

УДК 539.3

**О.І. Гуляр**, д-р техн. наук,  
**П.П. Лізунов**, д-р техн. наук,  
**І.І. Солодей**, канд. техн. наук

## **МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПОЯВИ ТА РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ЗОН РУЙНУВАННЯ КРУГОВИХ НЕОДНОРІДНИХ ДИСПЕРСНО-АРМОВАНИХ ТІЛ**

Представлені дослідження спрямовані на створення нових фізичних і математичних моделей та алгоритмів ефективного чисельного моделювання нелінійної роботи широкого класу просторових залізобетонних конструкцій з урахуванням пластичних деформацій, тріщиноутворення і спільної роботи з армуванням та облицюванням.

### **Вступ**

Актуальність створення ефективних методів розрахунку залізобетонних конструкцій обумовлена двома чинниками: широким застосуванням залізобетону в сучасному промисловому й цивільному будівництві, а також складністю фізичних процесів, що протікають при деформації і руйнуванні цього матеріалу. Найбільше поширення залізобетонні конструкції отримали при зведенні житлових, громадських і промислових будівель, гідротехнічних, транспортних споруд, в енергетичному будівництві. При розрахунку багатьох унікальних об'єктів (корпуси реакторів, градирні, захисні оболонки АЕС) домінуючою вимогою є надійність, тоді як для типових (фундаменти дрібного закладання, стінні панелі) - економічність. Але в обох випадках розрахунок повинен передбачати можливість тріщиноутворення в бетоні. Тільки аналіз роботи конструкцій з урахуванням розвитку тріщин дозволяє розкрити особливості взаємодії бетону, що сприймає стискаюче напруження, і арматури, переважно працюючої на розтяг, і передбачити спеціальні заходи (наприклад, попереднє напруження), що запобігають руйнуванню матеріалу або обмежують зони утворення тріщин.

В області розрахунків залізобетонних конструкцій з урахуванням тріщиноутворення досягнуті значні успіхи, однак залишається ряд важливих невирішених завдань, серед яких розглянемо наступні. Відомі умови міцності бетону і використані в них константи справедливі тільки у деякому діапазоні геометричних розмірів зразків і елементів конструкцій. Відсутність позитивного досвіду чисельного моделювання тріщиностійкості і деформативності бетону у мікроскопічних об'ємах на контакті з арматурою періодичного профілю свідчить про необхідність

розвитку феноменологічних теорій опору бетону в умовах неоднорідного напруженого стану. Крім того, складність розрахунків таких перспективних залізобетонних конструкцій, як ядерні реактори, обумовлена необхідністю урахування спільної роботи масиву бетону зі сталевими герметизуючими облицюваннями і металоконструкціями, що підсилюють зони концентрації напружень.

У рамках традиційних інженерних методик практично неможливо розрахувати реальні залізобетонні конструкції складної просторової форми з використанням математичних моделей, що адекватно описують нелінійну роботу залізобетону, ґрунтової основи і тонкостінних металевих елементів. Тому перспективним представляється комбінація математичних моделей нелінійної роботи конструкційних матеріалів із чисельними методами будівельної механіки та шагово-ітераційними алгоритмами. Ця методика дозволяє простежити послідовність станів досліджуваного об'єкта від початку навантаження до граничного навантаження без внесення будь-яких обмежень на характер вичерпання несучої здатності.

## **1. Структура бетону та деякі особливості його механічних властивостей**

Як відомо, бетон є неоднорідним матеріалом для якого характерна наявність великого і дрібного заповнювача, пор та усадочних мікротріщин [12], які негативно впливають на опір бетону зовнішнім впливам. Однак, як відзначає А.А. Гвоздьов [18], ці фактори в ряді випадків визначають важливі позитивні властивості бетону. З одного боку, неоднорідність структури бетону сприяє утворенню мікротріщин, а з іншого - гальмує їх переростання в макротріщини і розвиток, небезпечний для опору матеріалу навантаженням.

