и оболочек на основе пространственных конечных элементов в криволинейной системе координат. Согласно этой методике создано алгоритм и написано программу для вычислений на языке фортран. На примере толстостенного цилиндра (задача Ламе) продемонстрировано сходимость метода конечных элементов по метрическому критерию сравнительно с точным расчетом в перемещениях.

*Gotsuliak E.O., Pikul A.V.*

**THE SOLID FINITE ELEMENT REALIZATION IN CURVILINEAR COORDINATE SYSTEM**

The method of non-thin plates and shells calculation was elaborated on the basis of solid finite elements in curvilinear coordinate system. There was an algorithm and a FORTRAN programme for calculations created according to this method. The example of the thick-walled cylinder (the Lamé problem) was used to demonstrate the metric criterion convergence of the solid finite elements method in comparison with the exact calculation in motion.