

УДК 539.3

**В.А. Баженов**, д-р техн. наук,  
**О.І. Гуляр**, д-р техн. наук,  
**С.О. Пискунов**, д-р техн. наук,  
**С.В. Мицюк**, канд. техн. наук

## **ОСОБЛИВОСТІ РЕАЛІЗАЦІЇ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ПРУЖНОГО СТАНУ ПРОСТОРОВИХ ТІЛ СКЛАДНОЇ ФОРМИ**

Розроблені співвідношення моментної схеми скінчених елементів для скінчених елементів (СЕ) із змінними геометричними і фізичними параметрами із інтегруванням в замкненому вигляді, що урахують змінність компонент метричного тензора в поперечному перерізі СЕ, що дозволяє ефективно отримувати достовірні результати обчислення параметрів напружено-деформованого стану.

Ключові слова: скінченний елемент, моментна схема, пружний стан, просторові тіла складної форми.

Визначення напружено-деформованого стану просторових тіл в пружній постановці є невід'ємним етапом розв'язання задач пружнопластичного деформування, задач повзучості і механіки континуального руйнування та задач механіки тріщин (механіки дискретного руйнування). При цьому конфігурація і структура реальних об'єктів можуть бути досить складними, що утруднює їх розрахунок на основі МСЕ. У випадку використання напіваналітичного методу скінчених елементів (НМСЕ) це призводить до необхідності розгляду як питань, що стосуються МСЕ, зокрема покращення дискретного подання параметрів напружено-деформованого стану в межах поперечного перерізу скінченого елемента (СЕ), так і специфічних питань, притаманних НМСЕ – врахування неоднорідності напружено-деформованого стану в характерному напрямку, забезпечення моделювання довільних умов закріплення на торцях тіла і реалізація алгоритмів, орієнтованих на особливості структури систем рівнянь НМСЕ.

Метою даної роботи є дослідження ефективності скінчено-елементних співвідношень для параметрів напружено-деформованого стану в межах поперечного перерізу СЕ та ефективності і достовірності розв'язувальних співвідношень моментної схеми МСЕ в сполученні з НМСЕ для визначення пружного стану просторових тіл складної форми.

**1. Вихідні співвідношення теорії пружності для просторових тіл із змінними геометричними і фізичними параметрами.** Розглянемо

просторове тіло, що утворене рухом деякої геометричної фігури складної, не обов'язково однозв'язаної конфігурації, вздовж незамкненої напрямної у вигляді дуги кола (рис. 1,а) або відрізка прямої (рис. 1,б). Площа  $A(z^3)$  згаданої фігури, що визначає поперечний переріз тіла, може повільно і незначно змінюватись вздовж напрямної із збереженням подібності форми. Таке зміння площі, що може бути обумовлено, зокрема, недосконаlostями технологічного процесу виготовлення, спричиняє повільне кількісне зміння параметрів напружено-деформованого стану досліджуваного об'єкту вздовж напрямної із збереженням якісної картини їх розподілення. Фізико-механічні характеристики матеріалу (зокрема модуль пружності матеріалу  $E$ ) також передбачаються залежними від просторових координат, при цьому їх зміння носить локальний характер, а величини змінюються на декілька порядків, що може бути обумовлено наявністю набутих в процесі експлуатації макроскопічних дефектів. Такі зміння фізико-механічних характеристик призводять до концентрації напружень і суттєвих змін якісної картини та кількісних показників напружено-деформованого стану. На торцях тіла можуть бути реалізовані різні типи граничних умов, що, зокрема, обумовлено необхідністю моделювання тріщин. У подальшому такі об'єкти будемо називати неоднорідними круговими (рис. 1,а) та неоднорідними призматичними (рис. 1,б) тілами із змінними геометричними і фізичними параметрами і довільними граничними умовами.

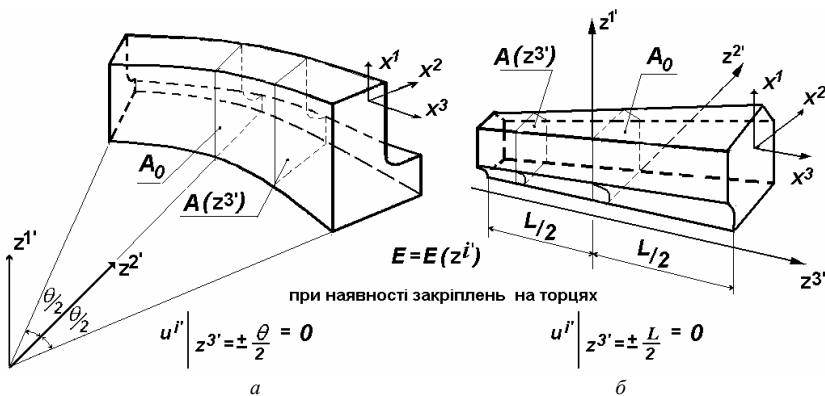


Рис. 1. Неоднорідне кругове (а) і призматичне (б) тіло із змінними геометричними і фізичними параметрами і довільними граничними умовами

Отримання розв'язувальних співвідношень НМСЕ ґрунтується на варіаційному рівнянні Лагранжа:

$$\delta W - \delta A = 0. \quad (1.1)$$

У випадку пружного деформування варіація енергії просторового деформівного тіла об'ємом  $V$  визначається співвідношенням:

$$\delta W = \iiint_V \varepsilon_{kl} C^{ijkl} \delta \varepsilon_{ij} dV.$$

де  $\varepsilon_{ij}$  і  $C^{ijkl}$  – тензори деформацій і пружних констант.

Варіація роботи об'ємних сил  $p^j$  та поверхневих навантажень  $q^j$ , розподілених вздовж частини поверхні тіла  $S_q$ , обчислюється за формулою:

$$\delta A = \iiint_V p^j \delta U_j dV + \iint_{S_q} q^j \delta \bar{U}_j dS,$$

де  $U_j$  і  $\bar{U}_j$  – відповідно переміщення точок об'єму тіла і частини його поверхні  $S_q$ , завантаженої зовнішніми навантаженнями. [4].

Для дослідження процесів деформування зазначених тривимірних тіл доцільно використовувати такі системи координат: *базисну*  $z^{j'}$  (в розглядуваних випадках: циліндричну – для неоднорідних кругових тіл або декартову – для неоднорідних призматичних тіл), яка є незмінною і призначена для завдання вихідної інформації про геометрію об'єкта, зовнішні впливи та граничні умови (осі  $z^{1'}$  та  $z^{2'}$  базисної системи координат розташовані в площині поперечного перетину тіла, а вісь  $z^{3'}$  орієнтована вздовж напрямної); *місцеву* криволінійну систему координат  $x^i$ , природно пов'язану з геометрією досліджуваного об'єкта. При цьому напрямки осей  $x^3$  і  $z^{3'}$  збігаються.

Будемо вважати, що в кожній точці тіла відомі компоненти тензора перетворення  $z^i_{,j'}$ , що визначає зв'язок між місцевою та базисною системами координат [4]:

$$z^i_{,j'} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial x^j}, \quad z^{\alpha}_{,3} = z^{\alpha}_{,3'} = 0. \quad (1.2)$$

Тут і в подальшому всі індекси, позначені грецькими буквами, набуватимуть значення 1, 2, а позначені латинськими – 1, 2, 3.

