УДК 539.3

В.К. Чибіряков, д-р техн. наук
А.М. Станкевич, канд. техн. наук
А.А. Сташук

ЗНИЖЕННЯ ВИМІРНОСТІ РІВНЯНЬ СТАТИКИ ТОВСТОЇ ПЛАСТИНИ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ УЗАГАЛЬНЕНИМ МЕТОДОМ ПРЯМИХ

Метод прямих є одним з найбільш поширених засобів зниження вимірності рівнянь теорії пружності. Як правило, він застосовується для побудови редукованих рівнянь для товстих пластин та оболонок сталої товщини. При цьому по поперечній координаті для зниження вимірності застосовується метод скінчених різниць. Застосування проекційного методу з тією ж метою [1] значно спрощує і узагальнює процес побудови редукованих рівнянь. Це узагальнення дає можливість поширити запропоновану в [1] процедуру на пластини змінної товщини, причому замість прямих тут будемо мати криві лінії, але назву метода не змінюємо.

Вихідні рівняння.

В постановці плоскої задачі теорії пружності [2] розглядається товста пластина, віднесена до декартової системи координат в постановці плоскої деформації, переріз якої займає область $[h^{-}(x), h^{+}(x),]\otimes[0,l]$ (рис. 1).

По граничних поверхнях пластини задано граничні умови загального вигляду, які моделюються пружними в'язями із заданими коефіцієнтами жорсткості [3] (рис. 2, 3, 4). Тут Δ – кінематичні дії з боку оточуючого середовища, віднесені до одиниці площі проекції ділянки граничних поверхонь на осі OX а торцевих площин на OY; q – зовнішні навантаження на граничні поверхні, віднесені до одиниці їх площі відповідно; k – жорсткості пружних в'язів, які приймаються сталими по всій поверхні; u, v – компоненти вектора переміщень у відповідній точці граничної поверхні.

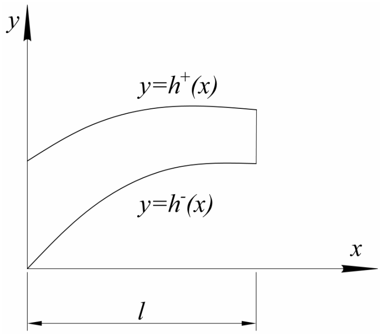

Рис. 1

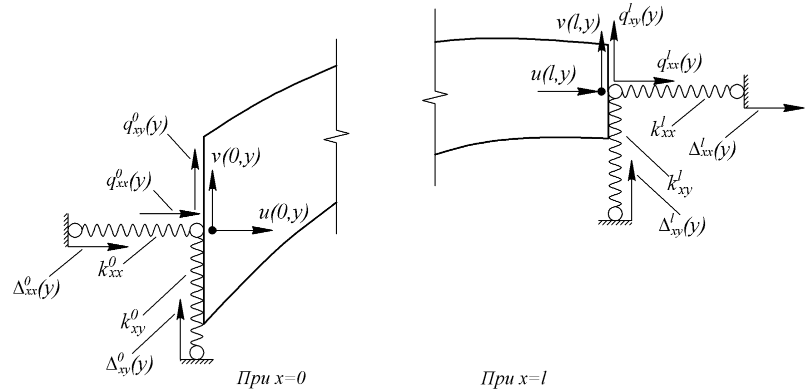

Рис. 2

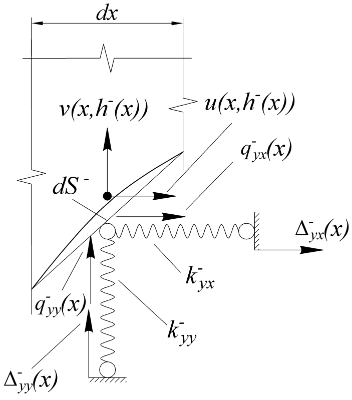

Рис. 3

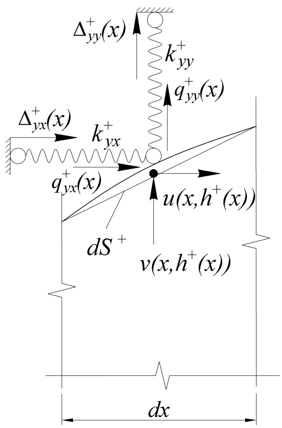

Рис. 4

З таких закріплень точок граничних поверхонь випливають граничні умови, яким повинні задовольняти розрахункові функції, що описують напружено-деформований стан (НДС) об’єкту, що розглядається.

