

УДК 539.4

С.В. Кобельський, канд. техн. наук

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ ПРОСТОРОВИХ ЗАДАЧ ТЕОРІЇ ТРІЩИН НА ОСНОВІ ЗМІШАНОЇ СХЕМИ МЕТОДА СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Для розв'язання просторових задач теорії тріщин запропоновані комбіновані скінченні елементи змішаного типу в формі шестигранних призм та тетраедрів. Розроблені схеми та обчислювальні алгоритми, що їх реалізують, забезпечують виконання поправки Ірвіна на пластичність та узгоджуються з розв'язком Райса для розподілу напружень в околі вершини тріщини.

Розв'язування прикладних задач теорії тріщин вимагає більш точного визначення таких параметрів руйнування як розкриття, напруження та коефіцієнти інтенсивності напружень (КІН) вздовж фронту тріщини. При розв'язанні просторових задач механіки руйнування в пружно-пластичній постановці традиційне формулювання методу скінчених елементів (МСЕ) у формі методу переміщень не забезпечує отримання достатньо точного та стійкого розподілу напружень та деформацій в околі фронту тріщини. У зв'язку з цим виникає необхідність у розробці спеціальних схем МСЕ та пов'язаних з ними обчислювальних процедур, які дозволяють покращити точність розв'язання в локальній області фронту тріщини [1-6].

У даній публікації для розв'язання тривимірних задач теорії тріщин застосовується змішана проекційно-сіткова схема МСЕ, основні положення якої сформульовані в монографії [6]. Головна перевага застосованої схеми МСЕ, у порівнянні з класичним підходом МСЕ у формі методу переміщень, полягає у можливості забезпечити неперервність апроксимації не тільки для переміщень, але й для напружень та деформацій, а також можливості точного дотримання статичних граничних умов на поверхні тіла.

Застосування та результати чисельного аналізу збіжності та точності змішаної схеми МСЕ до розв'язання двовимірних задач теорії тріщин містяться в [7].

У роботах [8,9] побудовані просторові скінчені елементи змішаного типу у формі шестигранної призми з полілінійним поповненням переміщень та апроксимацією напружень та деформацій за допомогою інтерполяційних функцій, визначених відносно вершин і центру призми. Також, у роботі використовується змішаний скінчений елемент у формі

тетраедра з апроксимацією напружень та деформацій, побудованих за допомогою інтерполяційних функцій, визначених відносно його вершин і центру.

Прийнято, що восьмивузловий скінчений елемент (елемент типу «кубик») розбивають на 24 тетраедри (рис. 1). За умови сумісного використання скінчених елементів різного типу, на границю контакту двох скінчених елементів, розділеного та не розділеного на тетраедри, виходять з однієї сторони 5, а з іншої - 4 вузли. Для задоволення властивості неперервності полів переміщень, переміщення у вузлі в центрі грані виражаються через переміщення вузлів в її вершинах.

Результати чисельного аналізу розв'язання тестових і практичних задач, отриманих при сумісному використанні скінчених елементів різного типу, свідчать про те, що розбиття на тетраедри трьох шарів призм в околі точки на фронті тріщини достатньо для отримання розв'язання задач у пружно-пластичній постановці, які не суперечать теоретичним положенням дрібномасштабної пластичної течії - поправці Ірвіна на пластичність [10] та розв'язку Райса [11] для розподілу напружень в околі вершини тріщини. Такий підхід дозволяє суттєво зменшити розмірність дискретної задачі та об'єм інформації, яка опрацьовується.

Для розв'язання задач теорії тріщин у тривимірній постановці в пакеті SPACE [12] розроблені спеціальні програмні методи побудови сітки скінчених елементів в околі фронту тріщини. Сітка складається з трьох зон – ядра, перехідної зони та зони розрідження (рис. 2).