Компоненти метричного тензора  $g_{mn}$  в місцевій системі координат подамо через компоненти метричного тензора базисної системи згідно з формулою:

$$g_{mn} = z_{,m}^{i'} z_{,n}^{j'} g_{i'j'} \quad (1.3)$$

З урахуванням (2.2),  $g_{\alpha\beta} = z_{,\alpha}^{\gamma'} z_{,\beta}^{\gamma'}$ , для незамкнених кругових тіл  $g_{33} = (z_{,3}^{3'})^2 (z^{2'})^2$ , а для призматичних тіл –  $g_{33} = (z_{,3}^{3'})^2$ .

Співвідношення для визначення компонент деформацій  $\varepsilon_{ij}$  через переміщення  $u_i$  в місцевій системі координат [4]:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x^j} + \frac{\partial u_j}{\partial x^i} \right) - u_k \Gamma_{ij}^k, \quad (1.4)$$

де  $\Gamma_{ij}^k = x_{,i}^k z_{,j}^{m'} z_{,m}^{n'} \Gamma_{m'n'}^{l'} + x_{,i}^k z_{,i}^{m'} \frac{\partial z_{,j}^{l'}}{\partial z^{m'}}$  – символи Крістофеля другого роду,

$$u_k = u_{s'} z_{,k}^{s'}$$

Після підстановки двох останніх формул в (1.2) в (1.4), зважаючи, що  $z_{,k}^{s'} \cdot x_{,i}^k = \delta_{i'}^{s'}$ , одержимо загальний вираз для деформацій у місцевій системі координат через переміщення в базисній:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( u_{i'} z_{,j}^{l'} + u_{l'} z_{,i}^{l'} \right) - u_{l'} z_{,i}^{m'} z_{,j}^{n'} \Gamma_{m'n'}^{l'}. \quad (1.5)$$

З урахуванням ненульових значень символів Крістофеля у циліндричній базисній системі координат

$$\Gamma_{3'3'}^{2'} = -z^{2'}, \quad \Gamma_{3'2'}^{3'} = \Gamma_{2'3'}^{3'} = \frac{1}{z^{2'}}.$$

отримаємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left( u_{\gamma'} z_{,\alpha}^{\gamma'} + u_{\delta'} z_{,\beta}^{\delta'} \right); \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} \left( u_{3',\alpha} z_{,3}^{3'} + u_{\gamma',3} z_{,\alpha}^{\gamma'} - 2u_{3'} z_{,\alpha}^{2'} z_{,3}^{3'} / z^{2'} \right); \\ \varepsilon_{33} &= u_{3',3} z_{,3}^{3'} + u_{2'} z_{,3}^{3'} z_{,3}^{3'} z^{2'}. \end{aligned} \quad (1.6)$$

У декартовій базисній системі координат дорівнюють нулю всі символи Крістофеля, тому формула (1.5) матиме вигляд:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( u_{l',i} z_{,j}^{l'} + u_{l',j} z_{,i}^{l'} \right). \quad (1.7)$$

Фізичні компоненти тензорів деформацій  $\tilde{\varepsilon}_{kl}$  та пружних констант  $\tilde{C}^{ijkl}$  визначаються співвідношеннями:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}}, \quad \tilde{C}^{ijkl} = C^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}g_{(kk)}g_{(ll)}}. \quad (1.8)$$

При використанні фізичних компонент тензорів деформацій  $\tilde{\varepsilon}_{kl}$  і пружних констант  $\tilde{C}^{ijkl}$  для варіації енергії пружного деформування отримуємо:

$$\delta W = \iiint_V \tilde{\varepsilon}_{kl} \tilde{C}^{ijkl} \delta \tilde{\varepsilon}_{ij} dV \quad (1.9)$$

При описі процесу деформування передбачається, що пружні деформації є малими. Напруження  $\sigma^{ij}$  визначаються через компоненти тензора пружних деформацій відповідно до узагальненого закону Гука [4]:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^e = \left[ \mu \left( g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk} \right) + \lambda g^{ij} g^{kl} \right] \varepsilon_{kl}^e, \quad (1.10)$$

де  $\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}$ ,  $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$  – коефіцієнти Ляме, які визначаються через коефіцієнт Пуассона  $\nu = \nu(z^i, T)$  і модуль пружності матеріалу (модуль Юнга)  $E = E(z^i, T)$ .

Фізичні компоненти тензору напружень дорівнюють;

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij} \sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}. \quad (1.11)$$

Варіаційне рівняння в термінах фізичних компонент тензорів деформацій (1.9) дозволяє проводити для опис пружного деформування просторових тіл складної конфігурації.

**2. Співвідношення моментної схеми скінчених елементів для фізичних деформацій.** При використанні НМСЕ скінченоелементна дискретизація виконується в межах поперечних перерізів тіл, а в напрямку утворюючої використовується один скінчений елемент (СЕ), конфігурація якого збігається із конфігурацією утворюючої (рис. 2). Для апроксимації просторових неоднорідних кругових та призматичних тіл змінної площі поперечного перерізу використовуються просторові неоднорідні кругові (рис. 3,а) та призматичні (рис. 3,б) скінчені елементи (СЕ) із змінними геометричними і фізичними параметрами і довільними граничними умовами.

Зазначені СЕ являють собою відповідно криволінійну або прямолінійну призму, утворену переміщенням чотирикутника довільного обрису вздовж напрямної у вигляді дуги кола або прямої. Площа такого чотирикутника може змінюватись (із збереженням подібності його форми) за законом:  $A(z^{3^1}) = A_0 f(z^{3^1})$ , де  $A_0$  – площа поперечного

перерізу при  $z^{3'}=0$ ,  $f(z^{3'})$  – монотонна безперервна функція.

Кожному СЕ у відповідність поставлена місцева криволінійна система координат  $x^i$ , яка природно пов'язана з геометрією об'єкта так, що осі  $x^1$  і  $x^2$  спрямовані вздовж сторін поперечного перетину СЕ, а вісь  $x^3$  спрямована вздовж напрямної та співпадає за напрямком із  $z^{3'}$ .

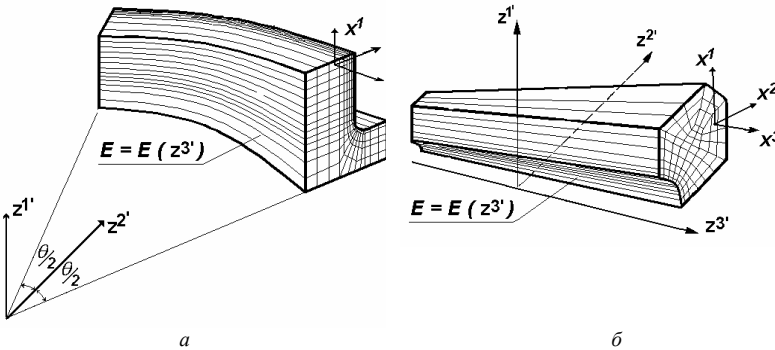


Рис. 2. Скінчені елементні моделі НМСЕ для неоднорідного кругового (а) і призматичного (б) тіл із змінними геометричними і фізичними параметрами і довільними граничними умовами

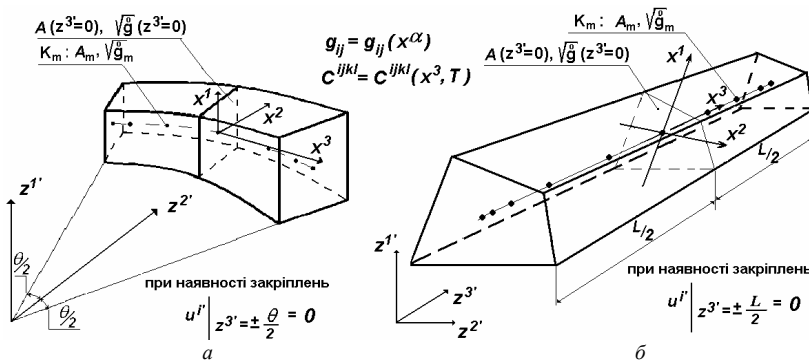


Рис. 3. Неоднорідні круговий (а) і призматичний (б) скінчені елементи із змінними геометричними і фізичними параметрами і довільними граничними умовами в базисній системі координат

При цьому в місцевій системі координат поперечний перетин СЕ відображається на квадрат з одиничною стороною, а довжина його напрямної дорівнює 2. Місцева система координат застосовується для визначення деформацій та напружень у межах СЕ (рис. 4). Вздовж вісі

скінченного елемента, відповідно до вимог формули інтегрування Гаусса, розташована певна кількість точок інтегрування  $K_m$ ,  $m=1\dots M$  (рис. 3,4) [1,5].

