

УДК 539.3

С.В. Кобельський, канд. техн. наук.

АНАЛІЗ ЗМІШАНИХ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ СТОСОВНО ЗАДАЧ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТА МЕХАНІКИ РУЙНУВАННЯ

В рамках змішаної проєкційно-сіткової схеми МСЕ запропоновані нові тривимірні скінченні елементи для розв'язання просторових задач теорії пружності. Побудована змішана апроксимація полів переміщень-деформацій-напружень, отримані вирази для коефіцієнтів розв'язуючих матриць. Проведений порівняльний аналіз запропонованих елементів за результатами розв'язку ряду модельних задач.

Вступ. В даний час найбільш універсальним методом розв'язання крайових задач механіки деформівного твердого тіла є метод скінченних елементів (МСЕ). Серед його формулювань найбільш широкого застосування здобули класичні схеми в переміщеннях [1-3]. Проте істотним недоліком класичного МСЕ є розривна апроксимація напружень і деформацій, а також нижчий порядок збіжності апроксимації напружень і деформацій в порівнянні з таким для переміщень.

У зв'язку з цим перспективним в чисельному аналізі задач механіки деформівного тіла представляється застосування змішаних формулювань МСЕ, в яких напруження або деформації входять у розв'язуючі рівняння поряд з переміщеннями як рівноправні невідомі [4-7]. Основний вигравш при використанні змішаних і змішано-гібридних формулювань МСЕ в порівнянні з класичним підходом МСЕ у формі методу переміщень полягає в зменшенні погрішності апроксимації для напружень і деформацій, а також можливості точного задоволення статичним граничним умовам на поверхні тіла. Ще одна перевага полягає в тому, що змішані схеми МСЕ дозволяють забезпечити безперервність апроксимації не лише для переміщень, але і для напружень і деформацій.

У роботі [8] запропонований просторовий змішаний скінченний елемент (ЗСЕ-1), побудований на основі шестигранної восьмивузлової призми з полілінійним заповненням переміщень і апроксимацією напружень і деформацій за допомогою інтерполяційних функцій, визначених відносно вершин і центру призми.

У роботі [9] проведено аналіз застосування елемента ЗСЕ-1 при розв'язанні задач теорії пластичності і теорії тріщин.

У даній роботі розглядається ряд нових просторових змішаних скінченних елементів, побудованих на основі шестигранної 8-вузлової призми з різною мірою апроксимації деформацій і напружень і змішаний елемент у формі тетраедра з апроксимацією напружень і деформацій за допомогою інтерполяційних функцій, визначених відносно його вершин і центру.

Матричні рівняння змішаного методу. Систему розв'язуючих рівнянь змішаного методу можна представити у вигляді [7]:

$$\begin{aligned} [\mathbf{M}_h] \{\varepsilon_h\} &= [\mathbf{H}_h] \{\mathbf{u}_h\}; \\ \{\sigma_h\} &= [\mathbf{D}_h] (\{\varepsilon_h\} - \{\xi_h\}); \\ [\mathbf{H}_h]^T \{\sigma_h\} &= \{\rho_h\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Перше рівняння визначає вектор значень деформацій $\{\varepsilon_h\}$ у вузлах триангуляції і центрах тяжіння елементів по відомих вузлових переміщеннях $\{\mathbf{u}_h\}$, друге – пов'язане з фізичним законом пружного середовища для побудови вектора напружень $\{\sigma_h\}$ і третє – забезпечує виконання умов статичної рівноваги. Вектори $\{\rho_h\}$, $\{\xi_h\}$ відповідають приведеним до вузлів сітки навантаженням і початковим деформаціям.

Апроксимуючі функції для переміщень. Розглянемо змішані скінченні елементи ЗСЕ-2 і ЗСЕ-3, побудовані на основі шестигранної восьмивузлової призми з полілінійним заповненням переміщень і скінченний елемент ЗТЕ-1, побудований на основі класичного чотиривузлового тетраедра.

Представимо множину $\Omega \in \mathbb{R}^3$ у вигляді об'єднання скінченного числа шестигранних восьмивузлових призм Ω_m .

Нехай $\xi_a = (\xi_{1a}, \xi_{2a}, \xi_{3a})$ – координати вузлів у вершинах скінченного елемента Ω_m - призми (рис. 1,а) або тетраедра (рис. 1,б). Позначимо $\xi_f = (\xi_{1f}, \xi_{2f}, \xi_{3f})$, $f=1\dots 6$ – координати вузлів в центрах граней призми, $\xi_k = (\xi_{1k}, \xi_{2k}, \xi_{3k})$, $k=1\dots n_{pr}$ – координати n_{pr} внутрішніх вузлів призми, $\xi_m = (\xi_{1m}, \xi_{2m}, \xi_{3m})$ – координати вузла в центрі призми або тетраедра.