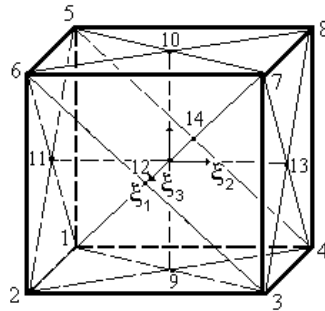


Рис. 1. Схема розбиття восьмивузлового елемента на тетраедри

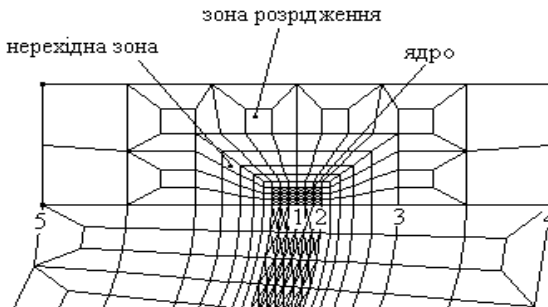


Рис. 2. Спеціальна сітка з регулярним ядром

Точка 1 лежить на фронті тріщини. Ядро розбивається сіткою, регулярно в площині, яка перпендикулярна до фронту тріщини. Його розмір (відстань між точками 1 і 2) вибирають незначним у порівнянні з розміром перехідної зони (відстань між точками 2 і 3). Сітка, яку будують у перехідній зоні, забезпечує плавний перехід від густої сітки в ядрі до грубої в зоні розрідження.

Для обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень використані два підходи – метод еквівалентного об'ємного інтегрування [13] та метод, який ґрунтується на концепції G -інтегралу закриття тріщини у дискретних моделях МСЕ [14]:

$$K_I = \sqrt{\frac{EG}{1-\nu^2}}, \quad (1)$$

де

$$G = \frac{1}{\Delta a} \int_0^{\Delta a} \sigma(s) \delta(s) ds, \quad (2)$$

робота сил зчеплення, які діють перед фронтом тріщини та перешкоджають розсуванню верхнього та нижнього берегів тріщини на ділянці $[0, \Delta a]$ при її просуванні на величину Δa ; $\sigma(s)$ – напруження, яке діє по нормалі до площини тріщини; $\delta(s)$ – розкриття берегів тріщини; s – вісь, спрямована по нормалі до фронту тріщини у площині тріщини.

При

$$\Delta a \rightarrow 0, \quad G = \frac{1}{2} \sigma \Delta. \quad (3)$$

Тут Δ – розкриття, яке обчислюють як абсолютну величину різниці переміщень в напрямку нормалі до площини тріщини вузлів сітки, які найближчі до вузла на фронті, та розташовані на двох поверхнях тріщини.

Розглядали три варіанти вибору напруження σ в (3).

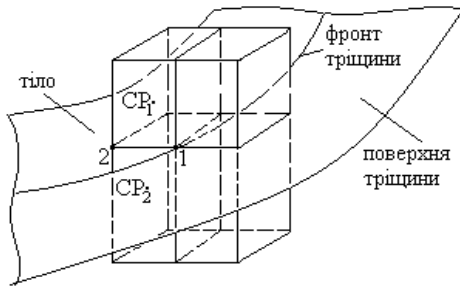
У першому за σ приймали напруження, яке обчислене у вузлі, розміщеному в тілі на нескінченно малій відстані від фронту тріщини (варіант 1P).

У другому за σ приймали осереднене напруження, яке обчислене в центрах усіх n елементів, які оточують точку на фронті тріщини та розміщені в тілі (варіант CP, рис. 3):

$$\sigma = (\sigma_{CP1} + \dots + \sigma_{CPn}) / n. \quad (4)$$

У третьому за σ приймали напруження, яке обчислене у вузлі, розміщеному в тілі на безкінечно малій відстані від фронту тріщини, та у вузлі, що стоїть за ним (варіант 2P, рис. 3, вузли 1 і 2)

$$\sigma = \frac{2}{3} \sigma_1 + \frac{1}{3} \sigma_2. \quad (5)$$

Рис. 3. До варіантів визначення напруження σ

Нижче наведені результати розв'язання трьох модельних задач, які мають в пружній постановці відомий аналітичний або чисельний розв'язок. Під час розв'язання цих задач у пружно-пластичній постановці перевіряли узгодження результатів з поправкою Ірвіна на пластичність та відповідність розподілу напруження σ в околі точки фронту тріщини розв'язку, який отримав Райс із співробітниками.