При побудові розв'язувальних співвідношень НМСЕ для неоднорідних кругових і призматичних скінчених елементів в роботах [5] було використано припущення про сталість компонент метричного тензора в межах поперечного перерізу СЕ. Як засвідчили чисельні експерименти, проведені із використанням згаданих СЕ на найпростішій задачі про



Рис. 4. Неоднорідні круговий і призматичний скінчені елементи із змінними геометричними і фізичними параметрами і довільними граничними умовами в місцевій системі координат

двовісний розтяг куба (рис. 5,  $q = 0.1$  МПа, модуль пружності  $E = 0.1$  МПа, коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0.3$ ) у випадку використання показаної на вірсіці рис. 5 ортогональної дискретної моделі при кількості невідомих  $N_u = 27$  результати є ідентичними аналітичному розв'язку. У випадку використання показаної не ортогональної дискретної моделі такої ж розмірності похибки визначення переміщень  $\delta_{u_1}$  і  $\delta_{u_2}$  становлять 8–13%. Підвищення точності результатів потребує ортогоналізації дискретної моделі шляхом її згущення. При цьому досягнення точності в межах 2% потребує майже на порядок більшої кількості невідомих і, відповідно, надмірних обчислювальних витрат.

У випадку тіл обертання суттєве погіршення точності обчислення параметрів напружено-деформованого стану виникає навіть при використанні ортогональних сіток, що обумовлено зміною радіуса в межах кожного СЕ, що також може бути подолано за рахунок згущення сітки по радіусу.

Збіжність результатів для не ортогональної дискретної моделі може бути покращена також шляхом урахування зміни компонент метричного тензора на основі чисельного інтегрування в межах поперечного перерізу СЕ [5], що теж потребує суттєвого обсягу додаткових обчислень.

Таким чином, підвищення точності результатів при використанні не ортогональних дискретних моделей як шляхом ортогоналізації СЕ сітки при її згущенні так і з використанням чисельного інтегрування в поперечному перерізі призводить до збільшення обсягів обчислювальних витрат. В той же час, побудова раціональних дискретних моделей

просторових тіл складної форми потребує використання не ортогональних дискретних моделей. В зв'язку з цим, в даній роботі при виведенні розв'язувальних співвідношень НМСЕ здійснено урахування змінності компонент метричного тензора в межах поперечного перерізу СЕ:

$$g_{ij} = g_{ij}(x^\alpha). \quad (2.1)$$

Крім того, для геометричних і фізико-механічних параметрів прийнято наступні гіпотези:

– визначник матриці, складеної зі компонент метричного тензора  $g_{ij}$  і компоненти тензору пружних сталей дорівнюють значенням відповідних величин у центрі поперечного перерізу СЕ:

$$g = \overset{\circ}{g} = g|_{x^\alpha=0}, \quad C^{ijkl} \approx \overset{\circ}{C}^{ijkl} = C^{ijkl}|_{x^\alpha=0};$$

– визначник матриці, складеної зі компонент метричного тензора  $g_{ij}$ , є змінним за напрямною і обчислюється на основі вихідних даних про геометрію досліджуваного об'єкта – заданого закону змінення площі поперечного перерізу – із використанням співвідношення:

$$\sqrt{g(z^{3'})} = \frac{A(z^{3'})}{A_0} \sqrt{g|_{z^{3'}=0}} = f(z^{3'}) \sqrt{g|_{z^{3'}=0}}. \quad (2.2)$$

– компоненти тензору пружних сталей є змінним за напрямною, залежать від температури:

$$C^{ijkl} = C^{ijkl}(x^3, T). \quad (2.3)$$

Розподілення переміщень у межах поперечного перерізу СЕ описується білінійним законом:

$$u_{m'} = \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{m'(S_1 S_2)} \left( \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 + \frac{1}{4} \right), \quad (2.4)$$

де  $u_{m'(S_1 S_2)}$  – вузлові значення переміщень, що подані компонентами в базисній системі координат;  $S_1$  і  $S_2$  – координати, що визначають розташування вузлів відносно центра поперечного перетину елементу в місцевій системі координат  $x^i$ .

Апроксимація невідомих переміщень в базисній системі координат  $u_{3'}$ , в напрямку утворюючої здійснюється розкладенням за системою координатних функцій  $\varphi^l$  – поліномам Лагранжа ( $l = 0, 1$ ) і Міхліна ( $l = 2, \dots, L$ ):



$$u_s = \sum_{l=0}^L \bar{u}_s^l \varphi^{(l)}, \quad (2.5)$$

де

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)} &= \frac{1}{2}(1-x^3), \quad \varphi^{(1)} = \frac{1}{2}(1+x^3), \\ \varphi^{(l)} &= f^{(l)} p^{(l)} - f^{(l-2)} p^{(l-2)}, \quad f^{(l)} = \sqrt{(4l^2-1)^{-1}}, \\ p^{(l)} &= \sqrt{\frac{2l+1}{2}} \sum_{k=0}^l \frac{(-1)^k (l+k)!}{(l-k)! (k!)^2 2^{k+1}} \left[ (1-x^3)^k + (-1)^l (1+x^3)^k \right] \end{aligned}$$

– поліноми Лагранжа.

Застосована система функцій задовольняє умовам повноти та лінійної незалежності і дозволяє просто і ефективно формулювати різні види граничних умов на торцях тіла традиційним для МСЕ засобом, тобто шляхом виключення відповідних рівнянь.

Відповідно до моментної схеми СЕ (МССЕ) [5] компоненти тензора повних фізичних деформацій у поперечному перерізі, що відповідає певній точці інтегрування, подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\varepsilon}_{12} = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{12}; \\ \tilde{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\varepsilon}_{33} = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta} x^\beta \end{aligned} \quad (2.6)$$

де  $\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} = \tilde{\varepsilon}_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}$ ,  $\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij,\beta} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\alpha=0}$  – значення величин деформацій і їх

похідних в центрі поперечного перерізу СЕ.

