

УДК 539.3

**В.А. Баженов**, д-р техн. наук**О.С. Погорелова**, канд. фіз.-мат. наук**Т.Г. Постнікова**, канд. техн. наук

## ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ АНАЛІЗУ ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ВІБРОУДАРНИХ СИСТЕМ

В статті викладені теоретичні основи та особливості застосування модифікованого методу продовження розв'язку за параметром для дослідження динаміки віброударних систем, зокрема для побудови амплітудно-частотних характеристик, та аналізу стійкості їхнього коливального руху при моделюванні удару силою контактної взаємодії.

### Вступ

В НДІ будівельної механіки КНУБА (раніше ПНДІ тонкостінних просторових конструкцій) рядом авторів був запропонований та розвинутий чисельний метод побудови періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь [1-4]. В його основу покладена методика продовження розв'язку за деяким параметром. Модифікація та розвиток цього методу для двомасових віброударних систем при моделюванні удару силою контактної взаємодії викладені в роботах [5-7]. В цих роботах продовження розв'язку виконувалось за параметром інтенсивності зовнішнього навантаження, що давало можливість побудувати криві навантаження. В даній статті описується застосування цього методу, якщо продовження розв'язку буде здійснюватись за параметром частоти зовнішнього навантаження, що забезпечує побудову амплітудно-частотних характеристик.

Відмітимо, що в попередніх роботах [8-10] були викладені теоретичні положення та чисельна реалізація побудов амплітудно-частотних характеристик для одномасового ударного осцилятора та двомасової віброударної системи з двома ступнями вільності, якщо удар моделювався граничними умовами з використанням коефіцієнту відновлення на базі стереомеханічної теорії удару. Але, як було доведено в [11] та сформульовано в [12], автори вважають доцільним використовувати для моделювання удару більш реалістичну модель ударного процесу [12], а саме введення силових характеристик контактної взаємодії. Такий підхід до моделювання удару обумовлює доцільність та бажаність побудови амплітудно-частотних характеристик віброударних систем та проведення аналізу стійкості їхнього коливального руху, якщо удар моделюється силою контактної взаємодії.

### 1. Постановка задачі

Постановка задачі та методика побудови аналогічні відповідним побудовам статті [5], де для цієї самої двомасової віброударної системи з двома ступнями вільності (рис. 1) описана модифікація методу продовження розв'язку за параметром інтенсивності зовнішнього навантаження.

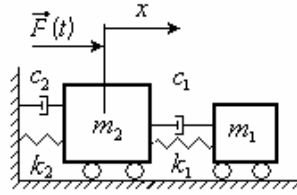


Рис. 1

Нелінійні диференціальні рівняння її руху мають вигляд:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= -2\xi_1\omega_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \omega_1^2(x_1 - x_2 - D) + \frac{1}{m_1}F_{\text{кон}}(t), \\ \ddot{x}_2 &= -2\xi_2\omega_2\dot{x}_2 - \omega_2^2x_2 - 2\xi_1\omega_1\mu(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - \omega_1^2\chi(x_2 - x_1 + D) + \frac{1}{m_2}[F(t) - F_{\text{кон}}(t)], \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{де } \omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}, \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}; \quad \xi_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}, \quad \xi_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2}; \quad \chi = \frac{m_2}{m_1}.$$

Сила контактної взаємодії  $F_{\text{кон}}(t)$ , яка моделює удар, діє лише під час удару і відсутня в інші моменти часу. Контактна сила описується законом Герца [14,15]:

$$F_{\text{кон}}(t) = K\alpha(t)^{3/2}, \quad (2)$$

де  $\alpha(t) = x_2 - x_1$  – відносне зближення тіл,

$$K = \frac{4}{3} \frac{q}{(\delta_0 + \delta_1)\sqrt{A+B}}, \quad \delta_0 = \frac{1-\mu_0^2}{E_0\pi}, \quad \delta_1 = \frac{1-\mu_1^2}{E_1\pi}, \quad (3)$$

$\mu_i$  і  $E_i$  – коефіцієнти Пуассона та модулі Юнга для обох тіл,  $A$ ,  $B$  і  $q$  – константи, які характеризують місцеву геометрію зони контакту. Відмітимо, що моделювання удару контактною силою, що описується законом Герца, можливе лише у випадку, якщо поверхні контакту є “Герцевими” поверхнями, тобто відповідають відомій таблиці [14,15]. Ми вважаємо, що поверхні контакту основного (з масою  $m_2$ ) та приєднаного (з масою  $m_1$ ) тіл нашої моделі є, наприклад, сферами великих радіусів, чи сферою та площиною і таким чином відповідають таблиці “Герцевих” поверхонь. При чисельному розв’язку задачі необхідно визначити величини констант  $A$ ,  $B$  і  $q$  згідно з цією таблицею, які і є характеристиками місцевої геометрії зони контакту.