Задача 1. Еліптична щілина у нескінченному тілі, яке однорідно розтягується в напрямку осі z (рис. 4).

Розглядався еліптичний циліндр радіусу $R=40$ м; половиною висоти $H=40$ м; з еліптичною тріщиною $a/c=2$; $c_0=0.0125$ м; $c=2c_0$; величина кроку сітки в ядрі $S=1,10,100,1000s$; $s=8,333$ мкм. На верхньому торці циліндру прикладене навантаження розтягнення $q=100$ МПа. Модуль пружності $E=2 \cdot 10^5$ МПа. Коефіцієнт Пуассона $\nu=0.3$. Матеріал ідеальний пружно-пластичний, границя текучості $\sigma_T=400$ МПа.

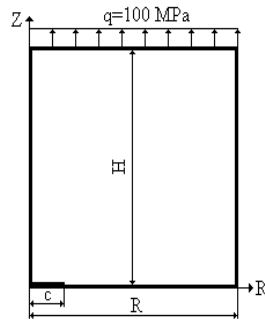


Рис. 4. До задачі про еліптичну щілину в нескінченному тілі

На рис. 5 наведені графіки обчислення параметрів механіки руйнування (напруження σ , розкриття та КІН) при використанні лише елементів типу «кубик» («К»), тільки тетраедрів («Т») та елементів типу «кубик» разом з тетраедрами («К+Т») в пружно-пластичній постановці.

Зменшення кроку сітки досягається шляхом зменшення у відповідне число разів розміру ядра відносно розміру перехідної зони (рис. 1).

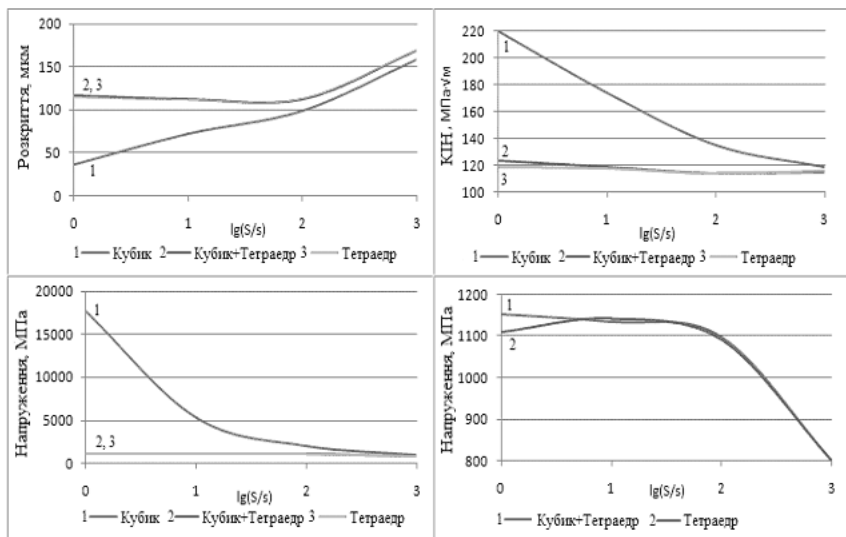


Рис. 5. Графіки обчислення параметрів руйнування в задачі про еліптичну щілину в нескінченному тілі

Як видно з графіків (рис. 5), елементи типу «кубик» дозволяють отримати прийнятні результати тільки при дуже великих кроках сітки, зі зменшенням кроку напруження σ стрімко зростають, тоді як тетраедри забезпечують отримання стійких розв'язків при всіх кроках сітки. Аналогічні стійкі результати було отримано і при використанні елементів типу «кубик» сумісно з тетраедрами. Крім того, результати, отримані з використанням тетраедрів та комбінованих елементів, узгоджуються з розв'язком Райса для напружень в околі вершини тріщини при плоскій деформації для ідеально пластичного матеріалу.