Нехай $E_h = (\mathbf{x}_a)_{a=1}^{N_a^{(h)}}$ – множина вузлів інтерполяції, що відповідають вершинам призм для елементів ЗСЕ-1, ЗТЕ-1, ЗСЕ-2, ЗСЕ-3. $\Lambda_h = E_h \cup K_h$ – множина вузлів інтерполяції, в яких шукаються деформації і напруження, причому $K_h = (\mathbf{x}_m)_{m=1}^{N_m^{(h)}}$ – для елементів ЗСЕ-1 і ЗТЕ-1,

$K_h = (\mathbf{x}_m)_{m=1}^{N_m^{(h)}} \cup (\mathbf{x}_f)_{f=1}^{N_f^{(h)}}$ - для елемента ЗСЕ-2,

$K_h = (\mathbf{x}_m)_{m=1}^{N_m^{(h)}} \cup (\mathbf{x}_f)_{f=1}^{N_f^{(h)}} \cup (\mathbf{x}_k)_{k=1}^{N_k^{(h)}}$ - для елемента ЗСЕ-3.

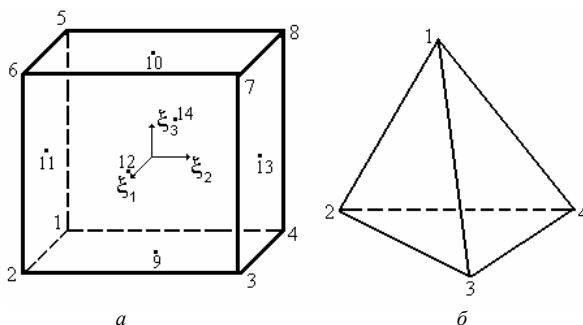


Рис. 1. Скінченний елемент– призма з вузлами в вершинах і центрах граней (а) і тетраедр (б)

Переміщення в межах призми Ω_m задамо у вигляді функції від локальних координат $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$:

$$\mathbf{u}_{ih}(\xi) = \sum_{1 \leq \alpha \leq 8} \mathbf{u}_{i\alpha} \lambda_{h\alpha}^{(m)}(\xi), \quad i=1, 2, 3, \quad \forall \xi \in \Omega_m. \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_{ih}(\xi) = \sum_{1 \leq \alpha \leq 8} \mathbf{u}_{i\alpha} \lambda_{h\alpha}^{(m)}(\xi) + \sum_{1 \leq f \leq 6} \mathbf{u}_{ihf} \lambda_{hf}^{(m)}(\xi), \quad i=1, 2, 3, \quad \forall \xi \in \Omega_m. \quad (3)$$

Тут $\lambda_{h\alpha}^{(m)}(\xi), \lambda_{hf}^{(m)}(\xi)$ – інтерполяційні функції для правильної шестигранної призми, що визначаються для елементів ЗСЕ-2, ЗСЕ-3 по співвідношеннях

$$\lambda_{h\alpha}^{(m)}(\xi) = \frac{1}{8} (1 + \xi_{1\alpha} \xi_1) (1 + \xi_{2\alpha} \xi_2) (1 + \xi_{3\alpha} \xi_3). \quad (4)$$

Зв'язок між координатами точки в локальній і глобальній системах координат в межах призми встановлюється за допомогою співвідношень

$$\mathbf{x} = \sum_{1 \leq \alpha \leq 8} \mathbf{x}_\alpha \lambda_{h\alpha}^{(m)}(\xi); \quad \mathbf{x} = \sum_{1 \leq \alpha \leq 8} \mathbf{x}_\alpha \lambda_{h\alpha}^{(m)}(\xi) + \sum_{1 \leq f \leq 6} \mathbf{x}_f \lambda_{hf}^{(m)}(\xi), \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_m. \quad (5)$$

Функції $\mathbf{u}_{ih}(\xi)$ приймають у вузлах інтерполяції призми Ω_m вузлові значення $\mathbf{u}_{ih}(\xi_\alpha), \mathbf{u}_{ih}(\xi_f), \mathbf{u}_{ih}(\xi_k), \mathbf{u}_{ih}(\xi_m)$, позначені $\mathbf{u}_{i\alpha}, \mathbf{u}_{ihf}, \mathbf{u}_{ihk}, \mathbf{u}_{ihm}$.