Як відзначається в роботі Glucklich [28], розвиток тріщини в бетоні при зустрічі із зернами заповнювача, порами або порожнечами уповільнюється. Зерно великого заповнювача має підвищену міцність у порівнянні з розчином і перешкоджає подальшому просуванню тріщини, для якого необхідно або руйнування зерна, або зміна траєкторії тріщини. Пори і порожнечі, яких досягає вершина тріщини, зменшують концентрацію напружень в усті тріщини, що також затримує її розвиток. Аналогічна концепція висловлена В.В. Новожиловим [16], який припускав, що дефекти структури матеріалу і їх скупчення створюють енергетичні бар'єри на шляху поширення тріщин.

Неоднорідність структури бетону, наявність природніх концентраторів напружень і складного поля вторинних напружень обумовлюють низьку чутливість бетону до зовнішніх концентраторів напружень. Експерименти, проведені Shah і Mcgarry [19] при

випробуваннях на вигин балок із трикутним ослабленням розтягнутої зони під вантажем, і досліди на розтяг із плоскими зразками, ослабленими по краях або посередині перетину, показали, що вплив зовнішніх концентраторів напружень на зменшення рівня руйнівного напруження було тим менше, чим більше неоднорідність бетону. Зокрема, для вигину балок з важкого бетону - не досягало 6%. Аналогічні дані наведені в роботі Г.Д. Цискрелі [24], де викладені результати випробувань на розтяг і вигин бетонних зразків з надрізами різної форми і розмірів. Наявність пропилів трикутної, кругової і прямокутної форми в середині прольоту балки під зосередженим навантаженням приводило до зменшення руйнівного напруження на 13-17%. Гранична величина напруження при розтязі зразків призматичної форми з надрізами трикутного профілю однакової глибини зменшувалася на 6-11% залежно від форми надрізу. На цій підставі автором [24] зроблено висновок про те, що бетон мало чутливий до концентрації напружень у вигляді надрізів. До аналогічного висновку приводять результати роботи Wright і Вугле [31].

Деформування і руйнування бетону - складний процес. Мікроскопічні дослідження структури призматичних зразків із дрібнозернистого бетону показали [3,14], що існування хрупкого і пластичного стану в їх традиційному розумінні (тобто малі деформації і руйнування шляхом відриву, характерні для хрупкого матеріалу, великі нелінійні деформації і руйнування від зсуву - у випадку пластичного матеріалу) характерні для бетону при одночасній дії таких явищ, як утворення мікротріщин, з одного боку, та пластичного ковзання і механічного удвоєння з іншого. Всебічне обтиснення перешкоджає тріщиноутворенню і дозволяє розвиватися пластичним деформаціям. Позитивний гідростатичний тиск (всебічний розтяг) приводить до того, що домінує розвиток мікротріщин і матеріал руйнується крихко, а негативне - обумовлює прояв пластичних властивостей.

Масштабний фактор, тобто вплив об'єму бетонного зразка на його характеристики міцності, встановлений у численних експериментах і враховується державними будівельними нормами при призначенні розмірів зразків для контрольних випробувань. Необхідність урахування масштабного фактора в задачах зчеплення на основі теорії, яка б пов'язувала поведінку бетону у великих і малих об'ємах, відзначається М.М. Холмянським [22], оскільки в подібних дослідженнях доводиться аналізувати міцність бетону в різних областях.

Пояснення масштабного ефекту обґрунтовується в рамках статистичної теорії крихкого руйнування [5]. Ідея побудови статистичної теорії запропонована А.П. Александровим і С.М. Журковим [1] і далі розвинена в роботах Вейбулла (Weibull) [30], В.В. Болотина [5] та ін.

Згідно [30] руйнування залежить від місцевого напруження в точці, де спостерігається найнебезпечніший дефект структури. Тіло має багато дефектів різного ступеня небезпеки, які підпорядковуються деякому статистичному розподілу. Чим крупніше тіло, тим більше ймовірність виявити первинний елемент низької міцності і тим нижче міцність тіла в цілому. Для природніх і штучних каменів роль первинних елементів відіграють зерна і поверхні контакту (спайки) між ними.

