

УДК 539.3

О.В. Костіна, канд. техн. наук

## ВЕКТОРНА АПРОКСИМАЦІЯ ФУНКЦІЇ ПЕРЕМІЩЕНЬ КРИВОЛІНІЙНОГО СКІНЧЕННОГО ЕЛЕМЕНТА У ЗАДАЧІ СТІЙКОСТІ КІЛЬЦЯ

Виконано аналітичне тестування нової схеми методу скінченних елементів, що базується на векторній апроксимації функції переміщень. Тестування проведено шляхом розв'язання двох задач про деформування кільця за допомогою запропонованої схеми і традиційної неекторної схеми дискретизації. Виявлені переваги векторної апроксимації у точності розв'язку.

У криволінійній системі координат, як відомо, при операціях з векторними функціями необхідно суворо дотримуватись правил векторного аналізу [1]. Ідея нової схеми методу скінченних елементів полягає в апроксимації вектор-функції, а не окремо взятих скалярних функцій переміщень. Запропонований метод викладений у варіаційній постановці. Вектор-функція переміщень криволінійного скінченного елемента подається у вигляді ряду Маклорена

$$\begin{aligned} \vec{u}(x^1, x^2) &= \vec{u}^0 + \frac{\partial \vec{u}^0}{\partial x^\alpha} x^\alpha + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \vec{u}^0}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} x^\alpha x^\beta + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 \vec{u}^0}{\partial x^\alpha \partial x^\beta \partial x^\gamma} x^\alpha x^\beta x^\gamma + \dots = \\ &= (u_i^0 + u_{i\alpha}^0 x^\alpha + \frac{1}{2} u_{i\alpha\beta}^0 x^\alpha x^\beta + \frac{1}{6} u_{i\alpha\beta\gamma}^0 x^\alpha x^\beta x^\gamma + \dots) \vec{e}^i, \end{aligned} \quad (1)$$

коефіцієнтами якого є значення компонент вектор-функції переміщень та її коваріантних похідних, які визначені в центрі скінченного елемента.

Необхідно підкреслити, що апроксимуючий поліном явно містить вектор жорстких зміщень скінченного елемента довільної криволінійної форми, завдяки чому виконується необхідна умова скінченноелементної дискретизації, а саме, матриця жорсткості має шість нульових власних значень. І тому, задовільняючи умові жорстких зміщень, дана методика у багатьох задачах про деформування оболонок покращує збіжність розв'язків.

Розрахункові співвідношення теорії тонких оболонок у загальній криволінійній системі координат виведені у відповідності до понять загальної теорії поверхонь у векторному поданні [2]. Основні положення запропонованої схеми методу скінченних елементів неодноразово опубліковані у роботах [3-7]. Виведення матриці жорсткості з використанням векторної апроксимації виявилось значно простішим ніж у випадку скалярної апроксимації. Достовірність запропонованої

методики доведено шляхом розв'язання низки тестових прикладів і реальних задач про напружено-деформований стан тонких оболонок. Наступним кроком є її розвиток шляхом застосування для розв'язання задач стійкості.

Розглянемо дві найпростіші задачі про деформування кільця, а саме жорстке переміщення та чистий згин за формою втрати стійкості. На рис. 1 наведені геометричні характеристики кільця, причому координати  $x^1$  і  $x^3$  направлені відповідно вздовж дуги та перпендикулярно до її дотичної.

Формули, що визначають метрику і форму кільця, запишемо у наступному вигляді:

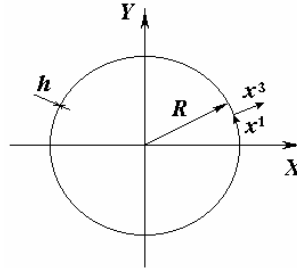


Рис. 1. Геометрія кільця

$$\begin{aligned} X &= R \cos(Ax^1), & Y &= R \sin(Ax^1), \\ x^1 &= 1, 2, \dots, m, & A &= \frac{2\pi}{m}, & \sqrt{a_{11}} &= AR, & b_1^1 &= -\frac{1}{R}. \end{aligned} \quad (2)$$

Наведемо вирази похідних від векторів локального базису

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{e}^1}{dx^1} &= -\frac{1}{R}\bar{e}^3, & \frac{d^2\bar{e}^1}{d(x^1)^2} &= -\frac{a_{11}}{R^2}\bar{e}^1, & \frac{d^3\bar{e}^1}{d(x^1)^3} &= -\frac{a_{11}}{R^3}\bar{e}^3, \\ \frac{d\bar{e}^3}{dx^1} &= \frac{a_{11}}{R}\bar{e}^1, & \frac{d^2\bar{e}^3}{d(x^1)^2} &= -\frac{a_{11}}{R}\bar{e}^3 \end{aligned} \quad (3)$$