З урахуванням подання фізичних компонент деформацій через відповідні ненормовані величини (1.8) для коефіцієнтів розкладу фізичних деформацій в ряд Маклорена (2.6) отримаємо:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{ij} &= \frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{ii} \overset{\circ}{g}_{jj}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}; \\ \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{\partial \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0} = \frac{\partial (\varepsilon_{\alpha(\alpha)} / g_{\alpha(\alpha)})}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0} = \\ &= \frac{1}{g_{\alpha(\alpha)}} \left( \varepsilon_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \varepsilon_{\alpha(\alpha)} \frac{g_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}}{g_{\alpha(\alpha)}} \right) \Big|_{x^\beta=0} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}} \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}} \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right)_h ; \\
&\quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\alpha 3}}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0} = \frac{\partial \left( \varepsilon_{\alpha 3} / \sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{33}} \right)}{\partial x^{(3-\alpha)}} \Big|_{x^\beta=0} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{33}}} \left[ \varepsilon_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \varepsilon_{\alpha 3} \left( \frac{g_{\alpha\alpha,(3-\alpha)}}{g_{\alpha\alpha}} + \frac{g_{33,(3-\alpha)}}{g_{33}} \right) \right] \Big|_{x^\beta=0} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{33}}} \left[ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} \left( \overset{\circ}{h}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)} + \overset{\circ}{h}_{33,(3-\alpha)} \right) \right] = \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{33}}} \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} \right)_h ; \\
&\quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\alpha} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{33}}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\beta=0} = \frac{\partial (\varepsilon_{33} / g_{33})}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\beta=0} = \frac{1}{g_{33}} \left( \varepsilon_{33,\alpha} - \varepsilon_{33} \frac{g_{33,\alpha}}{g_{33}} \right) \Big|_{x^\beta=0} = \\
&= \frac{1}{g_{33}} \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right) = \frac{1}{g_{33}} \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} \right)_h, \quad (2.7)
\end{aligned}$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\beta} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{h}_{ij,\delta} = \frac{\overset{\circ}{g}_{ij,\delta}}{g_{ij}}, \quad \overset{\circ}{g}_{ij,\delta} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\delta} \Big|_{x^\alpha=0}.$$

З урахуванням (1.2) і (1.4) для призматичних тіл  $g_{33,\delta} = \left[ \left( z_{,3}^3 \right)^2 \right]_{,\delta} = 0$ .

Відповідно, в цьому випадку вирази для лінійних коефіцієнтів розкладу фізичних деформацій в ряд Маклорена (2.6) набудуть наступного, спрощеного порівняно із випадком кругових тіл, вигляду:

$$\begin{aligned}
&\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}} \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) = \frac{1}{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}} \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right)_h ; \\
&\overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha 3,(3-\alpha)} = \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha(\alpha)} g_{33}}} \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} \overset{\circ}{h}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \right) = \frac{1}{\sqrt{g_{\alpha\alpha} g_{33}}} \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} \right)_h ; \\
&\quad \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}_{33,\alpha} = \frac{1}{g_{33}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} = \frac{1}{g_{33}} \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} \right)_h. \quad (2.8)
\end{aligned}$$

Необхідно відзначити, що кожний зі лінійних коефіцієнтів розкладу фізичних деформацій (в (2.7) для кругових і в (2.8) для призматичних тіл) являє собою добуток нормуючого множника вигляду  $\frac{1}{\sqrt{\overset{\circ}{g}_{ii} \overset{\circ}{g}_{jj}}}$  на

ненормовану похідну від деформації  $(\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,k})_h$ , яка, в свою чергу містить два складники. Перший з них являє собою власне похідні від компонент ненормованих деформацій в місцевій криволінійній системі координат SE, що використовуються для опису сталой в межах поперечного перерізу SE геометрії. Другий складник – це добуток величин деформацій на похідні від компонент метричного тензора, нормовані за їх значеннями в центрі поперечного перерізу SE  $\overset{\circ}{h}_{ij,\delta}$ , що дозволяють враховувати змінність геометрії в межах поперечного перерізу SE.

На основі закону Гука (1.10) і прийнятих співвідношень (2.6) запишемо вираз для компонент тензора фізичних напружень:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{ij} = & \overset{\circ}{C}^{ij11} \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{11} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{11,2} x^2 \right) + 2 \overset{\circ}{C}^{ij12} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12} + \overset{\circ}{C}^{ij22} \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{22,1} x^1 \right) + \\ & + 2 \overset{\circ}{C}^{ij13} \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{13} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{13,2} x^2 \right) + 2 \overset{\circ}{C}^{ij23} \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{23} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{23,1} x^1 \right) + \overset{\circ}{C}^{ij33} \left( \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,1} x^1 + \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,2} x^2 \right). \end{aligned}$$

Застосовуючи позначення:

$$\overset{\circ}{\sigma}^{ij} = \overset{\circ}{C}^{ijkl} \overset{\circ}{\varepsilon}_{kl},$$

$$\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{ij} = \overset{\circ}{C}^{ij11} \overset{\circ}{\varepsilon}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha} + \overset{\circ}{C}^{ij13} \overset{\circ}{\varepsilon}_{(3-\alpha),\alpha} + \overset{\circ}{C}^{ij33} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha};$$

отримаємо скорочений запис закону Гука з урахуванням розкладу деформацій в ряд Маклорена в термінах фізичних величин:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \overset{\circ}{\sigma}^{ij} + \overset{\circ}{\sigma}_{,2}^{ij} x^2 + \overset{\circ}{\sigma}_{,1}^{ij} x^1. \quad (2.9)$$

Відкидаючи з (2.9) члени вигляду  $\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{i\alpha}$  як ті, що не дають вкладення в енергію деформування SE, подамо напруження відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)} = & \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \quad \tilde{\sigma}^{12} = \overset{\circ}{\sigma}^{12}, \\ \tilde{\sigma}^{\alpha 3} = & \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3} x^{(3-\alpha)}, \quad \tilde{\sigma}^{33} = \overset{\circ}{\sigma}^{33} + \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} x^{\alpha}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

де значення коефіцієнтів  $\overset{\circ}{\sigma}^{ij}$  і  $\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{ij}$  обчислюються в точках інтегрування  $K_m$ , що розташовані в поперечних перерізах вздовж вісі  $x^3$  (рис. 3,4).

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент фізичних напружень в ряд Маклорена з урахуванням подання фізичних компонент тензора напружень в місцевій системі координат (1.9):

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}^{ij} &= \sqrt{\overset{\circ}{g}_{ii} \overset{\circ}{g}_{jj}} \overset{\circ}{\sigma}^{ij}; \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha(\alpha)}; \\ \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3} &= \sqrt{\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{g}_{33}} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{\alpha 3} \quad \text{і} \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} = \overset{\circ}{g}_{33} \overset{\circ}{\sigma}_{,(3-\alpha)}^{33}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Визначення отриманих коефіцієнтів розкладу фізичних деформацій в ряд Маклорена (2.7) і (2.8) потребує подальшого представлення ненормованих компонент деформацій та їх похідних, що входять до складу цих коефіцієнтів, через вузлові переміщення і їх похідні в базисній системі координат.

**3. Подання коефіцієнтів розкладу деформацій через переміщення з урахуванням змінності компонент метричного тензора в поперечному перерізі.** Обчислення коефіцієнтів розкладу фізичних деформацій через переміщення згідно із (1.6) для тіл обертання або з (1.9) для призматичних тіл потребує визначення похідних від переміщень в центрі СЕ. Виходячи з прийнятого закону розподілу переміщень в поперечному перерізі (2.4) ці величини дорівнюють:

$$\begin{aligned} u_{i'} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2)}; \quad u_{i',\alpha} = \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2)} S_{\alpha}; \\ u_{i',12} &= \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2)} S_1 S_2; \quad u_{i',3} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2),3}; \\ u_{i',3\alpha} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} u_{i'(S_1 S_2),3} S_{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

При цьому, аналогічно до використаного позначення для величин похідних від переміщень центрі поперечного перерізу СЕ  $\overset{\circ}{u}_{m',i}$ , введемо позначення для відповідних величин компонент тензора перетворення :