Будемо мати

при $x = 0$:

$$k^0_{xx} \cdot u(o,y) - \sigma^0_x = q^0_{xx}(y) + k^0_{xx} \cdot \Delta^0_{xx}(y), \tag{1}$$

$$k^0_{xy} \cdot v(o,y) - \tau^0_{xy} = q^0_{xy}(y) + k^0_{xy} \cdot \Delta^0_{xy}(y), \tag{2}$$

при $x = l$

$$k_{xx}^{l}\cdot u(l,y)-\sigma_{x}^{l}=q_{xx}^{l}(y)+k_{xx}^{l}\cdot\Delta_{xx}^{l}(y), \tag{3}$$

$$k_{xy}^{l}\cdot v(l,y)-\tau_{xy}^{l}=q_{xy}^{l}(y)+k_{xy}^{l}\cdot\Delta_{xy}^{l}(y), \tag{4}$$

при $y=h^{-}(x)$

$$\sigma_{x}(x,h^{-}(x))\cdot\frac{dh^{-}}{dx}-\tau_{xy}(x,h^{-}(x))=q_{yx}^{-}+k_{yx}^{-}\cdot\Delta_{yx}^{-}(x)-k_{yx}^{-}\cdot u(x,h^{-}(x)), \tag{5}$$

$$\sigma_{y}(x,h^{-}(x))-\tau_{xy}(x,h^{-}(x))\cdot\frac{dh^{-}}{dx}=-q_{yy}^{-}-k_{yy}^{-}\cdot\Delta_{yy}^{-}(x)+k_{yy}^{-}\cdot v(x,h^{-}(x)), \tag{6}$$

при $y=h^{+}(x)$

$$\sigma_{x}(x,h^{+}(x))\cdot\frac{dh^{+}}{dx}-\tau_{xy}(x,h^{+}(x))=-q_{yx}^{+}-k_{yx}^{+}\cdot\Delta_{yx}^{+}(x)+k_{yx}^{+}\cdot u(x,h^{+}(x)), \tag{7}$$

$$\sigma_{y}(x,h^{+}(x))-\tau_{xy}(x,h^{+}(x))\cdot\frac{dh^{+}}{dx}=q_{yy}^{+}+k_{yy}^{+}\cdot\Delta_{yy}^{+}(x)-k_{yy}^{+}\cdot v(x,h^{+}(x)). \tag{8}$$

Варіювання величинами коефіцієнтів жорсткості пружних стержнів дозволяє врахувати всі стандартні варіанти граничних умов.

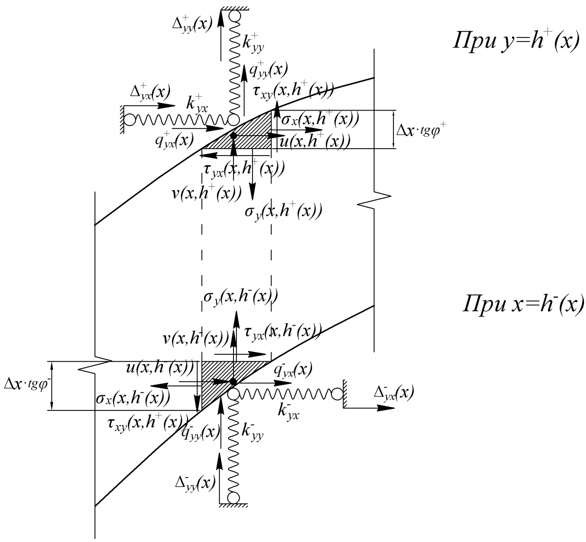

Рис. 5

НДС пластини можна описати системою диференціальних рівнянь теорії пружності (плоска деформація) відносно компонент вектора переміщень $u(x,y), v(x,y)$ та компонент тензора деформацій $\sigma_x(x,y), \tau_{xy}(x,y), \sigma_y(x,y)$, які є системою диференціальних рівнянь в часткових похідних першого порядку:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^*}{\partial x} = -\dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}\cdot\dfrac{\partial v^*}{\partial y} + \dfrac{\mu}{\lambda+2\mu}\cdot\sigma_x \\ \dfrac{\partial v^*}{\partial x} = -\dfrac{\partial u^*}{\partial y} + \tau_{xy} \\ \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} = -\dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} - X \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} = -\dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} - Y \\ \sigma_y = \dfrac{\lambda}{\mu}\cdot\dfrac{\partial u^*}{\partial x} + \dfrac{\lambda+2\mu}{\mu}\cdot\dfrac{\partial v^*}{\partial y} \end{cases} \tag{9}$$

Тут позначено: $u^* = \mu\cdot u, v^* = \mu\cdot v$; X, Y – об'ємні сили.

