

УДК 539.3

В.А. Баженов, д-р техн. наук,
О.С. Погорелова, канд. фіз.-мат. наук,
Т.Г. Постнікова, канд. техн. наук

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ ПРОДОВЖЕННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗА ПАРАМЕТРОМ ДО АНАЛІЗУ ДИНАМІЧНОЇ ПОВЕДІНКИ ВІБРОУДАРНОЇ СИСТЕМИ

В статті представлені результати чисельних досліджень режимів коливального руху сильно нелінійної двохмасової віброударної системи з двома ступнями вільності під дією періодичного зовнішнього навантаження, що були отримані методом продовження розв'язку за параметром. Побудовані амплітудно-частотні характеристики, виявлені зони стійкості та нестійкості Т-періодичного руху, приведені графічні характеристики отриманих коливальних режимів, зокрема перерізи Пуанкаре, проаналізована динамічна поведінка системи в широкому діапазоні частот та в точках біфуркації.

Вступ. Диференціальні рівняння руху сильно нелінійної віброударної системи, що розглядається в цій статті, представлені в вигляді (1), який містить параметр. Це ϵ , зокрема, параметр інтенсивності зовнішнього навантаження λ чи його частота ω . Питання про змінювання розв'язку при змінюванні параметра ϵ дуже істотним. Тому застосування методу продовження розв'язку за параметром достатньо природно в цьому випадку.

Метод продовження розв'язку за параметром, що застосовується в цій роботі задля дослідження режимів коливального руху віброударної системи, відомий здавна. Ідея застосування продовження за параметром для дослідження розв'язків нелінійних рівнянь бере свій початок в роботах У.Левер'є (1886) та А.Пуанкаре (1892). Вперше для чисельного розв'язку рівнянь метод продовження був застосований М.Лаеєм (1934). Серед сучасних слід відмітити фундаментальні роботи Е.І.Григолюка, В.И.Шалашиліна та Є.Б.Кузнецова [1,2], які внесли вагомий внесок в розвиток методу, а також прекрасний огляд Е.Л.Алговер та К.Георг [3].

Ідея методу продовження полягає в побудові розв'язку $x_n(\lambda_n)$, виходячи з відомого розв'язку $x_0(\lambda_0)$ та рухаючись вздовж кривої розв'язків K і використовуючи на кожному кроці інформацію про розв'язок, отриманий на попередньому кроці. Чисельна реалізація продовження розв'язку, як правило, виконувалась в вигляді деякого крокового процесу за параметром. При цьому реалізація крокових процесів за параметром можлива з використанням різних ітераційних

процесів. Із літератури відома велика різноманітність таких процесів. Часто вони представляються і розуміються незалежно від загальної схеми продовження розв'язку за параметром.

В НДІ будівельної механіки рядом авторів був запропонований і розвинутий новий метод побудови періодичних розв'язків суттєво нелінійних систем, якій в поєднуванні з методикою продовження розв'язку за параметром дозволяє розв'язувати широке коло задач для різного типу нелінійних систем [4].

Цю методику вдалося застосувати для дослідження динаміки віброударних систем при різних способах моделювання удару – спочатку при моделюванні удару граничними умовами з використанням коефіцієнту відновлення [4-7], а потім силовими характеристиками контактної взаємодії [8-10].

Ця стаття є продовженням і розвитком робіт [8-10], в яких досліджувалась динаміка віброударної системи продовженням розв'язку за параметром інтенсивності зовнішнього навантаження. Вона також є прямим продовженням статті [11], де викладена уся необхідна теорія для виконання аналізу коливального руху віброударної системи методом продовження розв'язку за параметром частоти зовнішнього навантаження, якщо удар моделюється силовою характеристикою контактної взаємодії. В [11] викладена теорія, яка забезпечує побудову амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) та проведення аналізу стійкості отриманих режимів коливань.

В цій роботі проведений докладний аналіз динамічного стану двохмасової віброударної системи з двома ступнями вільності в широкому діапазоні частот зовнішнього навантаження, виявлені зони її стійкого та нестійкого T -періодичного коливального руху, визначені ті коливальні режими, які в дійсності реалізуються в діапазонах частот, де T -періодичний режим є нестійким, відмічені точки бифуркації, зокрема, точки розривної бифуркації. Побудовані перерізи Пуанкаре задля перевірки регулярності чи хаотичності динамічних станів системи. Наочно продемонстрований кардинальний вплив вихідних умов на встановлення динамічного стану сильно нелінійної віброударної системи.

Питання про особливі точки не розглядається в статті і є предметом подальшої роботи.

Постановка задачі. Двохмасова віброударна система з двома ступнями вільності, поведінка якої досліджується у статті, зображена на рис. 1.

Досить докладно побудова математичної моделі цієї віброударної системи була описана в роботах [8-11].

Загальна постановка задачі статті збігається з постановкою, що приведена в [11], тому не будемо її детально повторювати. Приведемо лише диференціальні рівняння руху моделі та числові характеристики її параметрів (див. табл. 1).