В табл. 1 зіставлені результати визначення КІН різними способами в пружній та пружно-пластичній постановках при різних величинах кроку сітки.

З даних таблиці видно, що при розв'язанні задачі в пружній постановці найбільш точні результати було отримано за допомогою методу ЕОІ та G -інтегралу в формулюванні за варіантом 3. Результати, отримані з використанням методу ЕОІ та G -інтегралу в формулюванні за варіантом 1 в пружно-пластичній задачі, не забезпечують виконання поправки Ірвіна на пластичність, тоді як G -інтеграл в формулюванні за варіантами 2 та 3 забезпечує її виконання при всіх кроках сітки. Треба також відмітити, що при розв'язанні задачі в пружно-пластичній

постановці використання G -інтегралу приводить до достатньо близьких результатів для всіх розглянутих варіантів вибору напруження σ .

Таблиця 1

Внутрішня кільцева тріщина в суцільному циліндрі при розтягненні

Крок	CE	Задача	EOI	G-інтеграл (2P)	G-інтеграл (CP)	G-інтеграл (1P)
$S = 1000s$	К	пруж	115,103	117,912	102,395	131,232
		пласт	115,510	118,774	108,066	130,579
	Т	пруж	116,447	112,3540	109,2197	121,143
		пласт	117,496	115,6890	114,075	122,335
	К+Т	пруж	115,354	111,291	108,194	119,970
		пласт	117,143	115,262	113,656	121,885
$S = 100s$	К	пруж	114,652	117,820	102,018	131,330
		пласт	110,923	135,396	100,122	149,402
	Т	пруж	115,600	114,014	108,526	123,491
		пласт	111,149	114,371	112,770	116,642
	К+Т	пруж	114,520	112,888	107,463	122,246
		пласт	111,500	114,383	112,870	116,740
$S = 10s$	К	пруж	114,573	117,778	101,942	131,304
		пласт	108,186	173,833	62,676	203,133
	Т	пруж	115,474	114,006	108,471	123,505
		пласт	113,297	118,2578	118,4835	118,584
	К+Т	пруж	114,365	112,846	107,376	122,222
		пласт	112,771	118,666	119,167	118,648
$S = 1s$	К	пруж	114,525	117,742	101,899	131,268
		пласт	114,027	219,638	-	266,719
	Т	пруж	115,446	113,996	108,461	123,496
		пласт	114,998	119,467	120,919	118,536
	К+Т	пруж	114,303	112,802	107,334	122,177
		пласт	114,427	122,563	122,966	121,990
КІН (пружність) = 112,83791671 [15]						

На рис. 6 наведені графіки змінення КІН вздовж фронту внутрішньої еліптичної тріщини при різних співвідношеннях півосей (1:1, 3:1, 5:1, 10:1), що отримані в пружній та пружно-пластичній постановках. Розв'язок в пружній постановці зіставлявся з аналітичним, наведеним в [15]. КІН обчислювався з використанням концепції G -інтегралу закриття тріщини з вибором напруження σ за варіантом 3.