Гармонічне зовнішнє навантаження записується у вигляді:

$$F(t) = \lambda F_0 \cos(\omega t + \varphi_0). \quad (4)$$

Продовження розв'язку будується за параметром частоти зовнішнього навантаження  $\omega$ , якій є ведучим параметром. Модифікація методу розробляється для дослідження  $T$ -періодичних усталених режимів коливань, де  $T$  – період зовнішнього навантаження.

Якщо частота зовнішнього навантаження  $\omega$  змінюється, то природно змінюється і його період  $T = 2\pi/\omega$ .

## 2. Теоретичні основи побудови амплітудно-частотних характеристик

Як вже зазначалось вище, ця стаття є продовженням та подальшим розвитком статті [5]. Але продовження розв'язку за параметром частоти зовнішнього навантаження має деякі особливості, а саме.

При деякому фіксованому значенні частоти зовнішнього навантаження  $\omega_{(k)}$  (і певному значенні інтенсивності навантаження  $\lambda$ ) знайдемо прямим чисельним інтегруванням рівнянь руху (1) їхній розв'язок. Як і раніше (при побудові кривих навантаження) обминаємо перехідний процес та обираємо в усталеному режимі коливань стан при деякому  $t=t_0$ , який буде вихідним для подальших побудов

$$x_{i(k)}(t_0), \dot{x}_{i(k)}(t_0), \quad i = 1, 2. \quad (5)$$

На наступному кроці надамо ведучому параметрові приріст

$$\omega_{(k+1)} = \omega_{(k)} + \Delta\omega_{(k)}. \quad (6)$$

Далі для кожного нового значення частоти зовнішнього навантаження будемо шукати розв'язки рівнянь руху тільки на одному періоді. Цей розв'язок, як і будь який розв'язок диференціальних рівнянь, залежить від вихідних умов, тобто вихідних значень переміщень та швидкостей (5). Але при зміні частоти зовнішнього навантаження вихідні значення переміщень та швидкостей при  $t=t_0$  також отримають прирости

$$\begin{aligned} x_{i(k+1)}(t_0) &= x_{i(k)}(t_0) + \Delta x_{i(k)}(t_0), \\ \dot{x}_{i(k+1)}(t_0) &= \dot{x}_{i(k)}(t_0) + \Delta \dot{x}_{i(k)}(t_0), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (7)$$

Щоб розв'язати рівняння руху (1) при новому значенні ведучого параметра  $\omega_{(k+1)}$  необхідно знайти нові значення вихідних умов, а для цього потрібно знайти їхні прирости (7). Для цього скористуємось головним рівнянням періодичного процесу, тобто умовами періодичності, які виконуються на кожному кроці для  $T$ -періодичних усталених режимів коливань. При цьому пам'ятаємо, що при зміні частоти зовнішнього навантаження його період також змінюється. Умови періодичності на  $(k+1)$ -му кроці мають вигляд:

$$\begin{aligned}
 x_{i(k+1)}(t_0 + \frac{2\pi}{\omega_{(k+1)}}), x_{1(k+1)}(t_0), x_{2(k+1)}(t_0), \dot{x}_{1(k+1)}(t_0), \dot{x}_{2(k+1)}(t_0), \omega_{(k+1)}) &= x_{i(k+1)}(t_0), \\
 \dot{x}_{i(k+1)}(t_0 + \frac{2\pi}{\omega_{(k+1)}}), x_{1(k+1)}(t_0), x_{2(k+1)}(t_0), \dot{x}_{1(k+1)}(t_0), \dot{x}_{2(k+1)}(t_0), \omega_{(k+1)}) &= \dot{x}_{i(k+1)}(t_0), \quad (8) \\
 & i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Ці рівняння з врахуванням співвідношень (6) та (7) визначають систему чотирьох нелінійних рівнянь відносно чотирьох невідомих приростів

$$\Delta x_{1(k)}(t_0), \Delta x_{2(k)}(t_0), \Delta \dot{x}_{1(k)}(t_0), \Delta \dot{x}_{2(k)}(t_0), \quad (9)$$

які відповідають приросту  $\Delta\omega_{(k)}$  ведучого параметра.