і коваріантних похідних від компонент вектора переміщень

$$\begin{aligned} u_{1|1} &= \frac{du_1}{dx^1} + \frac{a_{11}}{R}u_3, & u_{3|1} &= \frac{du_3}{dx^1} - \frac{1}{R}u_1, & u_{3|11} &= -\frac{2}{R}\frac{du_1}{dx^1} + \frac{d^2u_3}{d(x^1)^2} - \frac{a_{11}}{R^2}u_3, \\ u_{3|111} &= -\frac{3}{R}\frac{d^2u_1}{d(x^1)^2} + \frac{a_{11}}{R^3}u_1 + \frac{d^3u_3}{d(x^1)^3} - \frac{3a_{11}}{R^2}\frac{du_3}{dx^1}. \end{aligned} \quad (4)$$

Розглянемо жорстке переміщення кільця, яке визначається функціями тангенціальної та нормальної компонент вектор-функції переміщень

$$u_1 = -\sqrt{a_{11}} \sin(Ax^1), \quad u_3 = \cos(Ax^1). \quad (5)$$

Визначимо коваріантні похідні заданої вектор-функції:

$$\begin{aligned}
 u_{1|1} &= -RA^2 \cos(Ax^1) + RA^2 \cos(Ax^1) = 0, \\
 u_{3|1} &= A \sin(Ax^1) - A \sin(Ax^1) = 0, \\
 u_{3|11} &= 2A^2 \cos(Ax^1) - A^2 \cos(Ax^1) - A^2 \cos(Ax^1) = 0, \\
 u_{3|111} &= -3A^3 \sin(Ax^1) + A^3 \sin(Ax^1) - A^3 \sin(Ax^1) + 3A^3 \sin(Ax^1) = 0,
 \end{aligned} \tag{6}$$

які, як видно, дорівнюють нулю і тому всі три деформації, а саме, тангенціальні  $\varepsilon_{11}$ , згинальні  $\mu_{11}$ , та кути повороту  $\vartheta_1$  також точно дорівнюють нулю  $\varepsilon_{11} = \mu_{11} = \vartheta_1 = 0$ .

Форма втрати стійкості кільця описується виразами

$$u_1 = \sqrt{a_{11}} \sin(2Ax^1), \quad u_3 = -2 \cos(2Ax^1). \tag{7}$$

Визначимо деформації кожного скінченного елемента і суми інтегралів їх квадратів

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{11} &= u_{1|1}^0 = 2RA^2 \cos(2Ax^1) - 2RA^2 \cos(2Ax^1) = 0, \\
 \vartheta_1 &= - \left[ 3A \sin(2Ax_0^1) + 6A^2 \cos(2Ax_0^1)x^1 - \frac{15}{2}A^3 \sin(2Ax_0^1)(x^1)^2 \right], \\
 \sum_{x_0^1=1-0,5}^m \int_{-0,5}^{0,5} \vartheta_1^2 dx^1 &= \frac{9}{2}mA^2 - \frac{3}{8}mA^4 + \frac{45}{128}mA^6, \\
 \mu_{11} &= 6A^2 \cos(2Ax_0^1) - 15A^2 \sin(2Ax_0^1)x^1, \\
 \sum_{x_0^1=1-0,5}^m \int_{-0,5}^{0,5} \mu_{11}^2 dx^1 &= 18mA^4 + \frac{225}{24}mA^6.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Підставивши залежності (8) у вираз потенціальної енергії кільця і, враховуючи рівність її нулю

$$\Delta \Pi = \sum_{x_0^1=1-0,5}^m \int_{-0,5}^{0,5} \left( \frac{1}{2}EI \frac{\mu_{11}^2}{a_{11}^2} + \frac{1}{2} \frac{T_{(11)}}{a_{11}} \vartheta_1^2 \right) \sqrt{a_{11}} dx^1 = 0, \tag{9}$$

знайдемо критичне зусилля стиску кільця:

$$T_{(11)}^{kp} = - \frac{EI}{a_{11}} \frac{\sum_{x_0^1=-0,5}^m \int_{-0,5}^{0,5} \mu_{11}^2 dx^1}{\sum_{x_0^1=-0,5}^m \int_{-0,5}^{0,5} \vartheta_1^2 dx^1} = - \frac{4EI}{R^2} \frac{1 + \frac{225}{108} \frac{\pi^2}{m^2}}{1 - \frac{1}{3} \frac{\pi^2}{m^2} + \frac{289}{360} \frac{\pi^4}{m^4}}. \quad (10)$$

Далі, маючи точне значення критичного зусилля кільця у вигляді

$$T_{(11)}^{kp} = - \frac{4EI}{R^2}, \quad (11)$$

можемо зробити висновок, що помилка не залежить від відношення  $R/h$  і при  $m=10$  складає 20%.