Для прогнозування НДС необхідно знайти розв'язок системи рівнянь, невідомі функції яких повинні задовольняти граничним умовам (1)-(8), тобто маємо граничну задачу (1)-(9), яка враховує не тільки об'ємні сили $X(x,y)$ та $Y(x,y)$, але й силові та кінематичні дії в точках граничних поверхонь.

Для розв'язання цієї задачі пропонується комбінована методика, яка наближено розв'язує граничну задачу в 2 етапи. На першому етапі двовимірна гранична задача зводиться до одновимірної, яка є системою звичайних диференціальних рівнянь, що визначена на відрізку $[0,l]$, з редукованими граничними умовами на кінцях цього відрізку. На другому етапі пропонується одновимірну граничну задачу розв'язувати ефективним чисельним методом С.К.Годунова [4].

Дана робота присвячена реалізації першого етапу комбінованої методики, тобто зведенню вихідної двовимірної задачі (1)-(9) до одновимірної.

Для зведення двовимірних диференціальних рівнянь (9) до системи звичайних диференціальних рівнянь застосуємо узагальнення методу прямих [1].

На область, яку займає переріз пластини, накладаємо систему ліній, які є геометричними місцями точок, що поділяють кожну висоту пластини $h(x) = h^+(x) - h^-(x)$ на $(n-1)$ рівних ділянок $\Delta y(x) = h(x)/(n-1)$ (рис. 6).

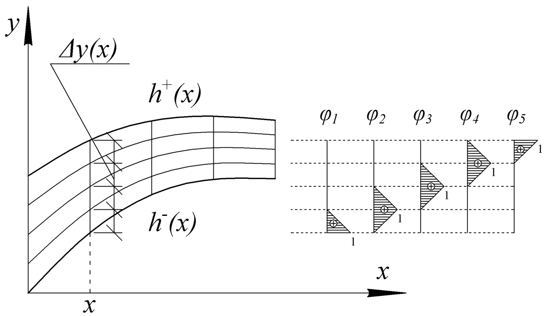

Рис. 6

При кожному x виберемо систему фінітних функцій

$$\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x) ... \varphi_n(x)\},$$

де $\varphi_i(x) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{якщо } i = j \\ 0, \text{якщо } i \neq j \end{cases}$ є кусково-лінійними функціями (рис.6). Особливістю цих функцій є те, що вони залежать не тільки від поперечної координати y, як в [1], але й від повздовжньої координати x, що значно ускладнює вигляд одновимірних розрахункових рівнянь, які отримані у [1].

За методикою, запропонованою в [1], побудуємо систему редукованих одновимірних рівнянь, при цьому підкреслимо нові особливості, які з'являються в зв'язку з врахуванням змінної товщини.

Перше рівняння з системи (9) помножимо скалярно на $\varphi_i(x)$ і проінтрегруємо від $h^-(x)$ до $h^+(x)$. Тут, як і в роботі [1] будемо застосовувати термінологію тензорного числення. Як і в згаданій роботі, скалярний добуток функції на базову функцію основного базиса розглядається як коваріантна компонента цієї функції, тобто $\sigma_x(x,y)$ співставляється $\sigma_{xi}(x)$. На відміну від [1] складова $\dfrac{\partial u^*(x,y)}{\partial x}$ при редукуванні значно ускладнюється. Там, в зв'язку із незалежністю товщини від поздовжньої координати, знак похідної можна було виносити за знак інтеграла. Тут це необхідно робити інакше. Розглянемо це питання докладніше. Для цього розглянемо $\int\limits_{h^-(x)}^{h^+(x)} \dfrac{\partial u^*(x,y)}{\partial x} \varphi_i(x) dy$. Для того, щоб винести за знак інтегрувала похідну $\dfrac{\partial}{\partial x}$, розглянемо формулу диференціювання інтеграла, що залежить від параметра x та має змінні межі інтегрування:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{h^-(x)}^{h^+(x)} f(x,y)\cdot\varphi_i(x,y)dy=\int\limits_{h^-(x)}^{h^+(x)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot\varphi_i(x,y)dy+\int\limits_{h^-(x)}^{h^+(x)} f(x,y)\cdot\frac{\partial\varphi_i(x,y)dy}{\partial x}+$$

$$+\frac{dh^+(x)}{dx}f(x,h^+(x))\cdot\varphi_i(x,h^+(x))-\frac{dh^-(x)}{dx}f(x,h^-(x))\cdot\varphi_i(x,h^-(x)),\quad (10)$$