Диференціальні рівняння руху моделі мають вигляд:

$$\ddot{x}_1 = -2\xi_1 \omega_1 (\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \omega_1^2 (x_1 - x_2 - D) + \frac{1}{m_1} F_{\text{кон}}(t),$$

$$\ddot{x}_2 = -2\xi_2 \omega_2 \dot{x}_2 - \omega_2^2 x_2 - 2\xi_1 \omega_1 \chi (\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - \omega_1^2 \chi (x_2 - x_1 + D) + \frac{1}{m_2} [F(t) - F_{\text{кон}}(t)], \quad (1)$$

де $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$, $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$; $\xi_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}$, $\xi_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2}$; $\chi = \frac{m_2}{m_1}$.

На систему діє зовнішнє гармонічне навантаження $F(t) = \lambda F_0 \cos(\omega t + \varphi_0)$.

Сила контактної взаємодії $F_{\text{кон}}(t)$ описується контактним законом Герца.

Вихідні умови задачі такі:

$$x_1(0) = D, \quad x_2(0) = 0, \quad \dot{x}_1(0) = 0, \quad \dot{x}_2(0) = 0. \quad (2)$$

Таблиця 1

Назва характеристики	Основне тіло	Приєднане тіло
Маса m_i , кг	1000,0	100,0
Парціальна частота коливаль ω_i , рад/с	6,283	5,646
Коефіцієнт демпфірування ξ_i	0,036	0,036
Модуль Юнга E_i Н/м ²	$2,099 \cdot 10^{11}$	$2,099 \cdot 10^{11}$
Коефіцієнт Пуассона μ_i	0,3	0,3
Вихідна відстань між тілами D , м	0,05	
Константи A, B , 1/м, q	$A=0,5$	$B=0,5$ $q=0,319$
Амплітуда навантаження F_0 , Н	500,0	
Параметр інтенсивності навантаження λ	1	
Початкова фаза навантаження φ_0 , рад	0,0	

2. Аналіз амплітудно-частотної характеристики із визначенням ділянок нестійкості. В роботі [11], згідно з теоретичними положеннями та методикою продовження розв'язку за параметром, були побудовані

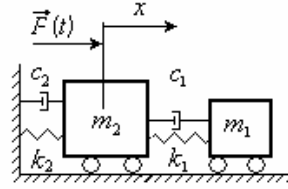


Рис. 1

АЧХ основного (з масою m_2) та приєднаного (з масою m_1) тіл віброударної системи в широкому діапазоні значень частоти зовнішнього навантаження (рис. 2). Аналіз стійкості рухів динамічної системи був проведений за допомогою теорії Флоке та аналізу значень мультиплікаторів. Були визначені ділянки стійкості та нестійкості.

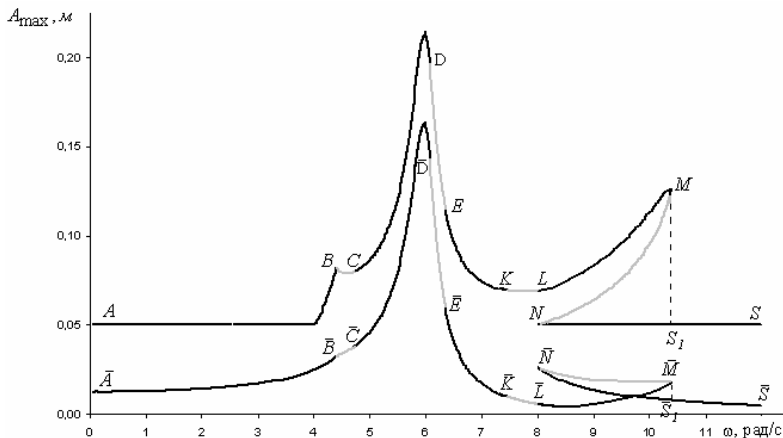


Рис. 2

На графіках рис. 2 чорним кольором позначені ділянки АЧХ, що відповідають стійким T -періодичним динамічним станам отриманого коливального руху віброударної системи під дією періодичного зовнішнього навантаження, сірим кольором—нестійким станам. В цих діапазонах частот T -періодичний режим стає нестійким і в дійсності не реалізується. По осі абсцис відкладені значення частоти зовнішнього навантаження, по осі ординат - напіврозмахи коливань тіл $A_{\max} = (|x_{\min}| + |x_{\max}|) / 2$. Верхня крива відноситься до приєднаного тіла, нижня – до основного.

Проведемо аналіз еволюції поведінки віброударної системи (1) в різних діапазонах частот зовнішнього навантаження, тобто на різних ділянках кривої АЧХ, що відповідають як стійким так і нестійким динамічним станам.

1-ий діапазон частот $0,01 \text{ рад/с} \leq \omega \leq 4,39 \text{ рад/с}$, ділянки кривої $\bar{A}-\bar{B}$ для основного тіла, $A-B$ для приєднаного.