На основі аналізу результатів великої кількості випробувань бетонних зразків при осьовому розтязі і концепцій статистичної теорії Вейбулла в роботі Г.Д. Цискрелі [24] запропонована залежність, що описує масштабний ефект:

$$\frac{R'_p}{R_p} = 0.3 \left( 1 + \frac{11}{\sqrt[3]{F}} \right). \quad (1)$$

Тут  $R'_p$  - міцність зразка довільних розмірів,  $R_p$  - міцність зразка основного розміру,  $F$  - площа поперечного перерізу першого зразка. Відповідно до (1) при зменшенні розмірів бетонного зразка до величин порядку 1-2 мм міцність зростає в 10-15 разів у порівнянні з нормативною, що узгоджується з даними М.М. Холмянського [21] і результатами експериментальних досліджень Ш.А. Алієва [2], Ф.С. Белавіна [23] і Rehm [29]. Експерименти полягали у висмикуванні із бетонного зразка анкерів різної форми і розмірів (анкери мали вигляд шайб і квадратних пластинок). Автором роботи [22] був зроблений висновок про збільшення міцності бетону в малому об'ємі стосовно опору матеріалу зсуву ( $\tau_s$ ). Це достатньо умовно, тому що складний напружений стан бетону, що взаємодіє з анкером, відрізняється від чистого зсуву. Наведені вище міркування про масштабний характер міцності бетону і статистичний підхід можуть, очевидно, пояснити високу міцність бетону в області контакту з арматурами періодичного профілю. Так, М.М. Холмянский [22] відзначив, що шар бетону товщиною порядку декількох міліметрів, що безпосередньо примикає до профільованого арматурного стрижня, здатний сприймати значні нелінійні деформації і напруження, які в кілька разів перевищують межі міцності, що встановлені на стандартних зразках. Підвищена деформативність шару бетону в контакт з арматурою передбачалася також М.І. Карпенко [9].

Донедавна будівельними нормами передбачалося урахування збільшення границі опору бетону стиску при вигині балок. У середньому міцність на стиск при вигині має вигляд:

$$R_c^u = 1.25 R_c, \quad (2)$$

де  $R_c$  - призмenna міцність. Це явище можна пояснити зменшенням об'єму, у межах якого діє небезпечне напруження. Скептичне відношення до відмінності опору бетону нерівномірному і рівномірному стиску автори [8] обґрунтовують великим розсіюванням дослідних даних. Розглянуте явище, очевидно, носить масштабний характер, що необхідно враховувати при систематизації результатів випробувань. При випробуваннях бетонних зразків з постійною швидкістю деформування (кінематичне навантаження) спостерігається спадна гілка діаграми напруження - деформація. Це явище, відоме також за назвою "деформаційне знеміцнення", може проявлятися тільки тоді, коли розмір крупного заповнювача не занадто малий у порівнянні з розміром зразка, а дослідна машина має достатню твердість [26]. Його природа обумовлена поступовим розвитком мікротріщин, розподілених в об'ємі бетону [27]. Урахування спадної гілки діаграми деформування бетону дозволяє уточнити неоднорідний розподіл напружень у статично невизначених системах, однак деформаційне знеміцнення ще мало вивчене для того, щоб виконувати чисельні розрахунки [15].

Аналіз викладених механічних властивостей бетону, обумовлених його складною структурою, дозволяє стверджувати, що в основу методики розрахунків залізобетонних конструкцій повинна бути покладена теорія, що адекватно описує такі явища, як пластичність, деформаційне знеміцнення, тріщиноутворення, залежність міцності і деформативності від виду напруженого стану і масштабного фактору.