з чого випливає

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{h^-(x)}^{h^+(x)} f(x,y)\cdot\varphi_i(x,y)dy=\frac{df_i(x)}{dx}-\int\limits_{h^-(x)}^{h^+(x)} f(x,y)\cdot\frac{\partial\varphi_i(x,y)dy}{\partial x}-$$

$$-\frac{dh^+(x)}{dx}f(x,h^+(x))\cdot\varphi_i(x,h^+(x))+\frac{dh^-(x)}{dx}f(x,h^-(x))\cdot\varphi_i(x,h^-(x)).$$

Враховуючи, що на граничних лініях базові функції $\varphi_1(x)$ та $\varphi_n(x)$ дорівнюють одиниці, можна записати співвідношення:

$$\begin{aligned}\varphi_i(x,h^-(x))&=\varphi_1(x,h^-(x))=\delta_{i1},\\ \varphi_i(x,h^+(x))&=\varphi_1(x,h^+(x))=\delta_{in}.\end{aligned}\quad (11)$$

Підставляючи (11) в попереднє співвідношення, отримаємо:

$$\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{h^-(x)}^{h^+(x)} f(x,y)\cdot\varphi_i(x,y)dy=\frac{df_i(x)}{dx}-\int\limits_{h^-(x)}^{h^+(x)} f(x,y)\cdot\frac{\partial\varphi_i(x,y)dy}{\partial x}-$$

$$-\frac{dh^+(x)}{dx}f(x,h^+(x))\cdot\delta_{in}+\frac{dh^-(x)}{dx}f(x,h^-(x))\cdot\delta_{i1}.\quad (12)$$

Якщо функція $f(x,y)$ є переміщенням, то значення переміщень на лініях, що узагальнюють прямі методу прямих визначаємо як лінійну комбінацію елементів базису $f(x,y)=f^i(x)\cdot\varphi_i(x,y)$, а їх значення на границях області $y=h^-(x)$ та $y=h^+(x)$ як $f(x,h^-(x))=f^1(x)$, $f(x,h^+(x))=f^n(x)$.

Позначимо

$$\int\limits_{h^-(x)}^{h^+(x)}\frac{\partial\varphi_i(x,y)}{\partial x}\cdot f^j(x)dy=\frac{\partial\Delta(x)}{\partial x}\cdot d_{ij},$$

де

$$\{d_{ij}\}=\begin{bmatrix} 1/6 & -1/6 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & -1/6 & -1/6 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & -1/6 & \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & -1/6 & -1/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1/3 & -1/6 & -1/6 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

Тоді (12) отримає вигляд:

$$\int\limits_{h^-(x)}^{h^+(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot\varphi_i(x,y)dy=\frac{df_i(x)}{dx}-\frac{\partial\Delta(x)}{\partial x}\cdot d_{ij}\cdot f^j(x)-$$

$$-\frac{dh^+(x)}{dx}f^n(x)\cdot\delta_{in}+\frac{dh^-(x)}{dx}f^1(x)\cdot\delta_{i1} \qquad (13)$$

(індекси 1 та n – фіксовані, по ним сума не передбачається).

Якщо функція $f(x,y)$ визначає напруження, то для виключення значень функції напружень на граничних лініях застосуємо граничні умови на граничних поверхнях $y=h^-(x)$ та $y=h^+(x)$ (5)-(8).

В результаті отримуємо необхідні формули наступним чином:

Розглянемо $\int\limits_{h^-(x)}^{h^+(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot\varphi_i(x,y)dy$.