Тоді напруження і деформації в межах Ω_m задамо у вигляді

$$\tau_{ijh}(\xi) = \sum_{1 \leq \alpha \leq 8} \tau_{ijh\alpha} \omega_{h\alpha}^{(m)}(\xi) + \sum_{1 \leq f \leq 6} \tau_{ijhf} \omega_{hf}^{(m)}(\xi) + \sum_{1 \leq k \leq n_{pi}} \tau_{ijhk} \omega_{hk}^{(m)}(\xi) + \tau_{ijhm} \omega_{hm}^{(m)}(\xi), \quad (6)$$

де $\omega_{ha}^{(m)}(\xi)$, $\omega_{hf}^{(m)}(\xi)$, $\omega_{hk}^{(m)}(\xi)$ і $\omega_{hm}^{(m)}(\xi)$ – інтерполяційні функції, τ_{ijha} , τ_{ijhf} , τ_{ijhk} і τ_{ijhm} - значення функцій $\tau_{ijh}(\xi)$ у вузлах інтерполяції призми Ω_m .

Для елемента ЗСЕ-1 переміщення в його межах задамо за допомогою просторових L-координат

$$u_{ih}(\xi) = \sum_{1 \leq \alpha \leq 4} u_{ih\alpha} L_{h\alpha}^{(m)}, \quad i=1, 2, 3, \quad \forall \xi \in \Omega_m, \quad (7)$$

а напруження і деформації у вигляді

$$\tau_{ijh}(\xi) = \sum_{1 \leq \alpha \leq 4} \tau_{ijh\alpha} \omega_{h\alpha}^{(m)}(\xi) + \tau_{ijhm} \omega_{hm}^{(m)}(\xi). \quad (8)$$

Апроксимуючі функції для деформацій і напружень

Елемент ЗСЕ-2. Інтерполяційні функції, що приймаються для апроксимації напружень і деформацій, визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned} \omega_{ha}^{(m)}(\xi) &= \frac{1}{8} \xi_{1\alpha} \xi_1 \xi_{2\alpha} \xi_2 \xi_{3\alpha} \xi_3 (1 + \xi_{1\alpha} \xi_1) (1 + \xi_{2\alpha} \xi_2) (1 + \xi_{3\alpha} \xi_3) \times \\ &\times (-2(1 - \xi_{1\alpha} \xi_1 - \xi_{2\alpha} \xi_2 - \xi_{3\alpha} \xi_3) - \xi_{1\alpha} \xi_1 \xi_{2\alpha} \xi_2 - \xi_{1\alpha} \xi_1 \xi_{3\alpha} \xi_3 - \xi_{2\alpha} \xi_2 \xi_{3\alpha} \xi_3), \\ \omega_{hf=1}^{(m)}(\xi) &= \frac{1}{2} \xi_{3\alpha} \xi_3 (1 + \xi_{3\alpha} \xi_3) (1 - \xi_1^2) (1 - \xi_2^2), \\ \omega_{hm}^{(m)}(\xi) &= (1 - \xi_1^2) (1 - \xi_2^2) (1 - \xi_3^2). \end{aligned} \quad (9)$$

Для решти вузлів в центрах граней ($f = 2, \dots, 6$) вирази отримуються циклічною перестановкою індексів.

Елемент ЗСЕ-3. Інтерполяційні функції для апроксимації напружень і деформацій мають вигляд