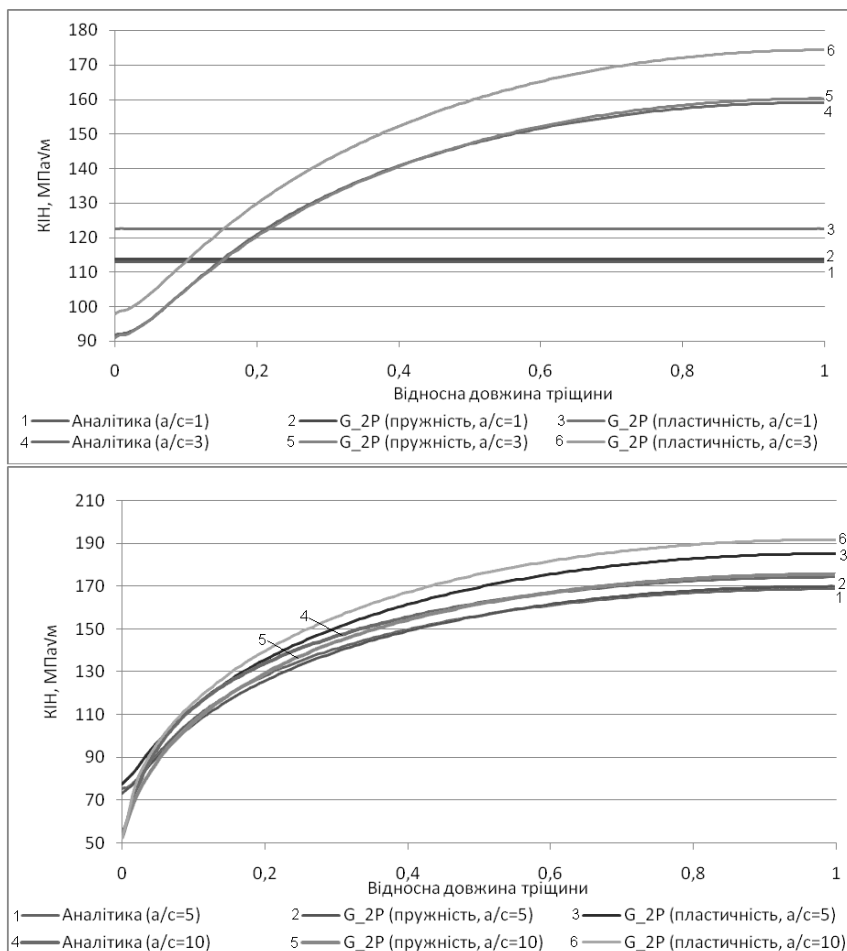


Рис. 6. Графіки обчислення K_{IH} в задачі про еліптичну щілину в нескінченному тілі

Аналіз результатів свідчить про добре збігання результатів розв'язку в пружній постановці з аналітичним розв'язком (похибка при співвідношеннях півосей 1:1, 3:1, 5:1 склала менше 1% по всій довжині тріщини, для випадку 10:1 максимальна похибка склала 6%). При розв'язанні задач в пружно-пластичній постановці поправка Ірвіна виконується для всіх точок фронту тріщини при всіх співвідношеннях півосей еліпсу.

Задача 2. Розтягнення полого циліндру з зовнішнім діаметром $D_1 = 2.2$ м; внутрішнім діаметром $D_2 = 2$ м; висотою $2H=2$ м з симетрично розташованою внутрішньою (зовнішньою) крайовою кільцевою тріщиною глибиною $a/t=0.1, 0.3, 0.5, 0.7$; $t=R_1-R_2$ (рис. 7).

На торцях циліндру прикладене рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю $q = 100$ МПа. Модуль пружності $E=2 \cdot 10^5$ МПа. Коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$. Матеріал ідеальний пружно-пластичний, границя текучості $\sigma_T = 500$ МПа.

Завдяки симетрії задачі розглядався сектор з довжиною дуги, що дорівнювала довжині тріщини.

Результати розв'язання задач в пружній постановці зіставлялись з відомими чисельними розв'язками. Результати розв'язання задач в пружно-пластичній постановці зіставлялись з отриманими при розв'язанні задач у осесиметричній постановці на сітці з кроком 0,1 мкм в околі вершини тріщини.

При розв'язанні задач в тривимірній постановці використовувалась сітка з кроком 2,5 мкм в площині, перпендикулярній до фронту тріщини.