Якщо $f(x,y)$ – функція переміщень, то цей інтеграл обчислюємо так:

$$f(x,y)=f^j(x)\cdot\varphi_j(x,y),$$

$$\int\limits_{h^-(x)}^{h^+(x)} f^j(x)\cdot\frac{\partial\varphi_j(x,y)}{\partial y}\cdot\varphi_i(x,y)dy=f^j(x)\cdot\int\limits_{h^-(x)}^{h^+(x)}\varphi_i(x,y)\cdot\frac{\partial\varphi_j(x,y)}{\partial y}dy=f^j(x)\cdot b_{ij};$$

Якщо $f(x,y)$ – функція напружень, то інтегруємо частинами:

$$\int\limits_{h^-(x)}^{h^+(x)} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot\varphi_i(x,y)dy=\Big[f(x,y)\cdot\varphi_j(x,y)dy\Big]_{h^-(x)}^{h^+(x)}-\int\limits_{h^-(x)}^{h^+(x)} f(x,y)\cdot\frac{\partial\varphi_i(x,y)dy}{\partial y}=$$

$$=\Big[f(x,y)\cdot\varphi_j(x,y)dy\Big]_{h^-(x)}^{h^+(x)}-f^j(x)\cdot b,$$

$$\int\limits_{h^-(x)}^{h^+(x)} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x}\cdot\varphi_i(x,y)dy=\frac{d\sigma_{xi}(x)}{dx}-\frac{\partial\Delta(x)}{\partial x}\cdot d_{ij}\cdot{\sigma_x}^j(x)-$$

$$-\frac{dh^{+}(x)}{dx}\sigma_x(x,h^{+}(x))\cdot\delta_{1n}+\frac{dh^{-}(x)}{dx}\sigma_x(x,h^{-}(x))\cdot\delta_{11},$$

$$\int\limits_{h^{-}(x)}^{h^{+}(x)}\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}\cdot\varphi_i(x,y)dy=\frac{d\tau_{xyi}(x)}{dx}-\frac{\partial\Delta(x)}{\partial x}\cdot d_{ij}\cdot\tau_{xy}{}^{j}(x)-$$

$$-\frac{dh^{+}(x)}{dx}\tau_{xy}(x,h^{+}(x))\cdot\delta_{1n}+\frac{dh^{-}(x)}{dx}\tau_{xy}(x,h^{-}(x))\cdot\delta_{11}.$$

В результаті множення на $\varphi_i(x,y)$ та інтегрування по y в межах від $h^{-}(x)$ до $h^{+}(x)$ після нескладних перетворень над першими двома рівняннями системи (9) отримаємо рівняння:

$$\begin{cases}\dfrac{du_i^{*}(x)}{dx}=-\dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}b_{ij}\cdot v^{*j}(x)+\dfrac{\mu}{\lambda+2\mu}\sigma_{xi}(x)-\\ -\dfrac{dh^{-}(x)}{dx}u^{1}(x)\cdot\delta_{i1}+\dfrac{dh^{+}(x)}{dx}u^{n}(x)\cdot\delta_{in}+\dfrac{\partial\Delta(x)}{\partial x}d_{ij}\cdot u^{*j}(x)\\ \dfrac{dv_i^{*}(x)}{dx}=-b_{ij}\cdot u^{*j}(x)+\tau_{xyi}-\dfrac{dh^{-}(x)}{dx}v^{1}(x)\cdot\delta_{i1}+\\ +\dfrac{dh^{+}(x)}{dx}v^{n}(x)\cdot\delta_{in}+\dfrac{\partial\Delta(x)}{\partial x}d_{ij}\cdot v^{*j}(x).\end{cases}\tag{14}$$

Враховуючи співвідношення, граничні умови (5)-(8) та виключаючи σ_{yi} за допомогою співвідношення [1] :

$$\sigma_{yi}=\frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\cdot b_{ij}\cdot v^{*j}(x)+\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\sigma_{xi}(x),$$