$$\begin{aligned} \omega_{ha}^{(m)}(\xi) &= -\frac{8}{27} \xi_{1\alpha} \xi_1 \xi_{2\alpha} \xi_2 \xi_{3\alpha} \xi_3 (1 + \xi_{1\alpha} \xi_1) (1 + \xi_{2\alpha} \xi_2) (1 + \xi_{3\alpha} \xi_3) \times \\ &\times (-2(1 - \xi_{1\alpha} \xi_1 - \xi_{2\alpha} \xi_2 - \xi_{3\alpha} \xi_3) - \xi_{1\alpha} \xi_1 \xi_{2\alpha} \xi_2 - \xi_{1\alpha} \xi_1 \xi_{3\alpha} \xi_3 - \xi_{2\alpha} \xi_2 \xi_{3\alpha} \xi_3) \times \\ &\times \left(\frac{1}{4} - \xi_1^2\right) \left(\frac{1}{4} - \xi_2^2\right) \left(\frac{1}{4} - \xi_3^2\right), \\ \omega_{hf=1}^{(m)}(\xi) &= -\frac{32}{3} \xi_{3\alpha} \xi_3 (1 + \xi_{3\alpha} \xi_3) (1 - \xi_1^2) (1 - \xi_2^2) \left(\frac{1}{4} - \xi_1^2\right) \left(\frac{1}{4} - \xi_2^2\right) \left(\frac{1}{4} - \xi_3^2\right), \\ \omega_{hk}^{(m)}(\xi) &= \frac{2048}{27} \xi_{1\alpha} \xi_1 \xi_{2\alpha} \xi_2 \xi_{3\alpha} \xi_3 \left(\frac{1}{2} + \xi_{1\alpha} \xi_1\right) \left(\frac{1}{2} + \xi_{2\alpha} \xi_2\right) \left(\frac{1}{2} + \xi_{3\alpha} \xi_3\right) (-2(1 - \xi_{1\alpha} \xi_1 - \\ &- \xi_{2\alpha} \xi_2 - \xi_{3\alpha} \xi_3) - \xi_{1\alpha} \xi_1 \xi_{2\alpha} \xi_2 - \xi_{1\alpha} \xi_1 \xi_{3\alpha} \xi_3 - \xi_{2\alpha} \xi_2 \xi_{3\alpha} \xi_3) \times (1 - \xi_1^2) (1 - \xi_2^2) (1 - \xi_3^2), \\ \omega_{hm}^{(m)}(\xi) &= 64(1 - \xi_1^2) (1 - \xi_2^2) (1 - \xi_3^2) \left(\frac{1}{4} - \xi_1^2\right) \left(\frac{1}{4} - \xi_2^2\right) \left(\frac{1}{4} - \xi_3^2\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Для решти вузлів в центрах граней ($f=2, \dots, 6$) вирази отримуються циклічною перестановкою індексів.

Елемент ЗТЕ-1. Інтерполяційні функції, що приймаються для апроксимації напружень і деформацій, визначаються співвідношеннями

$$\begin{aligned}\omega_{\text{h}\alpha}^{(m)}(\xi) &= L_\alpha - 81L_1L_2L_3L_4, \\ \omega_{\text{h}m}^{(m)}(\xi) &= 81L_1L_2L_3L_4.\end{aligned}\quad (11)$$

Побудова матриць. Для побудови розв'язуючих матриць використовувалася кубатурна формула, в якій точки зважування збігаються з вузлами інтерполяції елемента Ω_m :

$$\int_{\Omega_m} f(\mathbf{x}) d\Omega_m = \int_{\Omega_m} f(\mathbf{x}(\xi)) J(\xi) d\xi \approx k_1 \sum_{1 \leq \alpha \leq 8} f_\alpha J_\alpha + k_2 \sum_{1 \leq f \leq 6} f_f J_f + k_3 \sum_{1 \leq k \leq n_{\text{прі}}} f_k J_k + k_4 f_m J_m, \quad (12)$$

де J_α , J_f , J_k , J_m – значення визначника матриці Якобі у вузлах інтерполяції елемента Ω_m , k_1 , k_2 , k_3 , k_4 – вагові множники.

У табл. 1 приведені характеристики скінченних елементів, координати однієї з характерних точок і вагові множники кубатурної формули [10]. Координати решти точок отримуються всілякими перестановками і змінами знаків.

Таблиця 1

Вагові множники кубатурних формул

Елемент	Вузли в вершинах	Вузли в центрах граней	Внутрішні вузли (<i>прі</i>)	Вузол в центрі
ЗСЕ–1	8 (1, 1, 1) $k_1 = 1/3$	-	-	1 (0, 0, 0) $k_4 = 16/3$
ЗСЕ–2	8 (1, 1, 1) $k_1 = 1/9$	6 (1, 0, 0) $k_2 = 8/9$	-	1 (0, 0, 0) $k_4 = 16/9$
ЗСЕ–3	8 (1, 1, 1) $k_1 = 3/45$	6 (1, 0, 0) $k_2 = 16/45$	8 (.5, .5, .5) $k_3 = 32/45$	1 (0, 0, 0) $k_4 = -16/45$
ЗТЕ–1	4 (1, 0, 0, 0) $k_1 = 73/120$	-	-	1 (1/3, 1/3, 1/3, 1/3) $k_4 = 128/420$