## **2. Побудова критерію міцності бетону в зонах концентрації напружень**

Приймаємо наступні фізичні припущення, що основані на викладених вище особливостях структури і поведінки бетону при навантаженні:

1. В умовах неоднорідного напруженого стану міцність  $R_D$  малого бетонного елемента конструкції під дією осередненого в межах цього елемента напруження  $\sigma_D$  буде така ж, як міцність зразка бетону аналогічного розміру при однорідному розподілі напруження такого рівня, що і осереднене  $\sigma_D$ . Інакше кажучи, в умовах неоднорідного напруженого стану осереднена частина розподілу напруження  $\sigma_D$  діє на малий елемент конструкції, у межах якого проводиться осереднення, так само, як і однорідно розподілене напруження  $\sigma_D$  на зразок таких же розмірів.

2. Під елементом конструкції маємо на увазі елемент, який за формою близький до куба, з розмірами, що оговорені в пп. 3 і 4.

3. За верхню границю приймається розмір зразка, рекомендований

ДСТ для стандартних випробувань на міцність, або максимальна відстань до зовнішньої поверхні досліджуваної області. Таким чином, верхня границя розміру малого елемента приймається рівною мінімальній із зазначених величин.

4. Нижня границя визначається розмірами зерен матеріалу. В роботі [16] представлені рекомендації до вибору області розміром порядку розміру зерна для осереднення напруження в околі точки, де напруження і його градієнти нескінченно великі. У розглянутому випадку (для бетону в задачах зчеплення) нижня границя розміру малого елемента приймається рівною середньому розміру зерна дрібного заповнювача (0.1-0.2 мм).

5. У випадку однорідного напруженого стану міцність конструкції або зразка визначається у відповідності до їх габаритних розмірів.

6. Міцність малого елемента бетону  $R_D$  залежить від розміру цього елемента і приймається згідно з масштабним співвідношенням, яке запишемо за аналогією з (1) у вигляді:

$$\frac{R_D}{R} = 0.356(1 + 11V_D^{-2/9}), \quad (3)$$

де  $R$  - міцність бетонного зразка стандартних розмірів (його характерний лінійний розмір, тобто розмір сторони квадратного перетину - 15 см);  $V_D$  - об'єм малого елемента бетону у формі куба зі стороною  $D$ .

Треба зазначити, що:

$$\frac{1}{\sqrt[3]{F}} = \frac{1}{\sqrt[3]{D^2}} = D^{-2/3} = \left(\sqrt[3]{V_D}\right)^{-2/3} = V_D^{-2/9}. \quad (4)$$

На основі викладених фізичних передумов сформулюємо концепцію опору бетону в умовах неоднорідного напруженого стану, що ґрунтується на масштабному характері умов міцності неоднорідного матеріалу. За кількісну характеристику неоднорідності напруженого стану в околі концентратора приймаємо функцію  $\sigma_D = \sigma_D(V_D)$ , де  $V_D$  - об'єм області, що включає в собі концентратор, та в межах якої відбувається осереднення напруження  $\sigma_D$ . За кількісну характеристику міцності бетону в умовах неоднорідного напруженого стану скористаємося функцією  $R_D = R_D(V_D)$  у вигляді експериментально встановленої залежності (3). Таким чином, умова міцності визначається нерівністю  $\sigma_D < R_D$  ( $\sigma_D$  і  $R_D$  обчислюються при тому самому значенні  $V_D$ ).

Застосування умови міцності (3) для двох різних функцій  $\sigma_{D1} = \sigma_{D1}(V_D)$  і  $\sigma_{D2} = \sigma_{D2}(V_D)$  розподілу напруження в околі деякої точки  $A$  конструкції наведено на рис. 1.