Задля лінеаризації цієї системи розкладемо ліві частини рівнянь в ряд Тейлора відносно приростів (9) і відкидаючи члени вище першого порядку отримуємо лінійну алгебраїчну систему чотирьох рівнянь (10) з чотирма невідомими (9):

$$\begin{aligned}
 c_{11}\Delta x_{1(k)}(0) + c_{12}\Delta x_{2(k)}(0) + c_{13}\Delta \dot{x}_{1(k)}(0) + c_{14}\Delta \dot{x}_{2(k)}(0) &= b_1 \\
 c_{21}\Delta x_{1(k)}(0) + c_{22}\Delta x_{2(k)}(0) + c_{23}\Delta \dot{x}_{1(k)}(0) + c_{24}\Delta \dot{x}_{2(k)}(0) &= b_2 \\
 c_{31}\Delta x_{1(k)}(0) + c_{32}\Delta x_{2(k)}(0) + c_{33}\Delta \dot{x}_{1(k)}(0) + c_{34}\Delta \dot{x}_{2(k)}(0) &= b_3 \\
 c_{41}\Delta x_{1(k)}(0) + c_{42}\Delta x_{2(k)}(0) + c_{43}\Delta \dot{x}_{1(k)}(0) + c_{44}\Delta \dot{x}_{2(k)}(0) &= b_4
 \end{aligned} \quad (10)$$

Всі коефіцієнти цієї системи  $c_{ij}, i, j = 1, 2, 3, 4$  такі саме, як і коефіцієнти системи, що отримані та докладно описані в [5] при побудові кривих навантаження. Але праві частини цих рівнянь відрізняються, а саме:

$$\begin{aligned}
 b_i &= -\left[ \frac{\partial x_{i(k)}}{\partial \omega_{(k)}}(t_0 + \frac{2\pi}{\omega_{(k)}}), x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \omega_{(k)}) - \right. \\
 & \left. - \frac{\partial x_{i(k)}}{\partial t}(t_0 + \frac{2\pi}{\omega_{(k)}}), x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \omega_{(k)}) \frac{2\pi}{\omega_{(k)}^2} \right] \Delta\omega_{(k)}^{-r_{i(k)}}, \quad i=1, 2, \quad (11) \\
 b_i &= -\left[ \frac{\partial \dot{x}_{i(k)}}{\partial \omega_{(k)}}(t_0 + \frac{2\pi}{\omega_{(k)}}), x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \omega_{(k)}) - \right. \\
 & \left. - \frac{\partial \dot{x}_{i(k)}}{\partial t}(t_0 + \frac{2\pi}{\omega_{(k)}}), x_{1(k)}(t_0), x_{2(k)}(t_0), \dot{x}_{1(k)}(t_0), \dot{x}_{2(k)}(t_0), \omega_{(k)}) \frac{2\pi}{\omega_{(k)}^2} \right] \Delta\omega_{(k)}^{-r_{i(k)}}, \quad i=3, 4.
 \end{aligned}$$

Додаткові члени в цих співвідношеннях обумовлені зміною періоду коливань за рахунок зміни частоти зовнішнього навантаження  $\omega$ . Тут, як і раніше, запроваджені нев'язки  $k$ -го кроку методу продовження за параметром:

$$\begin{aligned}
 r_{i(k)} &= x_{i(k)}(t_0 + 2\pi/\omega_{(k)}) - x_{i(k)}(t_0), \quad i = 1, 2, \quad (12) \\
 \dot{r}_{i(k)} &= \dot{x}_{i(k)}(t_0 + 2\pi/\omega_{(k)}) - \dot{x}_{i(k)}(t_0), \quad i = 1, 2.
 \end{aligned}$$

Дали порядок побудови амплітудно-частотних характеристик збігається з порядком побудови кривих навантаження: коефіцієнти  $c_{ij}$  та праві частини  $b_i$  алгебраїчної системи (10) обчислюються шляхом розв'язку відповідних задач Коші; розв'язки системи (10) визначають прирости вихідних значень переміщень та швидкостей (9) тіл віброударної системи для нового значення частоти зовнішнього навантаження (6). Значення вихідних переміщень та швидкостей при  $t = t_0$  обумовлюють розв'язок вихідних рівнянь (1) для нового значення частоти зовнішнього навантаження. Таким чином крок за кроком, збільшуючи (чи зменшуючи) на кожному кроці частоту зовнішнього навантаження на обрану величину  $\Delta\omega_{(k)}$  будемо амплітудно-частотну характеристику віброударної системи при фіксованому значенні інтенсивності зовнішнього навантаження.