Матриця $[M_h]$ визначається за допомогою співвідношень:

$$\begin{aligned}[M_h]_{\alpha\alpha} &= \sum_{\Omega_m \in \Lambda_{\text{h}\alpha}} \int_{\Omega_m} \omega_{\text{h}\alpha}(\xi) \omega_{\text{h}\alpha}(\xi) J(\xi) d\xi \approx k_1 \sum_{\Omega_m \in \Lambda_{\text{h}\alpha}} J_\alpha, \\ [M_h]_{\text{ff}} &= \sum_{\Omega_m \in \Lambda_{\text{h}f}} \int_{\Omega_m} \omega_{\text{h}f}(\xi) \omega_{\text{h}f}(\xi) J(\xi) d\xi \approx k_2 \sum_{\Omega_m \in \Lambda_{\text{h}f}} J_f, \\ [M_h]_{\text{kk}} &= \int_{\Omega_m} \omega_{\text{hk}}(\xi) \omega_{\text{hk}}(\xi) J(\xi) d\xi \approx k_3 J_k, \\ [M_h]_{\text{mm}} &= \int_{\Omega_m} \omega_{\text{hm}}(\xi) \omega_{\text{hm}}(\xi) d\xi \approx k_4 J_m.\end{aligned}\quad (13)$$

Тут Λ_{ha} - множина призм, що містять вузол a , Λ_{hf} - множина призм, що містять вузол f .

Всі недиагональні члени матриці $[M_h]$ рівні нулю.

Для побудови матриці $[H_h]$ необхідно врахувати співвідношення

$$\frac{\partial \lambda_{ha}^{(m)}(\xi)}{\partial x_i} = e_{ia}^s \frac{\partial \lambda_{ha}^{(m)}(\xi)}{\partial \xi_s}, \quad (14)$$

де e_{ia}^s – компоненти оберненої матриці Якобі у вузлі x_a .

Компоненти матриці Якобі визначаються виразом:

$$e_{sia} = \left. \frac{\partial x_i}{\partial \xi_s} \right|_{x_i = x_{ia}}. \quad (15)$$

Чисельний аналіз. Побудовані змішані скінченні елементи тестувалися на розв'язанні ряду задач, що мають аналітичний або відомий чисельний розв'язок.

Задача 1. Розглядалася задача про розтяг полого циліндра із зовнішнім діаметром $D_1 = 8$, внутрішнім діаметром $D_2 = 4$, висотою $2H = 60$ з симетрично розташованою внутрішньою (зовнішньою) крайовою кільцевою тріщиною глибиною $a = 1$ (рис. 2).

Торці циліндра навантажені рівномірно розподіленим навантаженням інтенсивністю $q=1$. Зважаючи на симетрію задачі розглядався сектор з довжиною дуги рівною довжині тріщини. Коефіцієнт Пуассона задавався 0.3. Модуль пружності матеріалу E приймався рівним одиниці.

Задача розв'язувалась в пружній постановці. Оцінювалась точність визначення коефіцієнта інтенсивності напружень. При побудові дискретної моделі використовувалася рівномірна сітка з розбиттям, приведеним в таблиці (число точок вздовж фронту \times число точок вздовж радіусу \times число точок по висоті).

Результати розрахунків (табл. 2,3) зпівставлялися з рішенням, отриманим за допомогою чисельного методу [11]. Найкращі результати отримані з використанням елемента ЗСЕ-1, для яких спостерігається збіжність наближеного розв'язку при згущуванні сітки скінченних елементів. Для елементів ЗСЕ-2 і ЗСЕ-3 характерний той же ефект «запирання» розв'язку, що і для класичних 8-ми вузлових елементів.

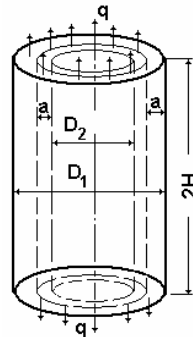


Рис. 2. Задача про розтяг полого циліндра з внутрішньою і зовнішньою крайовою кільцевою тріщиною

Таблиця 2

Результати розрахунків коефіцієнта інтенсивності напружень для задачі про розтяг полого циліндра з внутрішньою крайовою кільцевою тріщиною

Сітка	Коефіцієнт інтенсивності напружень			
	$\delta, \%$			
	СКЭ-1	СКЭ-2	СКЭ-3	КМКЭ-8
3×3×61	1.893441	1.791203	1.681791	-
	5.55	10.65	16.11	-
5×5×121	1.960688	1.864103	1.772582	1.76263
	2.19	7.01	11.58	12.07
7×7×181	1.987509	1.892830	1.806053	1.79778
	0.85	5.58	9.91	10.32
9×9×241	2.000348	1.906951	1.822905	1.81618
	0.21	4.87	9.07	9.40
11×11×301	2.008160	1.915504	1.833059	1.82577
	-0.17	4.45	8.56	8.92
13×13×361	2.013276	1.921185	1.839835	1.83333
	-0.43	4.16	8.22	8.54
15×15×421	2.016951	1.925249	1.844679	1.83876
	-0.62	3.96	7.98	8.28
[11]	2.0046453			