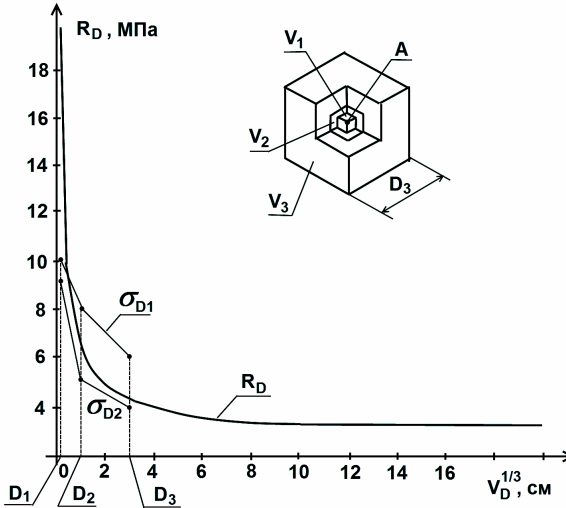


Рис. 1. Оцінка міцності бетону в зоні концентрації напружень ( $R = 2 \text{ МПа}$ )

Якщо криві  $\sigma_{D1} = \sigma_{D1}(V_D)$  і  $R_D = R_D(V_D)$  не перетинаються, то припускаємо, що градієнт напруження в околі точки  $A$  великий настільки, що ймовірність руйнування бетону нехтовно мала. Якщо криві  $\sigma_{D2} = \sigma_{D2}(V_D)$  і  $R_D = R_D(V_D)$  перетинаються, то вважаємо, що напружений стан в околі точки досить однорідний і ймовірність руйнування бетону велика.

Оскільки в літературі відсутні систематизовані експериментальні дані про значення граничної деформації в умовах неоднорідного напруженого стану, за перше наближення приймаємо величину  $\varepsilon'_D$ , що пропорційна збільшенню міцності згідно з рівнянням (3):

$$\frac{\varepsilon'_D}{\varepsilon} = \frac{R'_D}{R}, \quad (5)$$

де  $\varepsilon'$  - гранична деформація бетонного зразка стандартних розмірів у випадку однорідного напруженого стану.

При чисельній реалізації розрахунків на базі МСЕ в якості мінімального елемента бетону, в межах якого осереднюється напруження, доцільно використовувати скінченні елементи. Крім того, осереднення напруження необхідно виконувати і в межах більших підобластей конструкції, що складаються із декількох СЕ.

Аналіз міцності конструкції для дискретної моделі виконується у відповідності з наступним алгоритмом:

1. осереднене в межах СЕ напруження  $\sigma_D^{fe}$  порівнюємо з границею міцності  $R_D^{fe}$ , що відповідає його розміру, при  $\sigma_D^{fe} > R_D^{fe}$  фіксуємо утворення тріщин, в іншому випадку переходимо до процедури п. 2;

2. обчислюємо напруження  $\sigma_D^{fes}$ , що осереднене по набору скінченних елементів, суміжних з розглянутим (включаючи цей СЕ); можливі кілька етапів осереднення, результатом яких будуть значення  $\sigma_{D1}^{fes}, \sigma_{D2}^{fes}, \dots, \sigma_{Dn}^{fes}$ , відповідні до зростаючих розмірів області осереднення напружень;

3. кожне з отриманих значень напруження  $\sigma_{Dn}^{fes}$  порівнюємо з границею міцності  $R_{Dn}^{fes}$ , що відповідає розміру області осереднення напруження; утворення тріщин у розглянутому СЕ фіксуємо в тому випадку, якщо хоча б на одному з етапів осереднення виконується умова  $\sigma_{Dn}^{fes} > R_{Dn}^{fes}$ .

Природно, що в умовах складного напруженого стану під напруженням  $\sigma_D$  маємо на увазі деяку скалярну функцію (функцію міцності) інваріантів тензора напружень  $\hat{\sigma}_D$ , а під  $R_D$  - граничне значення функції міцності для розглянутого виду напруженого стану і характеристик міцності бетону, обчислених згідно (3) для відповідних розмірів області осереднення міцності  $\sigma_D$ . Конкретний вид функції міцності визначається обраною теорією міцності бетону.