$z_{,i}^{m'} \Big|_{x^{\alpha}=0} = \overset{\circ}{z}_{,i}^{m'}$ . Тоді, для кругових неоднорідних незамкнених просторових тіл із застосуванням базисної циліндричної системи координат на основі виразу (1.6) отримаємо:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ u_{\gamma'(S_1, S_2)} \left( S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{\gamma'} + S_{\beta} \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \right) \right]; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ u_{3'(S_1, S_2)} S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} + \frac{1}{2} u_{\gamma'(S_1, S_2), 3} \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} - u_{3'(S_1, S_2)} \frac{\overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{2'} \cdot \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'}}{\overset{\circ}{z}_{,2'}} \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ u_{3'(S_1, S_2), 3} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} + u_{2'(S_1, S_2)} \overset{\circ}{z}^{2'} \left( \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \right)^2 \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ u_{\gamma'(S_1, S_2)} \left( 2S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} + S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{,12}^{\gamma'} \right) \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ 2 \cdot u_{3'(S_1, S_2)} S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} + u_{\gamma'(S_1, S_2), 3} \left( \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,12}^{\gamma'} + S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \right) - \right. \\
&\quad \left. - \frac{\overset{\circ}{z}_{,3}^{3'}}{\overset{\circ}{z}_{,2'}} u_{3'(S_1, S_2)} \left( \overset{\circ}{z}_{,12}^{2'} + \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{2'} \left( 2S_{(3-\alpha)} - \frac{\overset{\circ}{z}_{,2'}^{2'}}{\overset{\circ}{z}_{,2'}} \right) \right) \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33, \alpha} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ 2u_{3'(S_1, S_2), 3} S_{\alpha} + u_{2'(S_1, S_2)} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \left( \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{2'} + 2S_{\alpha} \overset{\circ}{z}^{2'} \right) \right]. \quad (3.2)
\end{aligned}$$

Для неоднорідних призматичних просторових тіл із застосуванням базисної декартової системи координат на основі виразу (1.7) отримаємо:

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ u_{\gamma'(S_1, S_2)} \left( S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{\gamma'} + S_{\beta} \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \right) \right]; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ u_{3'(S_1, S_2)} S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} + \frac{1}{2} u_{\gamma'(S_1, S_2), 3} \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \right]; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ u_{3'(S_1, S_2), 3} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \right]; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha), (3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ u_{\gamma'(S_1, S_2)} \left( 2S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} + S_{\alpha} \overset{\circ}{z}_{,12}^{\gamma'} \right) \right]; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ 2 u_{3'(S_1, S_2)} S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} + u_{\gamma'(S_1, S_2), 3} \left( S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,12}^{\gamma'} \right) \right];
\end{aligned}$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} = \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ u_{3'(S_1 S_2),3} \left( 2S_\alpha \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \right) \right]. \quad (3.3)$$

З урахуванням прийнятої апроксимації переміщень в напрямку утворюючої (2.5) отримані вирази для ненормованих компонент деформацій (3.2) і (3.3) в місцевій криволінійній системі координат через вузлові переміщення та їх похідні, що обчислені в базисній системі координат, набудуть наступного вигляду:

- для кругових неоднорідних тіл:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ \sum_{l=0}^L u_{\gamma'(S_1 S_2)}^l \left( S_\alpha \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{\gamma'} + S_\beta \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \right) \varphi^{(l)} \right]; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ \sum_{l=0}^L \left[ \left( u_{3'(S_1 S_2)}^l \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \left( S_\alpha - \frac{\overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{2'}}{\overset{\circ}{z}_{,2'}} \right) \right) \varphi^{(l)} + \frac{1}{2} u_{\gamma'(S_1 S_2)}^l \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \varphi_{,3}^{(l)} \right] \right]; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ \sum_{l=0}^L \left[ u_{3'(S_1 S_2),3}^l \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \varphi_{,3}^{(l)} + u_{2'(S_1 S_2)}^l \overset{\circ}{z}^{2'} \left( \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \right)^2 \varphi^{(l)} \right] \right]; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ \sum_{l=0}^L u_{\gamma'(S_1 S_2)}^l \left( 2S_1 S_2 \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} + S_\alpha \overset{\circ}{z}_{,12}^{\gamma'} \right) \varphi^{(l)} \right]; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ \sum_{l=0}^L \left[ u_{3'(S_1 S_2)}^l \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \left[ 2 \cdot S_1 S_2 + \frac{1}{\overset{\circ}{z}_{,2'}} \left( \overset{\circ}{z}_{,12}^{2'} + \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{2'} \times \right. \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \times \left( 2S_{(3-\alpha)} - \frac{\overset{\circ}{z}_{,3-\alpha}^{2'}}{\overset{\circ}{z}_{,2'}} \right) \right] \right) \varphi^{(l)} + u_{\gamma'(S_1 S_2),3}^l \left( \frac{1}{2} \overset{\circ}{z}_{,12}^{\gamma'} + S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \right) \varphi_{,3}^{(l)} \right] \right]; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \left[ \sum_{l=0}^L \left[ 2u_{3'(S_1 S_2),3}^l S_\alpha \varphi_{,3}^{(l)} + u_{2'(S_1 S_2)}^l \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} \left( \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{2'} + 2S_\alpha \overset{\circ}{z}^{2'} \right) \varphi^{(l)} \right] \right]; \end{aligned}$$

- для призматичних тіл:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ \sum_{l=0}^L u_{\gamma'(S_1 S_2)}^l \left( S_\alpha \overset{\circ}{z}_{,\beta}^{\gamma'} + S_\beta \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \right) \varphi^{(l)} \right]; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ \sum_{l=0}^L \left( u_{3'(S_1 S_2)}^l \overset{\circ}{z}_{,3}^{3'} S_\alpha \varphi^{(l)} + \frac{1}{2} u_{\gamma'(S_1 S_2)}^l \overset{\circ}{z}_{,\alpha}^{\gamma'} \varphi_{,3}^{(l)} \right) \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ \sum_{l=0}^L u_{3'(S_1 S_2)}^l z_{,3}^{3'} \Phi_{,3}^{(l)} \right]; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} &= \frac{1}{2} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ \sum_{l=0}^L u_{\gamma'(S_1 S_2)}^l \left( 2S_1 S_2 z_{,\alpha}^{\gamma'} + S_{\alpha} z_{,12}^{\gamma'} \right) \Phi^{(l)} \right]; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ \sum_{l=0}^L \left\{ u_{3'(S_1 S_2)}^l \left( 2S_1 S_2 z_{,3}^{3'} \right) \Phi^{(l)} + \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + u_{\gamma'(S_1 S_2)}^l \left( S_{(3-\alpha)} z_{,\alpha}^{\gamma'} + \frac{1}{2} z_{,12}^{\gamma'} \right) \Phi_{,3}^{(l)} \right\} \right]; \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} &= \frac{1}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \left[ \sum_{l=0}^L u_{3'(S_1 S_2)}^l \left( 2S_{\alpha} z_{,3}^{3'} \right) \Phi_{,3}^{(l)} \right]. \tag{3.4}
\end{aligned}$$

Отримані вирази для ненормованих компонент деформацій (3.2) і (3.3) в місцевій криволінійній системі координат через вузлові переміщення та їх похідні, що обчислені в базисній системі координат, які у векторній формі мають наступний вигляд:

$$\overset{\circ}{\varepsilon} = \sum_{l=0}^L \left( [\overset{\circ}{B}_1] \Phi^{(l)} + [\overset{\circ}{B}_2] \Phi_{,3}^{(l)} \right) \{ u_l \}, \tag{3.5}$$

де

$$\begin{aligned}
\{\overset{\circ}{\varepsilon}\}^T &= \{\overset{\circ}{\varepsilon}_{11} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{12} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{23} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{13} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}\}; \\
\{u_l\}^T &= \{u_{i(-1;-1)}^l \quad u_{i(1;-1)}^l \quad u_{i(-1;1)}^l \quad u_{i(1;1)}^l\}; \\
[\overset{\circ}{B}_{\alpha}] &= \left[ [\overset{\circ}{B}_{\alpha}]^{(-1;-1)} \quad [\overset{\circ}{B}_{\alpha}]^{(1;-1)} \quad [\overset{\circ}{B}_{\alpha}]^{(-1;1)} \quad [\overset{\circ}{B}_{\alpha}]^{(1;1)} \right].
\end{aligned}$$