Таблиця 3

Результати розрахунків коефіцієнта інтенсивності напружень для задачі про розтяг полого циліндра з зовнішньою крайовою кільцевою тріщиною

Сітка	Коефіцієнт інтенсивності напружень			
	$\delta, \%$			
	СКЭ-1	СКЭ-2	СКЭ-3	КМКЭ-8
3×3×61	2.421854	2.300502	2.178809	-
	13.08	17.44	21.80	-
5×5×121	2.633741	2.514673	2.392979	2.3806
	5.48	9.75	14.12	14.56
7×7×181	2.702545	2.584908	2.467907	2.4587
	3.01	7.23	11.43	11.76
9×9×241	2.737831	2.620696	2.506018	2.4982
	1.74	5.94	10.06	10.34
11×11×301	2.758701	2.642098	2.529018	2.5223
	0.99	5.18	9.23	9.47
13×13×361	2.772698	2.656407	2.544412	2.5387
	0.49	4.66	8.68	8.89
15×15×421	2.782624	2.666624	2.555435	2.5492
	0.13	4.30	8.29	8.51
[11]	2.786297454			

Задача 2. В [9] розглядалася задача про еліптичну щілину в нескінченному тілі, підданому однорідному розтягу в напрямку осі z (рис. 3) з використанням елемента ЗСЕ-1. Тут ця задача розглядається з використанням елементів ЗСЕ-2, ЗСЕ-3.

На верхньому торці циліндра радіуса $R = 40$ м, половинної висоти $H=40$ м, з еліптичною тріщиною $a/c = 2$, $c = 0.025$ м (a – мала напіввісь еліпса тріщини, c – велика вісь) прикладено розтягуюче навантаження $q=100$ МПа. Модуль пружності $E=2 \cdot 10^5$ МПа. Коефіцієнт Пуассона $\nu=0.3$. Матеріал ідеальний пружно-пластичний, межа текучості $\sigma_T=400$ МПа. Як і в [9], величина кроку сітки в ядрі $S = 1, 10, 100, 1000s$, $s \approx 8$ мкм.

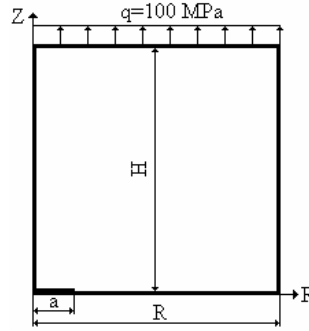


Рис. 3. До задачі про еліптичну щілину в нескінченному тілі

На рис. 4 приведені графіки обчислення параметрів механіки руйнування для глибокої точки тріщини (напруження σ , що діє у напрямі нормалі до її площини, розкриття у вузлі перед вершиною тріщини і КІН) в пружно-пластичній постановці при використанні лише елементів ЗСЕ-1, ЗСЕ-2, ЗСЕ-3 і елементів ЗСЕ-1 спільно з елементами ЗТЕ-1.

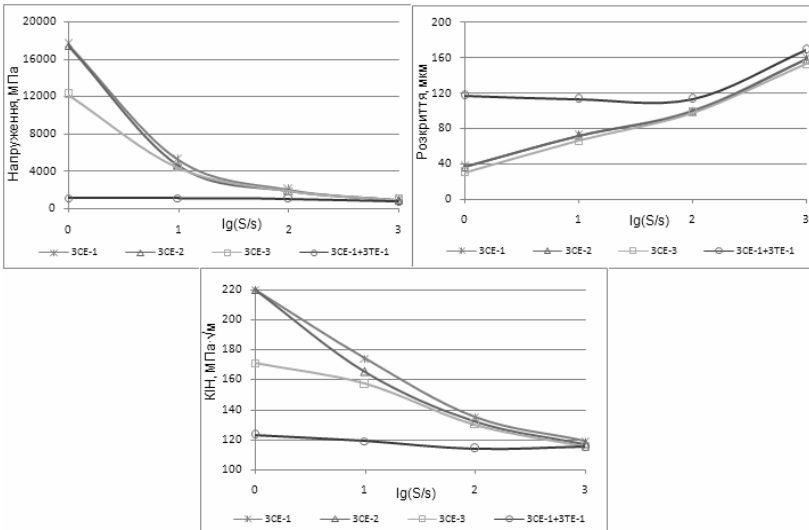


Рис. 4. Графіки обчислення параметрів руйнування в задачі про еліптичну щілину в нескінченному тілі для глибокої точки тріщини