Як вже згадувалось, в [5,6] була побудована крива навантаження, тобто залежність напіввзмахів коливань тіл віброударної системи від амплітуди зовнішнього навантаження. В цієї статті описаний порядок побудови амплітудно-частотної характеристики, тобто залежності напіввзмахів коливань тіл віброударної системи від частоти зовнішнього навантаження. Очевидно, що вибравши ведучим параметром яку-небудь іншу характеристику віброударної системи, можна отримати таким самим шляхом із застосуванням модифікованого методу продовження розв'язку за цим параметром залежність від нього напіввзмахів (і швидкостей) тіл віброударної системи.

### 3. Теоретичні основи аналізу стійкості коливального руху

В дійсності віброударна система, яка є суттєво нелінійною, при зміні параметрів, як самої системи, так і зовнішнього навантаження, може змінювати режими свого коливального руху (див., наприклад, [16]). Тоді одноударний  $T$ -періодичний режим, який може бути отриманий тій модифікацією числового методу продовження за параметром, що розглядається, не реалізується в дійсності і тому втрачає стійкість. Отже, побудови як кривих навантаження, так і амплітудно-частотних характеристик мають бути доповнені аналізом стійкості отриманих режимів коливань.

Визначення стійкості одноударного періодичного режиму коливань може бути сформульоване таким чином.

Нехай при заданих значеннях параметра інтенсивності  $\lambda$  та частоти  $\omega$  в системі (1), що описує коливальний рух системи, існує  $T = 2\pi/\omega$  періодичний розв'язок, обумовлений вихідними умовами

$$x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0). \quad (13)$$

При заданому зовнішньому впливі стійкість періодичного коливального режиму характеризується здатністю відновлюватися після збудження цього режиму. А саме, нехай у момент  $t = t_0$  має місце деяке збудження параметрів (13), що характеризують цей режим:

$$\begin{aligned}\hat{x}_i(t_0) &= x_i(t_0) + \delta x_i(t_0), \\ \hat{\dot{x}}_i(t_0) &= \dot{x}_i(t_0) + \delta \dot{x}_i(t_0), \quad i = 1, 2.\end{aligned}\quad (14)$$

Збудження в наступному циклі будуть іншими:

$$\begin{aligned}\hat{x}_i^p(t_0) &= x_i(t_0) + \delta^p x_i(t_0), \\ \hat{\dot{x}}_i^p(t_0) &= \dot{x}_i(t_0) + \delta^p \dot{x}_i(t_0), \quad i = 1, 2.\end{aligned}\quad (15)$$

Вектор збуджень на черговому циклі усталеного віброударного режиму  $\delta^p x$  ( $\delta^p x_1(t_0)$ ,  $\delta^p x_2(t_0)$ ,  $\delta^p \dot{x}_1(t_0)$ ,  $\delta^p \dot{x}_2(t_0)$ )<sup>T</sup> необхідно зв'язати з вектором збуджень на попередньому циклі  $\overline{\delta x}$  ( $\delta x_1(t_0)$ ,  $\delta x_2(t_0)$ ,  $\delta \dot{x}_1(t_0)$ ,  $\delta \dot{x}_2(t_0)$ )<sup>T</sup> (тут <sup>T</sup> індекс транспонування). Якщо норма  $\|\overline{\delta^p x}\|$  менше норми  $\|\overline{\delta x}\|$ , то збудження згодом будуть меншати і коливальний режим буде стійким. У протилежному випадку збудження будуть наростати, що відповідає нестійкому коливальному режимові.

Знайдемо зв'язок між цими векторами.