Тепер розглянемо ті ж задачі при традиційній, неекстремальній апроксимації функції переміщень

$$u_1 = u_1^0 + \frac{du_1^0}{dx^1} x^1, \quad u_3 = u_3^0 + \frac{du_3^0}{dx^1} x^1 + \frac{1}{2} \frac{d^2 u_3^0}{d(x^1)^2} (x^1)^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3 u_3^0}{d(x^1)^3} (x^1)^3. \quad (12)$$

У цьому випадку деформації мають наступний вигляд:

$$\varepsilon_{11} = \frac{du_1}{dx^1} - b_{11} u_3, \quad \vartheta_1 = - \left( \frac{du_3}{dx^1} + b_{11}^1 u_1 \right), \quad \mu_{11} = \frac{d^2 u_3}{d(x^1)^2} + b_{11}^1 \frac{du_1}{dx^1}. \quad (13)$$

Визначимо деформації на функціях жорсткого переміщення:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{du_1}{dx^1} - b_{11} u_3 = \frac{du_1^0}{dx^1} - b_{11} \left[ u_3^0 + \frac{du_3^0}{dx^1} x^1 + \frac{1}{2} \frac{d^2 u_3^0}{d(x^1)^2} (x^1)^2 + \frac{1}{6} \frac{d^3 u_3^0}{d(x^1)^3} (x^1)^3 \right] = \\ &= -RA^2 \cos(Ax_0^1) + RA^2 \cos(Ax_0^1) - RA^3 \sin(Ax_0^1) x^1 - \frac{1}{2} RA^4 \cos(Ax_0^1) (x^1)^2 + \\ &+ \frac{1}{6} RA^5 \sin(Ax_0^1) (x^1)^3 \neq 0, \\ \vartheta_1 &= - \left[ -A \sin(Ax_0^1) - A^2 \cos(Ax_0^1) x^1 + \frac{1}{2} A^3 \sin(Ax_0^1) (x^1)^2 + A \sin(Ax_0^1) \right] \neq 0, \\ \mu_{11} &= -A^2 \cos(Ax_0^1) + A^3 \sin(Ax_0^1) x^1 + A^2 \cos(Ax_0^1) \neq 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Як бачимо, жодна з них не дорівнює нулю.

Тепер виведемо деформації відповідно до форми втрати стійкості кільця:

$$u_1 = \sqrt{a_{11}} \sin(2Ax^1), \quad u_3 = -2 \cos(2Ax^1),$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= 2RA^2 \cos(2Ax_0^1) - 2RA^2 \cos(2Ax_0^1) + 8RA^3 \sin(2Ax_0^1)x^1 + \\ &+ 8RA^4 \cos(2Ax_0^1)(x^1)^2 - \frac{16}{3}RA^5 \sin(2Ax_0^1)(x^1)^3 \neq 0, \\ \vartheta_1 &= -3A \sin(2Ax_0^1) - 6A^2 \cos(2Ax_0^1)x^1 + 8A^3 \sin(2Ax_0^1)(x^1)^2, \\ \mu_{11} &= 6A^2 \cos(2Ax_0^1) - 16A^3 \sin(2Ax_0^1)x^1. \end{aligned} \quad (15)$$

З рівняння

$$\Delta \Pi = \sum_{x_0^1=-0,5}^m \int_{-0,5}^{0,5} \left( \frac{1}{2} EI \frac{\mu_{11}^2}{a_{11}^2} + \frac{1}{2} EF \frac{\varepsilon_{11}^2}{a_{11}^2} + \frac{1}{2} \frac{T_{(11)}}{a_{11}} \vartheta_1^2 \right) \sqrt{a_{11}} dx^1 = 0 \quad (16)$$

отримаємо вираз для визначення критичного зусилля

$$\begin{aligned} T_{(11)}^{kp} &= \frac{\sum_{x_0^1=-0,5}^m \int_{-0,5}^{0,5} (EI \mu_{11}^2 + EF \varepsilon_{11}^2) dx^1}{a_{11} \sum_{x_0^1=-0,5}^m \int_{-0,5}^{0,5} \vartheta_1^2 dx^1} = \\ &= -\frac{4EI}{R^2} \frac{1 + \frac{256}{108} \frac{\pi^2}{m^2}}{1 - \frac{4}{9} \frac{\pi^2}{m^2} + \frac{64}{45} \frac{\pi^4}{m^4}} - \frac{64EF}{27} \frac{\pi^2}{m^2} \frac{1 - \frac{1}{5} \frac{\pi^2}{m^2} + \frac{4}{21} \frac{\pi^4}{m^4}}{1 - \frac{4}{9} \frac{\pi^2}{m^2} + \frac{64}{45} \frac{\pi^4}{m^4}}. \end{aligned} \quad (17)$$