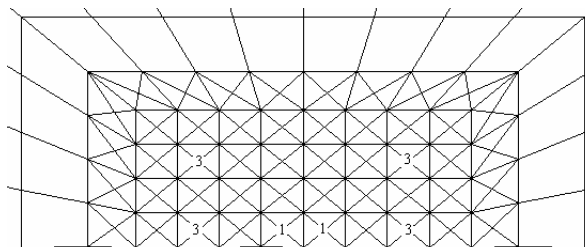


Рис. 5. Фрагмент сітки скінченних елементів в околиці точки на фронті тріщини

Видно, що збіжність результатів по напруженням, розкриттям і коефіцієнтам інтенсивності напружень при зменшенні кроку сітки має місце лише при спільному використанні елементів ЗСЕ-1 і ЗТЕ-1. Причому на тетраедри розбиваються лише елементи, що примикають до фронту тріщини.

Для оцінки числа елементів, які повинні розбиватися на тетраедри, була розглянута та ж задача, але для еліптичної тріщини $a/c=4$. Задача розв'язувалася при величинах кроку в ядрі $S=1$ і $1000s$ (рис. 5), на тетраедри розбивалися 1, 3 і 5 шарів елементів, що оточують точку на фронті тріщини.

Результати розв'язку представлені на рис. 6 графіками зміни параметрів руйнування уздовж фронту тріщини.

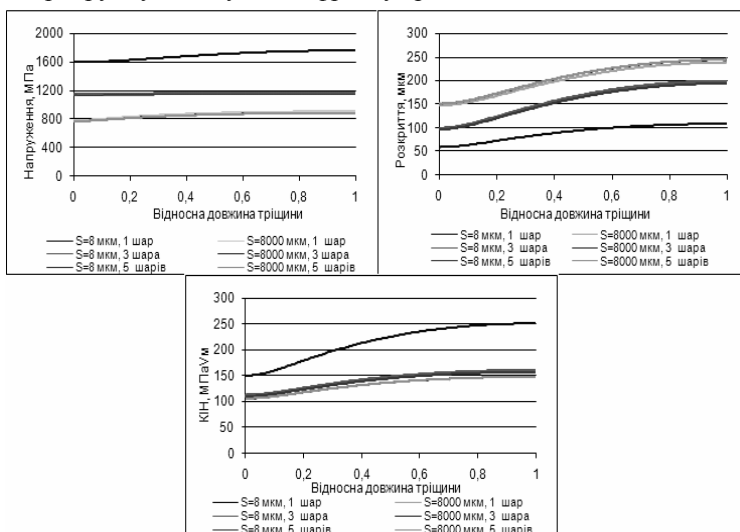


Рис. 6. Графіки зміни параметрів руйнування уздовж фронту тріщини в задачі про еліптичну щілину в нескінченному тілі

Видно, що для рідких сіток ($S=1000s$) результати практично співпадають при будь-якому розбитті елементів на тетраедри (криві 4–6). Для густих сіток ($S=1s$) збіжність результатів має місце лише при розбитті на тетраедри не менше трьох шарів елементів. Це можна пояснити тим, що в першому випадку розмір зони пластичних деформацій локалізований в межах одного елемента біля точки на фронті тріщини, тоді як із зменшенням кроку сітки число таких елементів зростає.

Розв'язання задачі в пружно-пластичній постановці передбачає виконання ряду ітерацій «по пружності». У зв'язку з цим важливим є правильний вибір критерію зупинки ітераційного процесу. Для задач теорії тріщин як критерій пропонується аналіз значень G -інтеграла на п'яти послідовних кроках

$$\delta = \frac{|G_{i-4} - G_i|}{G_{i-4}} \leq \varepsilon. \quad (15)$$

Результати розв'язання даної задачі з використанням (20 кроків) і без використання (60 кроків) критерію (15) приведені в таблиці. 4. Зпівставлені значення параметрів руйнування в двох точках тріщини – глибокій (точка А) і на великій напівосі еліпса (точка D) для $\varepsilon = 10^{-4}$.

Таблиця 4

Результати розрахунків параметрів руйнування при різному числі кроків «по пружності»

	Точка	Напруження	Розкриття	КІН
20 кроків	A	1164,47	198,27	159,80
	D	1140,92	98,44	111,82
60 кроків	A	1162,69	198,36	159,79
	D	1138,50	98,49	111,79

Висновки. В рамках змішаної проекційно-сіткової схеми МСЕ запропоновані нові тривимірні скінченні елементи для розв'язання просторових задач теорії пружності, пластичності і теорії тріщин з різною мірою апроксимації напружень і деформацій.