Склад матриць  $[\overset{\circ}{B}_{\alpha}]^{(S_1, S_2)}$  є наступним:

$$\left[ \overset{\circ}{B}_1 \right]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{11} & \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{12} & 0 \\ \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{21} & \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{22} & 0 \\ \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{31} & \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{32} & 0 \\ 0 & 0 & \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{43} \\ 0 & 0 & \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{53} \\ 0 & 0 & \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{63} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \overset{\circ}{\tilde{B}}_2 \end{bmatrix}^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{41} & \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{42} & 0 \\ \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{51} & \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{52} & 0 \\ 0 & 0 & \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{63} \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

Значення компонент матриць  $[\overset{\circ}{B}_\alpha]^{(S_1, S_2)}$  для неоднорідних кругових тіл із змінними геометричними параметрами мають наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{11} &= \frac{1}{2} S_1 z^{\circ 1'}, & \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{12} &= \frac{1}{2} S_1 z^{\circ 2'}_{,1}, \\ \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{21} &= \frac{1}{2} \left( S_2 z^{\circ 1'}_{,1} + S_1 z^{\circ 1'}_{,2} \right), & \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{22} &= \frac{1}{2} \left( S_2 z^{\circ 2'}_{,1} + S_1 z^{\circ 2'}_{,2} \right), \\ \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{31} &= \frac{1}{2} S_2 z^{\circ 1}_{,2}, & \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{32} &= \frac{1}{2} S_2 z^{\circ 2'}_{,2}, \\ \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{43} &= \frac{1}{2} z^{\circ 3'} \left( S_2 - \frac{z^{\circ 2'}_{,2}}{z^{\circ 2'}} \right), & \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{53} &= \frac{1}{2} z^{\circ 3'} \left( S_1 - \frac{z^{\circ 2'}_{,1}}{z^{\circ 2'}} \right), \\ \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{63} &= \frac{1}{4} z^{\circ 2'} \cdot \left( \frac{z^{\circ 3'}}{z^{\circ 3}} \right)^2, \\ \overset{\circ}{(\tilde{B}_2)}_{41} &= \frac{1}{4} z^{\circ 1'}_{,2}, & \overset{\circ}{(\tilde{B}_2)}_{42} &= \frac{1}{4} z^{\circ 2'}_{,2}, \\ \overset{\circ}{(\tilde{B}_2)}_{51} &= \frac{1}{4} z^{\circ 1'}_{,1}, & \overset{\circ}{(\tilde{B}_2)}_{52} &= \frac{1}{4} z^{\circ 2'}_{,1}, \\ \overset{\circ}{(\tilde{B}_2)}_{63} &= \frac{1}{4} z^{\circ 3'}_{,3}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Для неоднорідних призматичних тіл із змінними геометричними параметрами для матриць  $[\overset{\circ}{B}_1]^{(S_1, S_2)}$  відмінними від попередньо наведених для кругових неоднорідних тіл (3.6) будуть тільки наступні компоненти:

$$\overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{43} = \frac{1}{2} z^{\circ 3'} S_2, \quad \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{53} = \frac{1}{2} z^{\circ 3'} S_1, \quad \overset{\circ}{(\tilde{B}_1)}_{63} = 0. \quad (3.8)$$



Вигляд матриці  $[\overset{\circ}{\tilde{B}}_2]^{(S_1, S_2)}$  є повністю ідентичним випадку неоднорідних кругових тіл.

Отримані величини ненормованих деформацій  $(\varepsilon_{ij,k})_h$ , що входять до складу коефіцієнтів лінійних членів розкладення фізичних деформацій в ряд Маклорена, в векторній формі можуть бути подані у вигляді:

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}_h = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}_{const} + \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}_{var}, \quad (3.9)$$

де склад векторів  $\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}_{const}$  є однаковими для неоднорідних кругових і призматичних тіл:

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\}_{const}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22,1} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{23,1} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,1} \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\}_{const}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11,2} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{13,2} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,2} \right\}. \quad (3.10)$$

Вектори  $\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}_{var}$  для неоднорідних кругових тіл із змінними геометричними параметрами мають вигляд:

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\}_{var} = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \overset{\circ}{h}_{22,1} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{23} \left( \overset{\circ}{h}_{22,1} + \overset{\circ}{h}_{33,1} \right) \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,1} \right\};$$

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\}_{var}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11} \overset{\circ}{h}_{11,2} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{13} \left( \overset{\circ}{h}_{11,2} + \overset{\circ}{h}_{33,2} \right) \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{h}_{33,2} \right\}, \quad (3.11)$$

а для неоднорідних призматичних тіл із змінними геометричними параметрами:

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,1} \right\}_{var}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \overset{\circ}{h}_{22,1} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{23} \overset{\circ}{h}_{22,1} \quad 0 \right\}, \quad \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,2} \right\}_{var}^T = \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11} \overset{\circ}{h}_{11,2} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{13} \overset{\circ}{h}_{11,2} \quad 0 \right\}. \quad (3.12)$$

Зважаючи, що компоненти двох із зазначених складових векторів похідних від деформацій обчислюються з урахуванням прийнятого подання переміщень в напрямку утворюючої, матричне представлення вектору  $\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}_h$  доцільно провести у вигляді:

$$\left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{,\alpha} \right\}_h = \sum_{l=0}^L \left[ \left( [\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}]_{const} + [\overset{\circ}{B}_{1,\alpha}]_{var} \right) \varphi^{(l)} + \left( [\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}]_{const} + [\overset{\circ}{B}_{2,\alpha}]_{var} \right) \varphi_3^{(l)} \right] \{u_l\}, \quad (3.13)$$

де склад матриць  $[\overset{\circ}{B}_{\beta,\alpha}]_{const}$  і  $[\overset{\circ}{B}_{\beta,\alpha}]_{var}$  має наступний загальний вигляд:

$$\begin{aligned}
 \left[ \overset{\circ}{B}_{1,\alpha} \right]^{(S_1, S_2)} &= \begin{bmatrix} (\tilde{B}_{1,\alpha})_{11} & (\tilde{B}_{1,\alpha})_{12} & 0 \\ 0 & (\tilde{B}_{1,\alpha})_{22} & 0 \\ 0 & 0 & (\tilde{B}_{1,\alpha})_{33} \end{bmatrix}, \\
 \left[ \overset{\circ}{B}_{2,\alpha} \right]^{(S_1, S_2)} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ (\tilde{B}_{2,\alpha})_{21} & (\tilde{B}_{2,\alpha})_{22} & 0 \\ 0 & 0 & (\tilde{B}_{2,\alpha})_{33} \end{bmatrix}, \\
 \left[ \overset{\circ}{B}_{\beta,\alpha} \right] &= \left[ \left[ \overset{\circ}{B}_{\beta,\alpha} \right]^{(-1;-1)} \left[ \overset{\circ}{B}_{\beta,\alpha} \right]^{(1;-1)} \left[ \overset{\circ}{B}_{\beta,\alpha} \right]^{(-1;1)} \left[ \overset{\circ}{B}_{\beta,\alpha} \right]^{(1;1)} \right]. \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Для компонент підматриць  $\left[ \overset{\circ}{B}_{\beta,\alpha} \right]_{const}^{(S_1, S_2)}$  і  $\left[ \overset{\circ}{B}_{\beta,\alpha} \right]_{var}^{(S_1, S_2)}$  для неоднорідних кругових тіл із змінними геометричними параметрами згідно із (3.4) отримаємо:

$$\left( \tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{11}^{const} = S_1 S_2 z_{(3-\alpha)}^{\circ 1'} + \frac{S_{(3-\alpha)}}{2} z_{,12}^{\circ 1'} ,$$

$$\left( \tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{12}^{const} = S_1 S_2 z_{(3-\alpha)}^{\circ 2'} + \frac{S_{(3-\alpha)}}{2} z_{,12}^{\circ 2'} ,$$

$$\left( \tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{22}^{const} = \frac{1}{4} \left( z_{,3}^{\circ 3'} \right)^2 \left( 2 z^{\circ 2'} S_{\alpha} + z_{,\alpha}^{\circ 2'} \right),$$

$$\left( \tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{33}^{const} = \frac{1}{2} z_{,3}^{\circ 3'} \left( 2 S_1 S_2 - \frac{1}{z^{\circ 2'}} \left( z_{,12}^{\circ 2'} + 2 z_{,(3-\alpha)}^{\circ 2'} \cdot S_{\alpha} - \frac{z_{,1}^{\circ 2'} z_{,2}^{\circ 2'}}{z^{\circ 2'}} \right) \right)$$

$$\left( \tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{11}^{var} = -\frac{1}{2} S_{(3-\alpha)} z_{,(3-\alpha)}^{\circ 1'} \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha}$$

$$\left( \tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{12}^{var} = -\frac{1}{2} S_{(3-\alpha)} z_{,(3-\alpha)}^{\circ 2'} \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha}$$

$$\left( \tilde{B}_{1,\alpha} \right)_{22}^{var} = -\frac{1}{4} \left( z_{,3}^{\circ 3'} \right)^2 z^{\circ 2'} \overset{\circ}{h}_{33,\alpha}$$

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{B}_{1,\alpha}\right)_{33}^{var} &= -\frac{1}{4} z_{,3}^{\circ 3'} \left( S_{(3-\alpha)} - \frac{z_{,3}^{\circ 2'}}{z_{,3}^{\circ 2'}} \right) \cdot \left( \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha} + \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right), \\
\left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{21}^{const} &= \frac{1}{2} z_{,3}^{\circ 1'} \cdot S_{\alpha} + \frac{1}{4} z_{,12}^{\circ 1'}, & \left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{22}^{const} &= \frac{1}{2} z_{,3}^{\circ 2'} \cdot S_{\alpha} + \frac{1}{4} z_{,12}^{\circ 2'}, \\
\left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{33}^{const} &= \frac{1}{2} z_{,3}^{\circ 3'} S_{\alpha}; \\
\left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{21}^{var} &= -\frac{1}{8} z_{,3}^{\circ 1'} \cdot \left( \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha} + \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right), \\
\left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{22}^{var} &= -\frac{1}{8} z_{,3}^{\circ 2'} \cdot \left( \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha} + \overset{\circ}{h}_{33,\alpha} \right), \\
\left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{33}^{var} &= -\frac{1}{2} z_{,3}^{\circ 3'} \cdot \overset{\circ}{h}_{33,\alpha}. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Для неоднорідних призматичних тіл із змінними геометричними параметрами значення компонент підматриць  $[\overset{\circ}{B}_{\beta,\alpha}]_{const}^{(S_1, S_2)}$  і  $[\overset{\circ}{B}_{\beta,\alpha}]_{var}^{(S_1, S_2)}$  визначаються за відповідно до формул (3.4). При цьому, відмінними від попередньо наведених для кругових неоднорідних тіл будуть наступні компоненти:

$$\begin{aligned}
\left(\tilde{B}_{1,\alpha}\right)_{22}^{const} &= 0, & \left(\tilde{B}_{1,\alpha}\right)_{33}^{const} &= S_1 S_2 z_{,3}^{\circ 3'}, \\
\left(\tilde{B}_{1,\alpha}\right)_{22}^{var} &= 0, & \left(\tilde{B}_{1,\alpha}\right)_{33}^{var} &= -\frac{1}{4} S_{(3-\alpha)} z_{,3}^{\circ 3'} \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha}, \\
\left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{21}^{var} &= -\frac{1}{8} z_{,3}^{\circ 1'} \cdot \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha}, & \left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{22}^{var} &= -\frac{1}{8} z_{,3}^{\circ 2'} \cdot \overset{\circ}{h}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha}, \\
\left(\tilde{B}_{2,\alpha}\right)_{33}^{var} &= 0. \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Необхідно відзначити, що структура виразів (3.4) є повністю ідентичною аналогічним виразам, що не враховують змінність компонент метричного тензора в межах СЕ (зокрема, наведеним в роботі [1]). Зважаючи на це, їх використання дозволяє, не виконуючі трудомісткого чисельного інтегрування в поперечному перерізі і практично не змінюючи обсяг обчислювальних витрат враховувати змінність геометричних параметрів в межах поперечного перерізу СЕ.

**4. Алгоритм розв'язання систем лінійних рівнянь НМСЕ і ефективність визначення напружено-деформованого стану із**

**використанням неоднорідних кругових і призматичних СЕ із змінними геометричними і фізичними параметрами.** При використанні НМСЕ вектори невідомих  $\{u\}$ , зовнішніх навантажень  $\{Q\}$  і матриця жорсткості  $[K]$  дискретної моделі набувають блочної структури:

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} \{u_1\} \\ \dots \\ \{u_l\} \\ \dots \\ \{u_L\} \end{Bmatrix}, \{Q\} = \begin{Bmatrix} \{Q_1\} \\ \dots \\ \{Q_l\} \\ \dots \\ \{Q_L\} \end{Bmatrix}, [K] = \begin{bmatrix} [K_{11}] & \dots & [K_{1l}] & \dots & [K_{1L}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K_{l1}] & \dots & [K_{ll}] & \dots & [K_{lL}] \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ [K_{L1}] & \dots & [K_{Ll}] & \dots & [K_{LL}] \end{bmatrix}. \quad (3.17)$$

Зважаючи на це для розв'язання отриманої системи рівнянь раціональним є використання блочно-ітераційних алгоритмів [1], зокрема за алгоритмом блочних ітерацій з верхньою релаксацією:

$$\{u_l\}_n = \{u_l\}_{n-1} + \{\Delta u_l\}_n = \{u_l\}_{n-1} + [K_{ll}]^{-1} \left( \{Q_l\} - \beta \left[ \sum_{s=0}^{l-1} [K_{ls}] \right] \{u_s\}_n + \sum_{s=l}^L [K_{ls}] \{u_s\}_{n-1} \right), \quad (3.18)$$

де  $1 \leq \beta < 2$  – параметр релаксації,  $n$  – поточний номер ітерації.

Умовою збіжності ітераційного процесу є нерівність:

$$\sum_{l=0}^L \left( \{\Delta u_l\}_n \right)^2 \leq \zeta \sum_{l=0}^L \left( \{u_l\}_n \right)^2, \quad (3.19)$$

де  $\zeta = 10^{-4} \dots 10^{-6}$  – параметр точності розв'язання системи лінійних рівнянь, який може бути визначений на основі дослідження збіжності результатів.

Дослідження ефективності застосування розроблених нових призматичних СЕ із змінними геометричними параметрами проведено на основі розв'язання вищезгаданої задачі про двовісний розтяг куба (рис. 5,6). Результати, отримані із використанням не ортогональної дискретної моделі при використанні інтегрування в замкненому вигляді є повністю ідентичними результатам, отриманим на основі урахування змінності компонент метричного тензора шляхом чисельного інтегрування, результати є повністю ідентичними.