Поклавши  $m \gg \pi$  і нехтуючи громіздкими множниками, отримаємо попередній вираз у наступному вигляді:

$$\tilde{T}_{(11)}^{kp} = -\frac{4EI}{R^2} - \frac{64EF}{27} \frac{\pi^2}{m^2}, \quad \tilde{T}_{(11)}^{kp} = -\frac{4Eh^3}{12R^2} - \frac{64Eh}{27} \frac{\pi^2}{m^2}. \quad (18)$$

Визначимо помилку за формулою

$$\eta = \frac{\tilde{T}_{(11)}^{kp} - T_{(11)}^{kp}}{T_{(11)}^{kp}} = \frac{64}{9} \frac{R^2}{h^2} \frac{\pi^2}{m^2}.$$

Очевидно, що при відношенні  $R/h=100$  і  $m=100$  помилка становить  $\eta=70\%$ .

Виконані розв'язки дозволяють зробити наступні висновки: неекторна апроксимація, що традиційно використовується, при обчисленні критичного зусилля дає велику помилку, що залежить від розмірів кільця, а також не задовольняє умові рівності нулю деформацій при жорсткому зміщенні. Запропонована методика, що базується на

векторній апроксимації функцій переміщень криволінійного скінченного елемента, задовольняє умові жорсткого зміщення, а в задачі стійкості помилка не залежить від геометричних параметрів кільця. Отже, розроблена методика дозволяє отримати значно точніший результат.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Голованов А.И., Корнишин М.С. Введение в метод конечных элементов статики тонких оболочек. — Казань: Изд. Казанского филиала физ.-техн. ин-та, 1989. — 269 с.
2. Черных К.Ф. Линейная теория оболочек. Часть 2. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1964. — 395 с.
3. Гоцуляк Е.А., Костина Е.В. Исследование сходимости метода конечных элементов в векторной аппроксимации // Сопротивление материалов и теория сооружений. — 1997. — Вып.63. — С.38-47.
4. Гоцуляк Е.О., Костина О.В. Про особливості застосування методу скінченних елементів до розрахунку оболонок загального типу // Доповіді Нац. АН України. — 1998. - №11. — С.72-75.
5. Gotsulyak E.A., Kostina E.V. Vector relations finite element discretization of the theory of thin shells of arbitrary form // Proc. International Congress ICSS-98. — Moscow, 1998. — P.252-259.
6. Гоцуляк Е.А., Костина Е.В., Аранчий Н.Е. Криволинейный конечный элемент в теории тонких оболочек произвольной конфигурации // Сб. трудов Международного симпозиума по проблемам тонкостенных пространственных систем. — Грузия, Тбилиси, 4-5 июля, 2001. — С. 58-64.
7. Гоцуляк Е.А., Лукьянченко О.А., Костина Е.В., Гаран И.Г. Построение геометрически нелинейных конечно-элементных моделей для тонких оболочек с несовершенствами форм // Прикладная механика, 2011, Том 47, №3. С.82 – 101.

*Стаття надійшла до редакції 18.10.2012 р.*

*Е.В. Костина*

#### **ВЕКТОРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИИ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ КРИВОЛИНЕЙНОГО КОНЕЧНОГО ЭЛЕМЕНТА В ЗАДАЧЕ УСТОЙЧИВОСТИ КОЛЬЦА**

Выполнено аналитическое тестирование новой схемы метода конечных элементов, основанной на векторной аппроксимации функции перемещений. Тестирование проведено путем решения двух задач о деформировании кольца с помощью предложенной схемы и традиционной не векторной схемы дискретизации. Выявлены преимущества векторной аппроксимации в точности решения.

*О.В. Костина*

#### **VECTOR APPROXIMATION OF THE FUNCTION OF DISPLACEMENTS OF CURVILINEAR FINITE ELEMENT IN THE PROBLEM OF RING STABILITY**

The analytical testing of the new scheme of the finite element method, based on the vector approximation of displacements, was executed. Testing was performed by solving two tasks on the deformation of ring by the means of proposed scheme and the traditional discretization scheme in a scalar form. The advantages of vector approximation in the precision of the solutions are proved.