У цьому діапазоні частот T -періодичний коливальний рух віброударної системи є стійким, при цьому реалізується безударний режим коливань. На рис. 3 приведені залежності переміщень основного та приєднаного тіл вібросистеми від часу при значенні частоти

навантаження $\omega=4,0 \text{ рад/с}$. Цей закон руху тут і далі отриманий прямим чисельним інтегруванням рівнянь руху системи (1) методом Рунге-Кутта 4-го порядку. Слід відмітити, що інтегрування всюди виконується зі змінним кроком: під час удару крок інтегрування значно менший. Товстою лінією на рисунках зображені криві, що відносяться до основного тіла, тонкою – до приєднаного. Побудовані фазові траєкторії тіл системи та відповідний переріз Пуанкаре, який має вигляд однієї окремої точки на фазовій площині, свідчать про одноперіодичність руху.

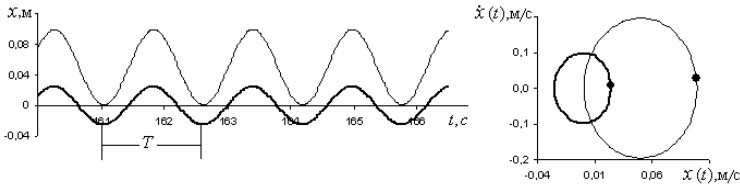


Рис. 3

Точка $\bar{B}(B)$ амплітудно-частотної характеристики є точкою біфуркації. В ній режим коливань системи втрачає стійкість. В цій точці відбувається перехід T -періодичного безударного режиму коливань в $3T$ -періодичний одноударний. Висновок про втрату стійкості T -періодичного режиму робиться за значеннями мультиплікаторів: режим втрачає стійкість, якщо хоча б один з мультиплікаторів виходить за одиничне коло [4]. В точці $\bar{B}(B)$ модулі двох мультиплікаторів виходять за одиничне коло. Але тому, що віброударна система знаходиться в процесі переходу від безударного режиму до руху з періодичними ударами, мультиплікатори змінюються стрибком і приймають дуже великі значення. Точка $\bar{B}(B)$ є точкою розривної біфуркації [12]. В роботі [12] автор називає розривною біфуркацією якісні зміни фазового портрета, які супутні розривам хоча б одного з мультиплікаторів. В таблиці 2 приведений модуль мультиплікатора з максимальним значенням в околиці точки $\bar{B}(B)$.

Таблиця 2

ω , рад/с	Максимальне значення модуль мультиплікаторів	Кількість ударів на періоді T
4,400	0,7966	0
4,401	0,7965	0
4,402	0,7966	0
4,403	0,7967	0
4,404	0,7966	0
4,405	4,3065	1
4,406	31,0890	1
4,407	18,5230	1
4,408	24,0050	1
4,409	10,5770	1
4,410	5,8963	1
4,411	10,1980	1
4,412	5,3382	1
4,413	4,8419	1
4,414	4,6143	1

2-ий діапазон $4,40 \text{ рад/с} \leq \omega \leq 4,75 \text{ рад/с}$, ділянки кривих $\bar{B}-\bar{C}$, $B-C$.

Ділянки кривих відповідають нестійким динамічним станам віброударної системи. Пряме чисельне інтегрування рівнянь руху (1) показує, що в цьому невеликому діапазоні частот існують декілька типів коливальних рухів. Наприклад, при $\omega=4,4 \text{ рад/с}$ реалізується $3T$ -періодичний одноударний режим коливаний (рис. 4), при $\omega=4,5 \text{ рад/с}$ – $4T$ -періодичний двоударний (рис. 5).

На цих рисунках зображені процеси коливаний основного та приєднаного тіл, графік сили контактної взаємодії в залежності від часу, фазові траєкторії приєднаного та основного тіл та перерізи Пуанкаре. У випадку $3T$ -періодичного режиму коливаний переріз Пуанкаре має вигляд трьох окремих точок, $4T$ -періодичного стану – чотирьох.

При $\omega=4,75 \text{ рад/с}$ режим коливаний віброударної системи стає більш складним (рис. 6). Вигляд коливаний характерний для квазіперіодичних рухів. Представлені фазові траєкторії коливаний

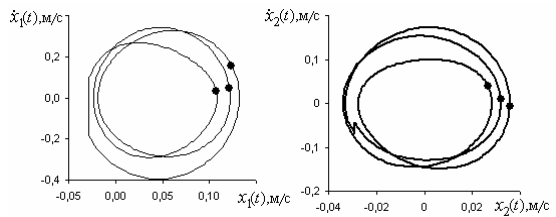
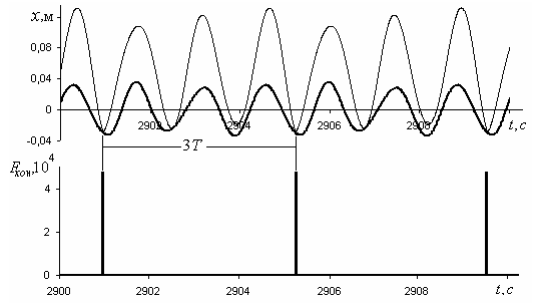