Аналіз результатів розв'язання модельних задач дозволяє зробити висновок про те, що елементом, якому треба віддати перевагу (як з точки зору точності отримуваних результатів, так і з врахуванням часу розв'язання задач і об'єму породжуваної інформації) виявився елемент ЗСЕ-1 з полілінійним заповненням переміщень (апроксимація напружень і деформацій по восьми вузлах у вершинах і вузлу в центрі). Елемент ЗСЕ-2, хоча і забезпечує отримання дещо точніших результатів розв'язання ряду з розглянутих модельних задач, поступається елементу ЗСЕ-1 в часі їх розв'язання. Подальше підвищення міри апроксимації

напружень і деформацій при незмінній мірі апроксимації переміщень привело до погіршення результатів (елемент ЗСЕ-3).

У задачах лінійної механіки руйнування елементи ЗСЕ-2, ЗСЕ-3 поводяться аналогічно класичним 8-ми вузловим елементом (характерний той самий ефект «запирання» розв'язку), тоді як для елемента ЗСЕ-1 спостерігається збіжність наближеного розв'язку при згущуванні сітки скінченних елементів.

У задачах нелінійної механіки руйнування збіжні результати отримані при спільному використанні елементів ЗСЕ-1 і ЗТЕ-1.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Зенкевич О.* Метод конечных элементов в технике, – М.: Мир, 1975. – 542 с.
2. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
3. *Zienkiewicz O.C., Taylor R.L.* The Finite Element Method. Vol. 1 – 3. – Butterworth-Heinemann, – Oxford; Auckland; Boston; Johannesburg; Melbourne; New Delhi. – 5th ed., 2000. – 1482 p.
4. *Ворошко П.П.* Смешанные вариационные формулировки задач теории упругости и их реализация методом конечных // Пробл. прочности, – 1985. – № 1. – С. 100 – 105.
5. *Уманский С.Э.* Общая теория и практическое применение смягченно-смешанных схем метода конечных элементов // Пробл. Прочности. – 1984. – № 12. – С. 83 – 89.
6. *Сахаров А.С.* Моментная схема конечных элементов (МСКЭ) с учётом жёстких смещений // Сопротивление материалов и теория сооружений. – 1974. – Вып. 24. – С. 147 – 156.
7. *Чирков А.Ю.* Смешанная проекционно-сеточная схема метода конечных элементов для решения задач теории упругости // Пробл. Прочности. – 2003. – № 3. С. 70 – 100.
8. *Чирков А.Ю., Кобельский С.В., Звягинцева А.А.* Построение смешанной аппроксимации МКЭ для решения пространственных задач теории упругости // Надежность и долговечность машин и сооружений. – 2008. – Вып. 31. – С. 195 – 207.
9. *Кобельский С.В.* Чисельний аналіз просторових задач теорії тріщин на основі змішаної схеми метода скінченних елементів // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. зб.- К.: КНУБА, 2011. – Вип.88. – С. 147 - 156.
10. *Мысовских И.П.* Интерполяционные кубатурные формулы. – М.: Наука. 1981. – 336 с.
11. *Саврук М.П.* Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.,: Наукова думка. 1988. – 620 с.

Стаття надійшла до редакції 29.10.2012 р.

Кобельский С.В.

АНАЛИЗ СМЕШАННЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПРИМЕНИТЕЛЬНО К ЗАДАЧАМ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И МЕХАНИКИ РАЗРУШЕНИЯ

В рамках смешанной проекционно-сеточной схемы МКЭ предложены новые трехмерные конечные элементы для решения пространственных задач теории упругости и пластичности с различной степенью аппроксимации напряжений и деформаций. Построена смешанная аппроксимация полей перемещений-деформаций-напряжений. Проведен сравнительный анализ предложенных элементов по результатам решения модельных задач.

Kobelsky S.V.

ANALYSIS OF MIXED FINITE ELEMENTS IN APPLICATION TO PROBLEMS OF ELASTO-PLASTIC DEFORMATION AND FRACTURE MECHANICS

Based on the mixed projection-mesh scheme of finite element method, the new three-dimensional finite elements scheme to solve three-dimensional problems of elasticity are proposed and examined. Expressions for the coefficients of solving matrixes are obtained. Results of some test problems being solved shows the advantages of the mixed method.