Таким чином, викладені вище фізичні передумови і концепція опору бетону є узагальненням особливостей поведінки бетону в умовах неоднорідного напруженого стану і розвитком відомих підходів до урахування концентрації напружень і масштабного ефекту. Заснована на них математична модель опору бетону реалізується як алгоритм осереднення функції міцності в області концентрації напружень.

### **3. Узагальнення теорії М.І.Карпенко при моделюванні деформування та руйнування бетону з урахуванням концентрації напружень**

В запропонованій роботі розрахункові співвідношення для опису деформативності і міцності бетону в умовах тривимірного напруженого стану отримані на основі теорії М.І. Карпенко [12,13], яка має низку переваг у порівнянні з іншими відомими теоріями. Наприклад, ортотропна модель нелінійного деформування дозволяє враховувати спрямований розвиток дилатації, зменшення (спадаючу гілку діаграми напруження - деформація) і особливості поведінки бетону при стисненні і розтязі. Форма поверхні міцності відповідає сучасним вимогам до феноменологічних теорій міцності матеріалів з різним опором розтягу і



стисненню [17, 25]. Крім того, вона залежить від особливостей опору конкретного виду бетону, які встановлюються при стандартних випробуваннях виготовлених з нього зразків. Умова міцності придатна для широкого класу бетонів і забезпечує достатньо близький збіг з експериментальними даними для різноманітних варіантів тривимірного напруженого стану [12]. Для важкого бетону умова міцності інтерпретується в просторі головних напружень граничною поверхнею (рис. 2), яку представимо у вигляді рівняння:

$$\frac{3\tau_{oc}^2}{3+\mu_\sigma} [b(3+\mu_\sigma)+a(3-\mu_\sigma)] - \frac{\tau_{oc}R_{bD}}{\sqrt{2(3+\mu_\sigma^2)}} [k_c(3-6b-\mu_\sigma)+6\delta_p] - \frac{6\tau_{oc}\sigma_{oc}}{\sqrt{2(3+\mu_\sigma^2)}} (b-a) + \sigma_{oc}k_cR_{bD} - \delta_p k_c R_{bD}^2 = 0, \quad (6)$$

де  $a$  і  $b$  - коефіцієнти матеріалу;  $\sigma_{oc}$  і  $\tau_{oc}$  - нормальне і дотичне октаедричні напруження;  $\mu_\sigma$  - параметр Лоде-Надаї;  $k_c$  - функція, що враховує вплив виду напруженого стану на зміну міцності бетону в області тривимірного або двовимірного стиснення;  $\delta_p$  - функція, що дозволяє врахувати вплив виду напруженого стану на міцність бетону в умовах всебічного або двохосового розтягу.

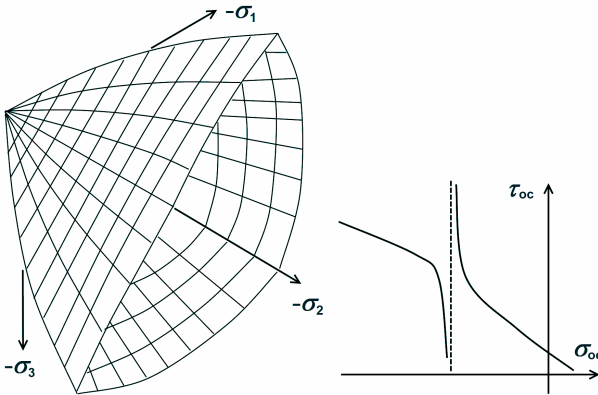


Рис. 2. Поверхня міцності бетону ( $\mu_\sigma = -0.4641$ )

Тут і надалі будемо використовувати параметри  $R_{bD}$  і  $R_{btD}$ , що характеризують міцність бетону в умовах неоднорідного напруженого стану згідно п.2 на відміну від [12], де за постійні матеріалу

застосовують  $R_b$  і  $R_{bt}$  - границі міцності бетону при стандартних випробуваннях на осьовий тиск і розтяг.