Рис. 4

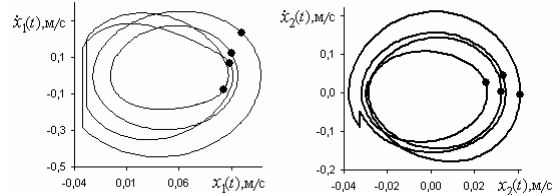
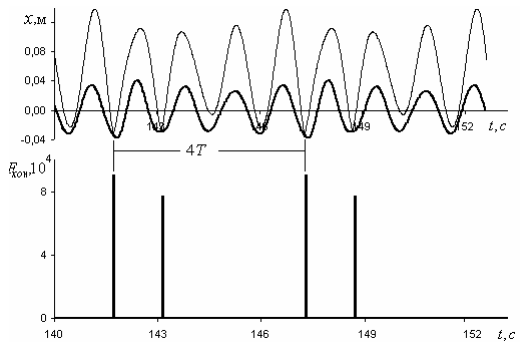


Рис. 5

системи, які мають вигляд тора, не змінюються при збільшенні числа періодів, що використовуються задля побудови фазового портрета. Відповідні перерізи Пуанкаре являють собою замкнені криві. Вони зображені маркерами як на тлі фазових траєкторій, так і для наочності на окремих рисунках. Замкнутість кривих перерізів Пуанкаре свідчить про квазіперіодичний характер коливань.

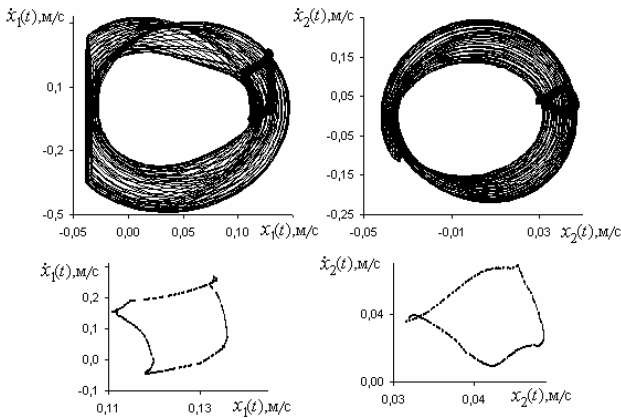


Рис. 6

Звернемо увагу на точку біфуркації \bar{C} (C). В цій точці нестійкий T -періодичний режим стає стійким. У зв'язку з тим, що в цій точці немає переходу від безударного режиму до режиму з періодичними ударами, мультиплікатори змінюються плавно. В таблиці 3 приведені значення мультиплікаторів в околиці точки \bar{C} (C).

Таблиця 3

ω , <i>rad/c</i>	Максимальне значення модулів мультиплікаторів	Кількість ударів на періоді T
4,748	1,0038	1
4,749	1,0030	1
4,750	0,9994	1
4,751	0,9992	1

3-ій діапазон $4,76 \text{ rad/c} \leq \omega \leq 6,07 \text{ rad/c}$, ділянки кривих $\bar{C} - \bar{D}$, $C - D$.

У цьому діапазоні частот T -періодичний коливальний рух віброударної системи стійкий, реалізується основний T -періодичний одноударний режим коливань. На рис. 7 приведені залежності переміщень основного та приєднаного тіл від часу та їхні фазові траєкторії при значенні частоти навантаження $\omega = 5,5 \text{ rad/c}$.

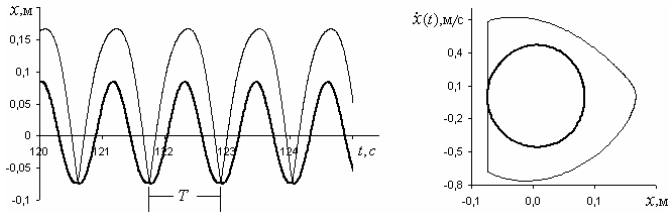


Рис. 7

4-ий діапазон $6,08 \text{ рад/с} \leq \omega \leq 6,36 \text{ рад/с}$, ділянки кривих $\bar{D}-\bar{E}$, $D-E$.

В точці \bar{D} (D) T -періодичний коливальний режим втрачає стійкість. І знову на цій ділянці частот прямим чисельним інтегруванням диференціальних рівнянь руху (1) отримуємо різні режими коливаний. Так, наприклад, при $\omega=6,1 \text{ рад/с}$ спостерігаємо хаотичні коливання (рис. 8).

Закони руху тіл віброударної системи $x_1(t), x_2(t)$ та графік зміни сили контактної взаємодії $F_{\text{кон}}(t)$ мають явно випадковий характер.

Переріз Пуанкаре має характерний вигляд для хаотичного руху і являє собою безладне розташування фазової точки, тобто вона не розміщується на якомусь простому геометричному об'єкті, як у випадках періодичних та квазіперіодичних коливаний.