отримуємо:

$$\begin{cases}\dfrac{d\sigma_{xi}(x)}{dx}=\begin{bmatrix}k_{yx}^{-}u(x,h^{-}(x))\\0\\\vdots\\0\\k_{yx}^{+}u(x,h^{+}(x))\end{bmatrix}+b_{ij}\cdot\tau_{xy}^{j}(x)-\begin{bmatrix}q_{yx}^{-}\\0\\\vdots\\0\\q_{yx}^{+}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}k_{yx}^{-}\Delta_{yx}^{-}(x)\\0\\\vdots\\0\\k_{yx}^{+}\Delta_{yx}^{+}(x)\end{bmatrix}+\dfrac{\partial\Delta(x)}{\partial x}d_{ij}\cdot\sigma_x^{j}(x)-X_i\\ \dfrac{d\tau_{xyi}(x)}{dx}=\dfrac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu}\cdot b_{ij}\cdot v^{*j}(x)+\begin{bmatrix}k_{yx}^{-}u(x,h^{-}(x))\\0\\\vdots\\0\\k_{yx}^{+}u(x,h^{+}(x))\end{bmatrix}+\dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}\sigma_{xi}(x)-\begin{bmatrix}q_{yy}^{-}\\0\\\vdots\\0\\q_{yy}^{+}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}k_{yy}^{-}\Delta_{yy}^{-}(x)\\0\\\vdots\\0\\k_{yy}^{+}\Delta_{yy}^{+}(x)\end{bmatrix}+\dfrac{\partial\Delta(x)}{\partial x}d_{ij}\cdot\tau_{xy}^{j}(x)-Y_i\end{cases}\tag{15}$$

Система рівнянь (14), (15) є системою $4n$ звичайних диференціальних рівнянь, але деякі невідомі входять до цих рівнянь як в коефіцієнтах так і в моментах. Щоб позбутися цього недоліку, необхідно привести всі редуковані невідомі до одного типу. Для цього використовуємо тензорні операції опускання та піднімання індексів за допомогою метричних тензорів
g^{ij} та g_{ij} [1].

Система рівнянь (14), (15) є замкненою системою $4n$ звичайних диференціальних рівнянь відносно невідомих моментів $u_i(x)$, $v_i(x)$, $\sigma_{xi}(x)$ та $\tau_{xyi}(x)$ $i=\overline{1,n}$. Для знаходження її єдиного розв'язку, що відповідає конкретному напружено-деформованому стану, необхідно задати граничні умови при $x=0$ та $x=l$. Ці умови отримуються з вихідних граничних умов (1)-(4), при цьому процедура редукування не залежить від повздовжньої координати і редуковані граничні умови співпадають з отриманими в [1].

Граничну задачу для системи звичайних диференціальних пропонується розв'язувати чисельно за допомогою метода дискретної ортогоналізації С.К.Годунова [4].

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т.* До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих // Містобудування та територіальне планування. – 2010. – випуск 36 – с. 413 – 423.
2. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости, 5 изд., М., 1966.
3. *Чибіряков В.К., Смоляр А.М.* Теорія товстих пластин та оболонок: Монографія. – Черкаси: ЧДТУ, 2002. – 160 с: іл.
4. *Годунов С.К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. – 1961. – т.16 – вып.3. – с.171 - 174.

Стаття надійшла до редакції 21.08.2012 р.

Чибиряков В.К., Станкевич А.Н., Сташук А.А.

СНИЖЕНИЕ РАЗМЕРНОСТИ УРАВНЕНИЙ СТАТИКИ ТОЛСТЫХ ПЛАСТИН ПЕРЕМЕННОЙ ТОЛЩИНЫ ОБОБЩЕННЫМ МЕТОДОМ ПРЯМЫХ

Метод прямых является одним из наиболее распространенных способов снижения размерности уравнений теории упругости. Как правило, он применяется для построения редуцированных уравнений для толстых пластин и оболочек постоянной толщины. При этом по поперечной координате для снижения размерности применяется метод конечных разностей. Применение проекционного метода с той же целью [1] значительно упрощает и обобщает процесс построения редуцированных уравнений. Это обобщение дает возможность распространить предложенную в [1] процедуру на пластины переменной толщины, причем вместо прямых здесь будем иметь кривые линии, но название метода не меняем.

Chybiryakov V.K., Stankevich A.M., Stashuk A.A.

DIMENSIONAL REDUCTION STATIC EQUATIONS OF LARGE PLATE OF VARIABLE THICKNESS BY GENERALIZED METHOD OF “LINES”

Method of “lines” is one of the most common means of dimensional reducing equations of theory of elasticity. Typically, it is used to build the reduced equations for thick plates and shells of constant thickness. On the transverse coordinate for dimension reduction used the method of finite differences. Application of the projection method for the same purpose [1] simplifies and summarizes the process of constructing reduced equations. This generalization makes it possible to extend the proposed in [1] procedure on plates of variable thickness, and instead of lines we have curves, but do not change the name of the method.