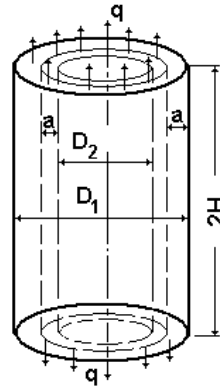


Рис. 7. До задачі про розтягнення полого циліндру з внутрішньою та зовнішньою крайовою кільцевою тріщиною

Таблиця 2

Зовнішня кільцева тріщина в полуму циліндрі при розтягненні

Задача	ЕОІ	$\delta, \%$	G-інтеграл (2P)	$\delta, \%$	G-інтеграл (CP)	$\delta, \%$	G-інтеграл (1P)	$\delta, \%$
$a/t = 0,1$; КІН (пруж) = 20,33714 [16], КІН (пласт) = 21,80698 [6]								
пруж	20,593	1.30	20,285	0.26	19,310	5.05	21,962	7.99
пласт	20,178	7.47	21,175	2.90	21,118	3.16	21,290	2.37
$a/t = 0,3$; КІН (пруж) = 42,97972 [16], КІН (пласт) = 46,62864 [6]								
пруж	44,892	4.45	44,222	2.89	42,097	2.05	47,879	11.4
пласт	44,494	4.58	46,437	0.41	46,217	0.88	46,851	0.48
$a/t = 0,5$; КІН (пруж) = 73,12341 [16], КІН (пласт) = 79,56431 [6]								
пруж	76,090	4.06	74,957	2.51	71,355	2.42	81,155	11.0
пласт	75,922	4.58	79,894	0.41	79,551	0.02	80,350	0.99
$a/t = 0,7$; КІН (пруж) = 114,07140 [16], КІН (пласт) = 123,25948 [6]								
пруж	119,34	4.62	117,56	3.06	111,92	1.89	127,29	11.6
пласт	121,02	1.82	129,67	5.20	129,48	5.05	129,48	5.05

Таблиця 3
Внутрішня кільцева тріщина в полуму циліндрі при розтягненні

Задача	EOI	$\delta, \%$	G-інтеграл (2P)	$\delta, \%$	G-інтеграл (CP)	$\delta, \%$	G-інтеграл (1P)	$\delta, \%$
$a/t = 0,1$; КІН (пруж) = 20,52502 [17], КІН (пласт) = 21,55598 [7]								
пруж	20,352	0.85	20,046	2.33	19,084	7.02	21,704	5.74
пласт	19,826	8.03	20,928	2.91	20,864	3.21	21,049	2.35
$a/t = 0,3$; КІН (пруж) = 42,73412 [17], КІН (пласт) = 45,21656 [6]								
пруж	43,437	1.64	42,789	0.13	40,734	4.68	46,328	8.41
пласт	42,821	5.30	45,329	0.25	45,665	0.99	45,094	0.27
$a/t = 0,5$; КІН (пруж) = 70,507592 [17], КІН (пласт) = 76,01313 [6]								
пруж	72,331	2.59	71,254	1.06	67,830	3.80	77,146	9.41
пласт	72,137	5.10	77,033	1.34	77,280	1.67	76,639	0.82
$a/t = 0,7$; КІН (пруж) = 111,96073 [6], КІН (пласт) = 117,33991 [6]								
пруж	111,86	0.09	110,19	1.58	104,89	6.32	119,30	6.56
пласт	113,37	3.38	122,94	4.77	122,59	4.47	122,62	4.50

Аналіз результатів свідчить про добре збігання результатів розв'язання в пружній та пружно-пластичній постановці з розв'язками, отриманими іншими авторами, для всіх глибин тріщини. Як і в попередньому випадку, найбільш добре збігання результатів обчислення КІН має місце при використанні концепції G-інтегралу закриття тріщини з вибором напруження σ за варіантом 3.

Висновки. Запропоновані комбіновані скінченні елементи змішаного типу в формі шестигранних призм та тетраєдрів для розв'язання просторових задач механіки руйнування. Результати розв'язання модельних задач теорії тріщин свідчать про ефективність запропонованого підходу. Показано, що при врахуванні пластичних деформацій в околі фронту тріщини розроблені схеми та обчислювальні алгоритми, що їх реалізують, забезпечують виконання поправки Ірвіна на пластичність та узгоджуються з розв'язком Райса для розподілу напружень в околі вершини тріщини.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Сахаров А.С., Альтенбах И. Метод конечных элементов в механике твердых тел. – К.: Вища школа, 1982. – 478 с.
2. Ворошко П.П. Смешанные вариационные формулировки задач теории упругости и их реализация методом конечных // Пробл. прочности. – 1985. – № 1. – С. 100 – 105.
3. Уманский С.Э. Общая теория и практическое применение смягченно-смешанных схем метода конечных элементов // Пробл. Прочности. – 1984. – № 12. – С. 83 – 89.
4. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L. The Finite Element Method. – Butterworth-Heinemann. – Oxford; Auckland; Boston; Johannesburg; Melbourne; New Delhi. – 5th ed., 2000. – Vol. 1–3. – 1482 p.