Умови періодичності для незбуджених значень параметрів мають вигляд:

$$\begin{aligned}x_i(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0)) &= x_i(t_0), \\ \dot{x}_i(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0)) &= \dot{x}_i(t_0), \quad i = 1, 2.\end{aligned}\quad (16)$$

Запишемо явно залежність збуджених значень переміщень та швидкостей через період від збуджених значень вихідних параметрів:

$$\begin{aligned}\hat{x}_i(t_0 + T) &= x_i(t_0 + T, \hat{x}_1(t_0), \hat{x}_2(t_0), \hat{\dot{x}}_1(t_0), \hat{\dot{x}}_2(t_0)), \\ \hat{\dot{x}}_i(t_0 + T) &= \dot{x}_i(t_0 + T, \hat{x}_1(t_0), \hat{x}_2(t_0), \hat{\dot{x}}_1(t_0), \hat{\dot{x}}_2(t_0)), \quad i = 1, 2.\end{aligned}\quad (17)$$

З врахуванням (14) вирази (17) приймуть вигляд:

$$\begin{aligned}\hat{x}_i(t_0 + T) &= x_i(t_0 + T, x_1(t_0) + \delta x_1(t_0), x_2(t_0) + \delta x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0) + \delta \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0) + \delta \dot{x}_2(t_0)), \\ \hat{\dot{x}}_i(t_0 + T) &= \dot{x}_i(t_0 + T, x_1(t_0) + \delta x_1(t_0), x_2(t_0) + \delta x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0) + \delta \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0) + \delta \dot{x}_2(t_0)), \quad (18) \\ & \quad i=1, 2.\end{aligned}$$

Розкладемо ці вирази в ряд Тейлора відносно вихідних збуджень  $\delta x_1(t_0)$ ,  $\delta x_2(t_0)$ ,  $\delta \dot{x}_1(t_0)$ ,  $\delta \dot{x}_2(t_0)$  та відкинемо члени вище першого порядку малості:

$$\hat{x}_i(t_0 + T) = x_i(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0)) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial x_i}{\partial x_1(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta x_1(t_0) + \\
& + \frac{\partial x_i}{\partial x_2(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta x_2(t_0) + \\
& + \frac{\partial x_i}{\partial \dot{x}_1(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta \dot{x}_1(t_0) + \\
& + \frac{\partial x_i}{\partial \dot{x}_2(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta \dot{x}_2(t_0), \\
& \hat{x}_i(t_0 + T) = \hat{x}_i(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0)) + \\
& + \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial x_1(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta x_1(t_0) + \\
& + \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial x_2(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta x_2(t_0) + \\
& + \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \dot{x}_1(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta \dot{x}_1(t_0) + \\
& + \frac{\partial \hat{x}_i}{\partial \dot{x}_2(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta \dot{x}_2(t_0), \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{19}$$

На підставі (15) та (16) отримуємо:

$$\begin{aligned}
\delta^p x_i(t_0) &= \frac{\partial x_i}{\partial x_1(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta x_1(t_0) + \\
& + \frac{\partial x_i}{\partial x_2(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta x_2(t_0) + \\
& + \frac{\partial x_i}{\partial \dot{x}_1(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta \dot{x}_1(t_0) + \\
& + \frac{\partial x_i}{\partial \dot{x}_2(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta \dot{x}_2(t_0), \\
\delta^p \dot{x}_i(t_0) &= \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_1(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta x_1(t_0) + \\
& + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_2(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta x_2(t_0) + \\
& + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_1(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta \dot{x}_1(t_0) + \\
& + \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{x}_2(t_0)}(t_0 + T, x_1(t_0), x_2(t_0), \dot{x}_1(t_0), \dot{x}_2(t_0))\delta \dot{x}_2(t_0), \quad i = 1, 2.
\end{aligned} \tag{20}$$

Таким чином, вектор

$$\overline{\delta^p x} (\delta^p x_1(t_0), \delta^p x_2(t_0), \delta^p \dot{x}_1(t_0), \delta^p \dot{x}_2(t_0))^T$$

зв'язаний з вектором

$$\overline{\delta x} (\delta x_1(t_0), \delta x_2(t_0), \delta \dot{x}_1(t_0), \delta \dot{x}_2(t_0))^T$$

співвідношенням:

$$\overline{\delta^p x} = C \overline{\delta x}, \quad (21)$$

де матриця  $C$  збігається з матрицею системи (10).