При більших частотах навантаження отримуємо інші режими коливаний. Наприклад, при $\omega=6,30 \text{ рад/с}$

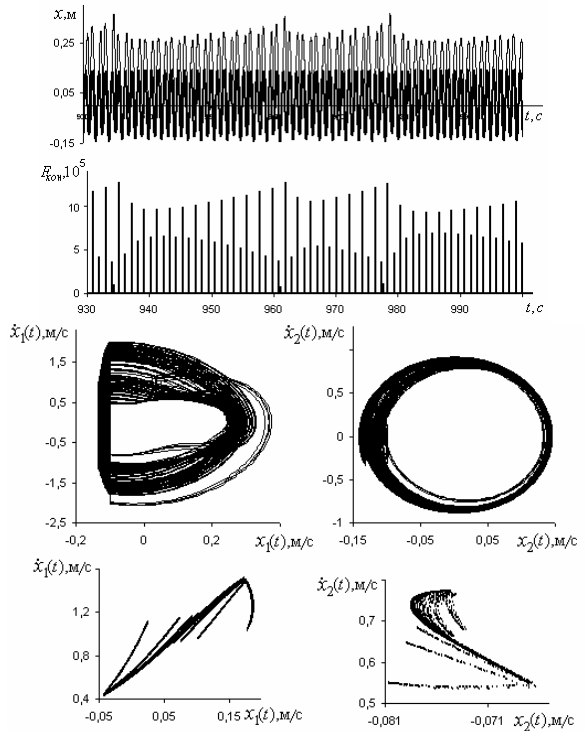


Рис. 8

реалізується $4T$ -періодичний шестиударний рух системи (рис. 9), а при $\omega=6,34 \text{ рад/с}$ – $2T$ -періодичний двоударний режим коливальний (рис. 10). Вигляд графіків контактної сили та перерізів Пуанкаре наочно демонструють nT -періодичність та k -ударність в (n,k) -режимі коливальний. Тут і далі у назві режиму коливальний n позначає кратність періоду коливальний віброударної системи періоду зовнішнього навантаження, k – кількість ударів за один цикл [13].

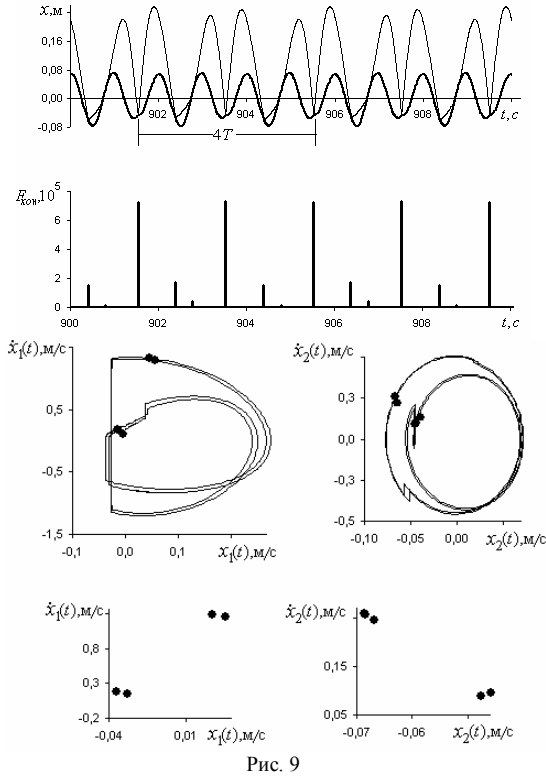


Рис. 9

5-ий діапазон $6,37 \text{ рад/с} \leq \omega \leq 7,45 \text{ рад/с}$, ділянки кривих $\bar{E} - \bar{K}$, $E - K$.

В точці \bar{E} (E) коливальний процес знову стає стійким T -періодичним та одноударним. Цей режим коливальний зберігається для всього діапазону частот. На рис. 11 приведені залежності переміщень основного та приєднаного тіл від часу та їхні фазові траєкторії при значенні $\omega=7,23 \text{ рад/с}$. На фазових портретах маркерами позначені перерізи Пуанкаре.

6-ий діапазон $7,46 \text{ рад/с} \leq \omega \leq 7,99 \text{ рад/с}$, ділянки кривих $\bar{K} - \bar{L}$, $K - L$.

Режими коливальний в області нестійкості T -періодичного режиму мають складний характер, характеризуються великою періодичністю та наявністю великої кількості ударів за цикл. На рис. 12 для прикладу приведені основні характеристики $14T$ -періодичного десятиударного руху тіл системи при значенні $\omega=7,7 \text{ рад/с}$. Відповідні перерізи Пуанкаре являють собою чотирнадцять окремих точок. Вони зображені маркерами як на тлі фазових траєкторій, так і для наочності на окремих рисунках.