5. *Баженев В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. – Київ: НДІ БМ, 1993. – 376 с
6. *Чирков А.Ю.* Смешанная схема метода конечных элементов для решения краевых задач теории упругости и малых упругопластических деформаций. – К.: Изд-во Ин-та пробл. прочности, 2003. – 250 с.
7. *Чирков А.Ю.* Расчетный анализ модельных задач теории трещин на основе смешанной схемы метода конечных элементов // Надежность и долговечность машин и сооружений. – 2012. – Вып. 35. – С. 200 – 208.
8. *Чирков А.Ю., Кобельский С.В., Звягинцева А.А.* Построение смешанной аппроксимации МКЭ для решения пространственных задач теории упругости // Надежность и долговечность машин и сооружений. – 2008. – Вып. 31. – С. 195 – 207.
9. *Кобельский С.В.* Построение смешанных конечных элементов на основе шестигранной призмы для решения пространственных задач теории упругости // Надежность и долговечность машин и сооружений. – 2010. – Вып. 33. – С. 248 – 262.
10. *Irwin G.R.* Relation of crack toughness measurements to practical applications // *Welding J., Res. Suppl.* – 1962. – 41. – P. 519 – 528.
11. *Levy N., Marcal P.V., Ostergren V.J., Rice J.R.* Small scale yielding near a crack in plane strain: a finite element analysis // *Techn. Report NASA NGL 40-002-080/1 to the National Aeronautics and Space Administration, Nov., 1969.*
12. Програмне забезпечення «Тривимірне скінченноелементне моделювання теплового і термонапруженого стану елементів машинобудівних конструкцій» (SPACE) / Система сертифікації УкрСЕПРО. Сертифікат відповідності № UA1.017.0054634-04. – 2004. -1 с.
13. Вычислительные методы в механике разрушения /Под ред. С. Атлури. – М.: Мир, 1990. – 392 с.
14. *Чирков А.Ю.* Розвиток та реалізація змішаного методу скінченних елементів у задачах міцності, коливань та стійкості елементів конструкцій: Автореф. дис. д-ра техн. наук. – К., 2008. – 41 с.
15. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
16. Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2-х т. /Под ред. Ю. Мураками. - М.: Мир, 1990. - Т.2 - 1014 с.
17. *Саврук М.П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.: Наук. думка, 1988. – 620 с.

Стаття надійшла до редакції 19.10.2011 р.

Кобельский С.В.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТРЕЩИН НА ОСНОВЕ СМЕШАННОЙ СХЕМЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для розв'язання просторових задач теорії тріщин запропоновані комбіновані скінченні елементи змішаного типу в формі шестигранних призм та тетраєдрів. Розроблені схеми та обчислювальні алгоритми, що їх реалізують, забезпечують виконання поправки Ірвіна на пластичність та узгоджуються з розв'язком Райса для розподілу напружень в околі вершини тріщини.

Кобельский С.В.

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ ТРЕЩИН НА ОСНОВЕ СМЕШАННОЙ СХЕМЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для розв'язання просторових задач теорії тріщин запропоновані комбіновані скінченні елементи змішаного типу в формі шестигранних призм та тетраєдрів. Розроблені схеми та обчислювальні алгоритми, що їх реалізують, забезпечують виконання поправки Ірвіна на пластичність та узгоджуються з розв'язком Райса для розподілу напружень в околі вершини тріщини.