У такий спосіб проблема стійкості віброударного режиму коливань зводиться до аналізу власних чисел матриці  $C$ . Матриця  $C$  є не що інше, як матриця монодромії системи (10), а її власні числа є мультиплікатори цієї системи. Відомо [1], що про стійкість коливального режиму роблять висновок за значеннями мультиплікаторів системи, які для стійкого режиму коливань знаходяться всередині одиничного кола. Таким чином, коливальний режим стійкий, якщо усі мультиплікатори системи лежать в одиничному колі.

Відмітимо, що побудова матриці монодромії значно простіша, якщо удар моделюється силою контактної взаємодії, як було зроблено вище, ніж граничними умовами з використанням коефіцієнту відновлення  $R$ . В цьому випадку вектори  $\overline{\delta^p x}$  та  $\overline{\delta x}$  мають 5 компонент:

$$\overline{\delta^p x} (\delta^p x_1(t_0), \delta^p x_2(t_0), \delta^p \dot{x}_1(t_0), \delta^p \dot{x}_2(t_0), \delta^p \varphi)^T, \quad (22)$$

$$\overline{\delta x} (\delta x_1(t_0), \delta x_2(t_0), \delta \dot{x}_1(t_0), \delta \dot{x}_2(t_0), \delta \varphi)^T. \quad (23)$$

Відповідно матриця  $A$ , яка зв'язує вектори  $\overline{\delta^p x}$  та  $\overline{\delta x}$ , аналогічно (21)

$$\overline{\delta^p x} = A \overline{\delta x}, \quad (24)$$

має розмірність  $5 \times 5$ , а її елементи  $a_{ij}, i, j = 1, \dots, 5$  мають значно складніший вигляд.

#### 4. Амплітудно-частотні характеристики та визначення ділянок нестійкості

Для тіл віброударної системи, що зображена на рис. 1, за допомогою теорії та методики, які описані вище, були побудовані амплітудно-частотні характеристики та визначені зони нестійкості  $T$ -періодичного режиму (рис. 2).

Верхня крива відноситься до приєднаного (з масою  $m_1$ ) тіла, нижня – до основного (з масою  $m_2$ ). На обох кривих виділені зони нестійкого стану. В цих діапазонах частот  $T$ -періодичний режим стає нестійким і в дійсності не реалізується.



Параметри двомасової віброударної системи наведені в статті “Застосування методу продовження розв’язку за параметром до аналізу динамічної поведінки віброударної системи” в №90 цього збірника. В ній виконаний докладний аналіз коливального руху тіл віброударної системи в усіх діапазонах параметрів зовнішнього навантаження та представлені реальні динамічні стани, які існують в діапазонах як нестійкого, так і стійкого  $T$ -періодичного режиму коливань.

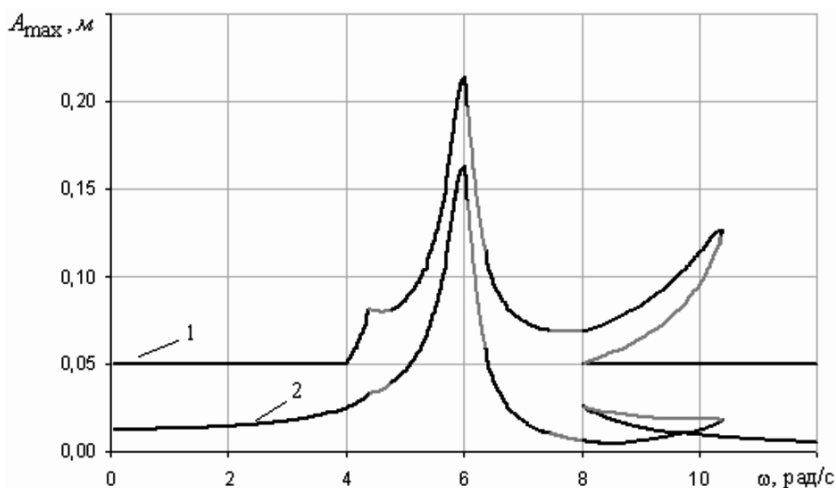


Рис. 2

Поки що відмітимо два цікавих моменти. Перший – при малих частотах напіврозмахи коливань приєднаного тіла майже не залежать від зовнішньої частоти. Другий – в деякому діапазоні великих частот одночасно існують два стійких  $T$ -періодичних режимів, кожний з них може існувати в дійсності. Реалізація того чи іншого режиму залежить від вихідних умов, тобто від стану, в якому знаходиться віброударна система в початковий момент.