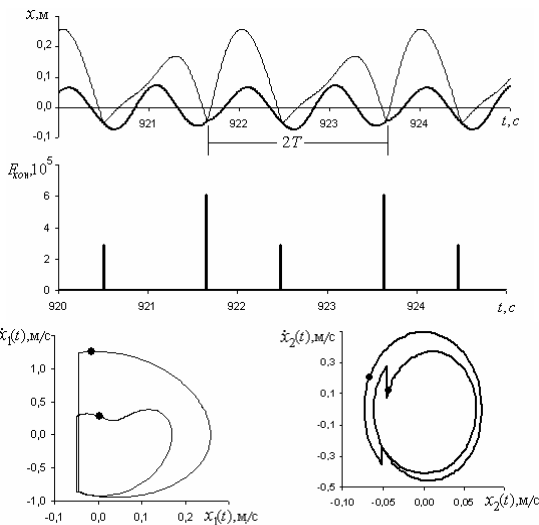


Рис. 10

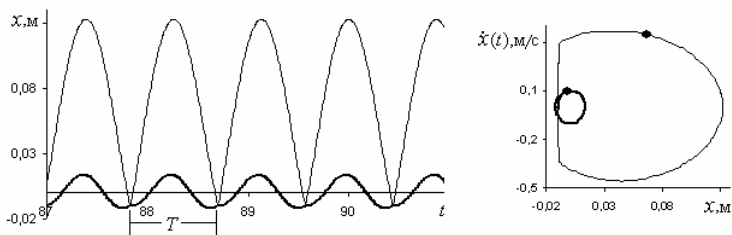


Рис. 11

7-ий діапазон $\text{rad/c} \leq \omega \leq 10,39 \text{ rad/c}$, ділянки кривих $\bar{L} - \bar{M}$, $L - M$; $\bar{M} - \bar{N}$, $M - N$; $\bar{N} - \bar{S}_1$, $(N - S_1)$.

У цьому діапазоні спостерігаємо найцікавіше явище: на графіку АЧХ бачимо, що тут одночасно побудовані три різні гілки кожної кривої. Дві гілки відповідають стійким режимам, а третя гілка – нестійкому стану віброударної системи.

Відомо, що динамічний стан сильно нелінійних систем надзвичайно залежить від їхнього вихідного стану. Наявність трьох різних режимів коливань у цьому діапазоні частот наглядно демонструє це явище.

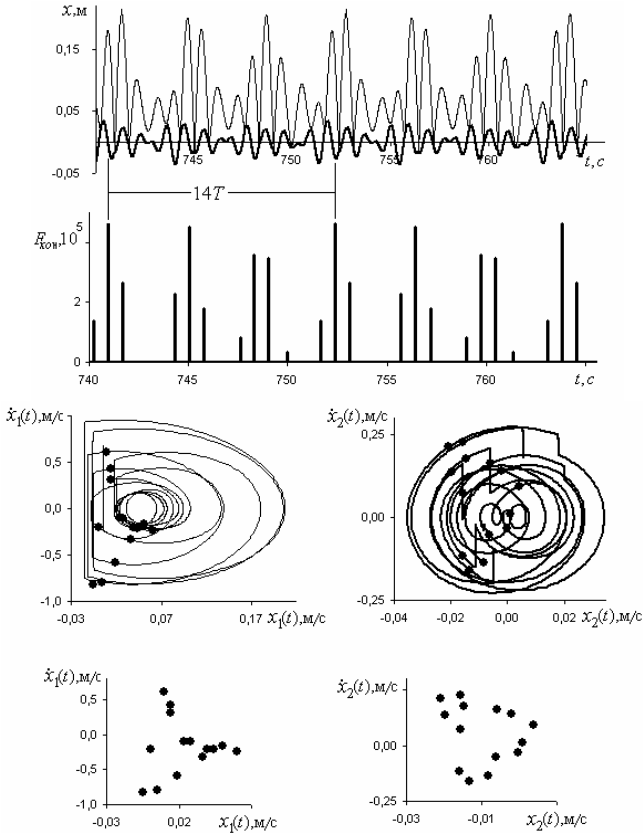


Рис. 12

Ці режими побудовані таким чином. Коли ми рухаємось вздовж кривої $\bar{D}-\bar{E}-\bar{K}-\bar{L}-\bar{M}$ ($D-E-K-L-M$) (рис. 2) крок за кроком додаючи до ведучого параметра частоти зовнішнього навантаження ω приріст $\Delta\omega_{(k)}$, ми отримуємо гілку $\bar{L}-\bar{M}$ ($L-M$) стійкого T -періодичного коливального руху. В точці \bar{M} (M) нев'язка стає дуже великою, щоб пройти цю точку, необхідно змінювати ведучий параметр. Але є інша можливість отримання розв'язків: якщо за початковий стан обрати стан системи в точці \bar{M} (M) та приріст ведучого параметру $\Delta\omega_{(k)}$ зробити від'ємним, то, рухаючись крок за кроком вздовж кривої розв'язку, одержимо гілку $\bar{M}-\bar{N}$ ($M-N$) нестійкого руху. В точці \bar{N} (N)

нев'язка знов стає великою і без заміни ведучого параметра подальший рух вздовж кривої розв'язку неможливий. Візьмемо тоді за початковий стан системи при значенні $\omega=12,0 \text{ rad/c}$, якому відповідає точка $\bar{S} (S)$, і надаючи приросту ведучого параметру $\Delta\omega_{(k)}$ від'ємні значення, крок за кроком отримуємо гілку $\bar{S} - \bar{N} (S - N)$ кривої розв'язків – гілку стійкого T -періодичного коливального руху.