Дослідження ефективності використання і вірогідності результатів для кругових тіл проведено на тестовому прикладі про деформування нескінченного товстостінного циліндра під впливом внутрішнього тиску (внутрішній та зовнішній радіуси  $a = 0.002 \text{ м}$  і  $b = 10a$ ,  $q = 1 \text{ МН/м}^2$ ,  $E = 1 \text{ МПа}$ ,  $\nu = 0.3$ , рис. 6,а). В якості еталону використано аналітичний розв'язок [3]. При розв'язанні задачі використані ортогональні дискретні

моделі з різною кількістю (від 4 і більше) СЕ (рис. 6,б), граничні умови на площинах перпендикулярних вісі обертання відповідають площинам симетрії –  $u^{1'} = 0$ , на торцевих поверхнях –  $u^{3'} = 0$ .

Аналіз результатів проведений для точки циліндра, що знаходиться на відстані  $r = 0,00425$  м від вісі обертання [2]. Отримані залежності похибок  $\delta$  обчислення радіальних  $\sigma^{2'2'}$  і колових  $\sigma^{3'3'}$  напружень від кількості  $N$  СЕ вздовж радіуса циліндра (рис. 6) свідчать, що у випадку використання для визначення компонент тензора деформацій  $\varepsilon_{ij}$  місцевої ненормованої системи координат і усереднення значень компонент метричного тензора в поперечному перерізі СЕ (на графіку – штрихова лінія) величини похибок на найрідших сітках досягають 40%. В той же час при урахуванні змінності компонент метричного тензора (на графіку – суцільна лінія) похибка  $\epsilon$  в 3-7 разів меншою. При цьому точність результатів, отриманих при урахуванні змінності компонент метричного тензора як шляхом чисельного так і шляхом безпосереднього інтегрування є однаковою. Тотожність результатів, отриманих із урахуванням і без урахування змінності компонент метричного тензора в поперечному перерізі досягається лише при суттєвому збільшенні кількості СЕ по радіусу, що відповідно збільшує обсяг обчислювальних витрат.

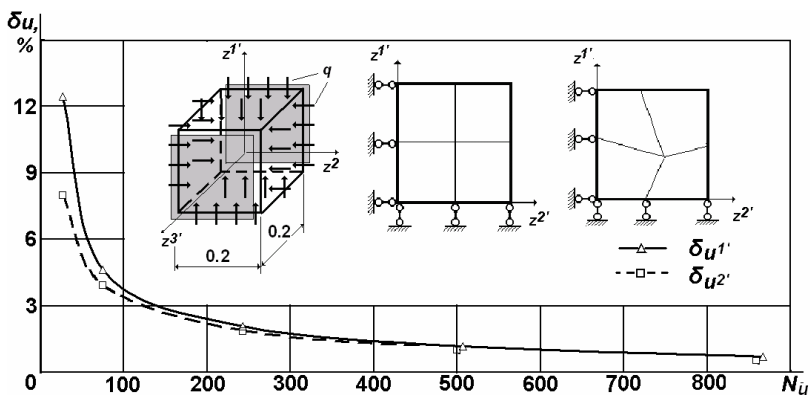


Рис. 5. Розрахункова схема та поперечний переріз дискретних моделей куба при двісному розтягу і похибка обчислення переміщень при використанні не ортогональних дискретних моделей

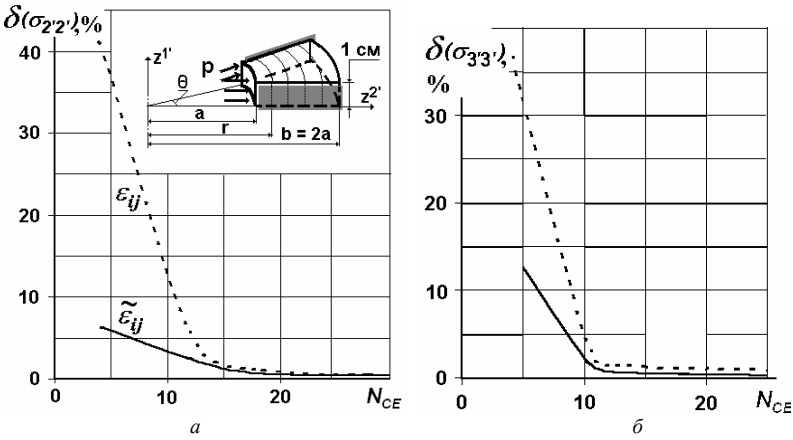


Рис. 6 Порівняння збіжності результатів обчислення радіальних (а) і колових (б) напружень.

Таким чином, для тіл обертання одержання точних результатів при мінімальних обчислювальних витратах навіть із використанням ортогональних СЕ можливе лише при урахуванні змінності компонент метричного тензора в поперечному перерізі СЕ.

Отже, розглянуті тестові приклади свідчать, що урахування змінності компонент метричного тензора при побудові дискретних моделей об'єктів складної форми є необхідною передумовою ефективного отримання вірогідних результатів обчислення параметрів напружено-деформованого стану. Розроблені СЕ із змінними геометричними і фізичними параметрами із інтегруванням в замкненому вигляді дозволять вирішити цю проблему.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Остапенко Р.М., Пискунов С.О.* Розрахункові співвідношення НМСЕ просторової задачі термов'язкопружнопластичності для неоднорідних тіл обертання // Опір матеріалів і теорія споруд № 82, 2008. - С.3-29.
3. *Баженов В.А., Солодей І.І., Пискунов С.О., Андрієвський В.П., Сизевич Б.І.* Матриця жорсткості і вектор вузлових реакцій скінченного елемента для розв'язання просторових задач термов'язкопружно-пластичності НМСЕ // Опір матеріалів і теорія споруд № 76, 2005. - С.3–26.
4. *Блох В. І.* Теория упругости / В. И. Блох. – Х. : Изд. Харьковск. Гос. Университета, 1964. – 484 с.

5. Сахаров А.С., Кислоцкий В.Н., Киричевский В.В. Метод конечных элементов в механике твердых тел. - К.: Вища школа, 1982.-480с.

*Стаття надійшла до редакції 12.07.2012 р.*

*Баженов В.А., Гуляр О.И., Пискунов С.О., Мицюк С.В.*

**ОСОБЕННОСТИ РЕАЛИЗАЦИИ МОМЕНТНОЙ СХЕМЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ УПРУГОГО СОСТОЯНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ СЛОЖНОЙ ФОРМЫ**

Разработаны соотношения моментной схемы конечных элементов для конечных элементов (КЭ) с переменными геометрическими и физическими параметрами с интегрированием в замкнутом виде, учитывающие изменение компонент метрического тензора в поперечном сечении КЭ. Это позволяет эффективно получать достоверные результаты определения параметров напряженно деформированного состояния.

Ключевые слова: конечный элемент, моментная схема, упругое состояние, пространственные тела сложной формы.

*Bazhenov V.A., Gulyar O.I., Piskunov S.O., Micyuk S.V.*

**FEATURES OF REALIZATION OF MOMENT SCHEME OF FINITE ELEMENT METHOD FOR DETERMINATION OF THE ELASTIC STATE OF SPATIAL BODIES OF COMPLICATED DIFFICULT FORM**

Developed relationships moment finite element schemes for finite element (FE) with variable geometry and physical parameters with integration in closed form, taking into account the change in the components of the metric tensor in the cross section of FE. This effectively obtain valid results definition of stress strain state.

Keywords: finite element moment scheme, the elastic state, space bodies of complex shape.