### Висновок

Запропонований синтез модифікованої процедури продовження розв’язку за параметром та моделювання удару нелінійною силою контактної взаємодії, яка описується законом Герца, дозволяє побудувати амплітудно-частотні характеристики віброударної системи в усім діапазоні частот та виконати аналіз стійкості отриманих режимів коливань на базі теорії Флоке. Модифікований метод продовження розв’язку за параметром є надійним способом проведення повного дослідження режимів коливального руху віброударної системи.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гуляев В.И., Баженов В.А., Дехтярюк Е.С., Гоцуляк Е.А., Лизунов П.П. Устойчивость периодических режимов колебаний в нелинейных механических системах //Вища школа. – Львов, 1983. – 286 с.
2. Гуляев В.И., Дехтярюк Е.С. Построение периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений // Сопrotивление материалов и теория сооружений: Науч.-техн.сборник - К.:Будівельник. 1978.-Вып.32.-С.106-110.
3. Дехтярюк Е.С., Лизунов П.П., Попов С.Л. Реализация численного метода построения периодических решений нелинейных дифференциальных уравнений // Сопrotивление материалов и теория сооружений: Науч.-техн.сборник - К.:Будівельник. 1979.-Вып.35.- С.15-20.
4. Попов С.Л. Построение и анализ амплитудно-частотных характеристик нелинейных автономных динамических систем// Сопrotивление материалов и теория сооружений: Науч.-техн.сборник - К.:Будівельник. 1980.-Вып.37.-С.23-26.
5. Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г. Розвиток методу продовження за параметром для віброударних систем при моделюванні удару силою контактної взаємодії// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2011.-Вип. 87. — К.: КНУБА, 2011.- С. 63-73.
6. Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г. Реалізація методу продовження за параметром для віброударних систем при побудові кривих навантаження// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2011.-Вип. 88. — К.: КНУБА, 2011.- С. 56-64.
7. Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Гончаренко С.М. Стійкість сталих режимів коливань віброударних систем при періодичному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2001.-Вип.69.-С.10-18.
8. Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г. Модифікація методу продовження рішення по параметру для аналізу динаміки віброударних систем //Пробл. Прочности. - 2012. (Прийнята до друку).
9. Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Гончаренко С.М. Чисельні методи побудови амплітудно-частотних характеристик періодичних режимів коливань віброударних систем // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник - К.: КНУБА, вип. 70. 2002. - С. 69-81.
10. Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Гончаренко С.М. Аналіз усталених віброударних процесів в пружних системах при внутрішньому ударному контакті // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2003.-Вип.73.- сс.31-44.
11. Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Лукьянченко О.А. Численные исследования динамических процессов в виброударных системах при моделировании удара силой контактного взаимодействия// Пробл. прочности. - 2008. - №6. – С. 82-90.
12. Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Гончаренко С.Н. Сравнительный анализ способов моделирования контактного взаимодействия в виброударных системах //Пробл. прочности. - 2009. - №4. – С. 69-77.
13. S.R. Bishop Impact oscillators // Philos. Trans. R. Sot. London A 347, 341-351 (1994).
14. Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел.– М.:Стройиздат, 1965. –448 с.
15. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. –М.:Мир, 1989. –509 с.
16. Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г. Влияние конструктивных параметров виброударной системы на ее динамику //Пробл. прочности. - 2011. - №1. – С. 122-133.

Стаття надійшла до редакції 02.07.2012 р.

*Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г.*

**ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ  
ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМ**

В статье изложены теоретические основы и особенности применения модифицированного метода продолжения решения по параметру для исследования динамики виброударных систем, в частности для построения амплитудно-частотных характеристик, и анализа устойчивости их колебательного движения при моделировании удара силой контактного взаимодействия.

*Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.*

**THEORETICAL PRINCIPLES OF DYNAMIC BEHAVIOR ANALYSIS FOR  
VIBROIMPACT SYSTEMS**

The theoretical principles and features of using of continuation after parameter method are described in this article. This method is used for research of vibroimpact systems dynamics, in particular for the construction of Frequency response. This method is used also for stability analysis of oscillatory motion. The impact is simulated by the nonlinear contact interaction force.