Подивимось тепер, що являють собою стійкі T -періодичні режими коливань на цій ділянці. Пряме чисельне інтегрування рівнянь руху (1) методом Рунге-Кутта 4-го порядку з вихідним умовами (2) дає T -періодичний безударний режим коливань, приклад якого при $\omega=9,0 \text{ rad/c}$ зображений на рис. 13. Цей режим відповідає гілці $\bar{S} - \bar{N} (S - N)$ кривої розв'язків. Пряме чисельне інтегрування рівнянь руху (1) методом Рунге-Кутта 4-го порядку з вихідним умовами, що відповідають точці на гілці $\bar{L} - \bar{M} (L - M)$, дає T -періодичний одноударний режим коливань, приклад якого при $\omega=9,0 \text{ rad/c}$ зображений на рис. 14. Цей режим відповідає гілці $\bar{L} - \bar{M} (L - M)$ кривої розв'язків.

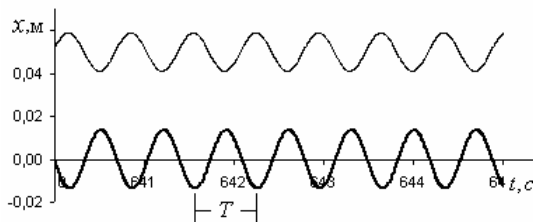


Рис. 13

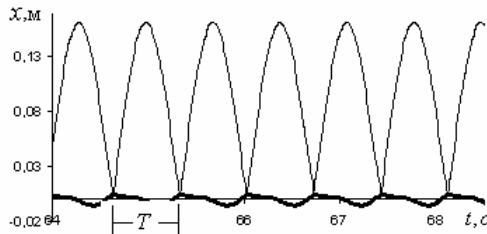


Рис. 14

Отже бачимо, що у віброударній системі можуть реалізовуватись різні стійкі T -періодичні коливальні стани – одноударний і безударний – і який з них реалізується в дійсності залежить від вихідних умов, тобто від того стану, в якому знаходилася віброударна систем перед тим, як вона

продовжила коливатися при незначній зміні частоти зовнішнього навантаження.

В точці $\bar{N}(N)$ віброударна система змінює безударний режим на режим з періодичними ударами, і мультиплікатори змінюються стрибкоподібно (таблиця 4), точка $\bar{N}(N)$ є точкою розривної біфуркації [12].

8-ий діапазон, $10,39 \text{ rad/c} < \omega$.

При великих частотах реалізується стійкий T -періодичний безударний коливальний рух віброударної системи, такий, як на рис.13.

Отримані результати зібрані в таблицю 5.

Таблиця 4

ω , <i>rad/c</i>	Максимальне значення модулів мультиплікаторів	Кількість ударів на періоді T
8,15	21,7080	1
8,14	23,2350	1
8,13	25,6330	1
8,12	29,0000	1
8,11	33,6080	1
8,10	37,3660	1
8,09	43,9670	1
8,08	55,1490	1
8,07	65,9350	1
8,06	90,1470	1
8,05	151,4100	1
8,04	0,8829	0
8,03	0,8828	0

Таблиця 5

№ діапазону	Ділянка АЧХ	Діапазон частот ω , <i>rad/c</i>	Режим коливань (n, k)
1	$\bar{A} - \bar{B}$, $A - B$	0,01 – 4,39	(1,0)
2	$\bar{B} - \bar{C}$, $B - C$	4,40 – 4,75	(3,1); (4,2); квазіперіодичний.
3	$\bar{C} - \bar{D}$, $C - D$	4,76 – 6,07	(1,1)
4	$\bar{D} - \bar{E}$, $D - E$	6,08 – 6,36	хаотичний; (4,6); (2,2)
5	$\bar{D} - \bar{E}$, $D - E$	6,37 – 7,45	(1,1)
6	$\bar{K} - \bar{L}$, $K - L$	7,46 – 7,99	Багатоперіодичні багатоударні; (14,10)
7	$\bar{L} - \bar{M}$, $L - M$	8,00 – 10,39	(1,1)
	$\bar{M} - \bar{N}$, $M - N$		–
8	$\bar{N} - \bar{S}_1$, $N - S_1$	більше 10,39	(1,0)
	$\bar{S}_1 - \bar{S}$, $S_1 - S$		(1,0)

Висновки

Методика продовження розв'язку за ведучим параметром в поєднанні з лінеаризацією алгебраїчної системи для визначення головних невідомих (приростів вихідних значень розв'язків), з використанням інтегрування задач Коші для визначення базових коефіцієнтів алгебраїчної системи, а

також з моделюванням удару контактною силою, яка описується за законом Герца, та з використанням теореми Флоке дає досліднику потужний інструмент для аналізу динамічної поведінки віброударної системи. Розроблені алгоритми забезпечують побудову залежності амплітуд тіл сильно нелінійної двохмасової віброударної системи з двома ступнями вільності від обраного ведучого параметра, зокрема, інтенсивності зовнішнього навантаження [8-10] та його частоти. Аналіз стійкості отриманих режимів коливального руху дозволяє одержати зони нестійких рухів, тобто такі зони, де T -періодичний коливальний рух в дійсності не реалізується. Пряме чисельне інтегрування рівнянь руху методом Рунге-Кутта 4 порядку підтверджує, що в зонах нестійкого руху в дійсності реалізуються nT -періодичні чи неперіодичні режими коливань. Проте, в діапазонах частот з нестійким T -періодичним рухом необхідно виконувати додаткове дослідження задля того, щоб з'ясувати, які саме коливальні режими реалізуються у таких діапазонах частот, зокрема будувати перерізи Пуанкаре, що і виконано в роботі. Необхідно також мати на увазі, що динамічний стан, якій встановлюється в сильно нелінійній віброударній системі при однаковому зовнішньому навантаженні, кардинально залежить від вихідних умов, що наочно продемонстровано в роботі.

Особливої уваги потребують точки біфуркації. Часто в таких точках продовження розв'язку стає неможливим тому, що швидко зростає нев'язка. Тоді для продовження розв'язку необхідно змінювати ведучий параметр. Питання про найкращу параметризацію в цієї статті не розглядається і є предметом подальшої роботи.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Григолюк Э.И., Шалашилин В.И. Проблемы нелинейного деформирования. М.: Наука, 1988.
2. Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б. Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. М.: Эдиториал УРСС, 1999.
3. Allgower E.L., Georg K. Introduction to numerical continuation methods. Berlin-New York: Springer-Verlag, 1990.
4. Гуляев В.И., Баженов В.А., Дехтярюк Е.С., Гоцуляк Е.А., Лизунов П.П. Устойчивость периодических режимов колебаний в нелинейных механических системах // Вища школа. – Львов, 1983. – 286 с.
5. Дехтярюк Е.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М. Стійкість сталих режимів коливань віброударних систем при періодичному навантаженні // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2001.-Вип.69.-С.10–18.
6. Дехтярюк Е.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М. Чисельні методи побудови амплітудно-частотних характеристик періодичних режимів коливань віброударних систем // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн. збірник - К.: КНУБА, вип. 70. 2002. - С. 69– 81.

7. Дехтярюк Є.С., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г., Гончаренко С.М. Аналіз усталених віброударних процесів в пружних системах при внутрішньому ударному контакті // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2003.-Вип.73.- С.31–44.
8. Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г. Розвиток методу продовження за параметром для віброударних систем при моделюванні удару силою контактної взаємодії// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2011.-Вип. 87. — К.: КНУБА, 2011.- С. 63–73.
9. Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г. Реалізація методу продовження за параметром для віброударних систем при побудові кривих навантаження// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2011.-Вип. 88. — К.: КНУБА, 2011.- С.56–64.
10. Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г. Модифікація методу продовження рішення по параметру для аналізу динаміки віброударних систем //Пробл. Прочности. - 2012. (Прийнята до друку).
11. Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г. Теоретичні основи аналізу динамічної поведінки віброударних систем // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2012.-Вип. 89. — К.: КНУБА, 2012.(Прийнята до друку).
12. Иванов А.П. Исследование разрывных бифуркаций в негладких динамических системах//Нелинейная динамика, 2012, 8 (2), С. 231– 247.
13. Lamarque C. H., Janin O. Modal analysis of mechanical systems with impact non-linearities: limitations to a modal// Journal of Sound and Vibration. - 2000. № 235(4). – P. 567– 609.

Стаття надійшла до редакції 07.11.2012 р.

Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ПРОДОЛЖЕНИЯ РЕШЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ ДЛЯ АНАЛИЗА ДИНАМИЧЕСКОГО ПОВЕДЕНИЯ ВИБРОУДАРНОЙ СИСТЕМЫ

В статье представлены результаты численных исследований режимов колебательного движения сильно нелинейной двухмассовой виброударной системы с двумя степенями свободы под действием периодического внешнего воздействия, которые были получены методом продолжения решения по параметру. Построены амплитудно-частотные характеристики, определены зоны устойчивости и неустойчивости T -периодического движения, приведены графические характеристики полученных колебательных режимов, в частности, сечения Пуанкаре, проанализировано динамическое поведение системы в широком диапазоне частот и в точках бифуркации.

Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.

PARAMETER CONTINUATION METHOD USING FOR ANALYSIS OF VIBROIMPACT SYSTEM DYNAMIC BEHAVIOUR

Results of oscillatory movement numerical investigations are presented in this article. The authors examine the behaviour of nonlinear two-mass vibroimpact system with two degrees of freedom under periodical loading. The investigations are fulfilled by parameter continuation method. The Frequency responses are constructed, the steady and non-steady zones of T -periodic movement are determined. The graphic characteristics of received oscillatory regimes are given. In particular the Poincare cross-sections are given too. The system dynamic behaviour in wide frequency diapason and at bifurcations points is analysed.