Особливістю критерію (6) є також використання коефіцієнта  $\aleph = \sigma_{oc} / \tau_{oc}$ , який поряд з параметром Лоде-Надаї характеризує вид напруженого стану, а також функції міцності  $s = \sigma_{oc} / \tau_{oc}^*$ , де  $\tau_{oc}$  і  $\tau_{oc}^*$  - досягнуте і граничне значення октаедричного дотичного напруження. Перевага такого підходу полягає в тому, що обчислення функції  $s$  дозволяє не тільки визначити чи досягнути границі міцності, але також і оцінити при  $s < 1$  у скільки разів слід збільшити навантаження, для того щоб утворювалися тріщини. Значення  $\tau_{oc}^*$  обчислюється за допомогою рівняння, яке отримане при підстановці  $\sigma_{oc} = \aleph \tau_{oc}$  в (6):

$$A^* \tau_{oc}^2 + B^* \tau_{oc} + C^* = 0, \quad (7)$$

де

$$A^* = \frac{3}{R_{bD}(3 + \mu_\sigma^2)} \left[ \aleph(b-a) \sqrt{2(3 + \mu_\sigma^2)} - b(3 + \mu_\sigma) - a(3 - \mu_\sigma) \right];$$

$$B^* = \frac{1}{\sqrt{2(3 + \mu_\sigma^2)}} \left[ k_c(3 - 6b + \mu_\sigma) + 6\delta_p \right] - \aleph k_c; \quad C^* = \delta_p k_c R_{bD}.$$

Рівняння (6) задовольняється при підстановці головних напружень, відповідних до одноосового розтягу ( $\sigma_1 = R_{bD}$ ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ), якщо коефіцієнт  $b$  обчислюється по формулі:

$$b = \frac{\delta_p}{k_c + \frac{\sigma_3}{\sigma_1} \delta_p - n \delta_p}, \quad (8)$$

де  $n = a / b$ .

Однак, як показав аналіз функції (6), формула (8) приводить до розриву при  $\sigma_1 = 0$  в області негативних значень  $\sigma_{oc}$  (рис. 2). В даній роботі формулу (8) використовували лише при  $\sigma_{oc} \geq 1/3 R_{bD}$ , а при  $0 \leq \sigma_{oc}$  згідно [11] встановлювали  $b = 0.1$ . В інтервалі  $0 < \sigma_{oc} < 1/3 R_{bD}$  коефіцієнт обчислювали за допомогою інтерполяції:

$$b = b_c - (b_c - b_t) \frac{3\sigma_{oc}}{R_{bD}}, \quad (9)$$

де значення  $b_t$  визначалося по (8), а  $b_c = 0.1$ .

Перевірка міцності за критерієм (6) здійснюється як послідовність обчислювальних процедур, вихідними даними для яких є:

- константи матеріалу  $R_{bD}$  і  $R_{btD}$ , які встановлюються згідно

державним будівельним нормам або стандартним випробуванням зразків і корегуються з урахуванням концентрації напружень відповідно до п. 2;

- параметри моделі, не пов'язані з напруженим станом, а залежні лише від виду бетону, обчислюються згідно [12] по (8) і (9):

$$n = 0; a = nb;$$

$$\delta_{p(1)} = \frac{R_{bd}}{R_{bd}}; \delta_{p(2)} = \delta_{p(1)} (1 - \delta_{p(1)}); \varphi_{R(e)} = 3\delta_{p(2)};$$

$$c = \frac{1 - (1+d)e}{(1+d)(1-e)}; d = \sqrt{0.5}; e = 0.3 + \frac{R_b}{200(MPa)}; \quad (10)$$

$$\mu_3^* = -0.6; \Delta = 0.25\delta_{p(1)};$$

- головні напруження в бетоні  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ , отримані з розрахунку конструкції.

Визначаємо розрахункові параметри напруженого стану  $\sigma_{oc}, \tau_{oc}, \mu_\sigma, \aleph = \sigma_{oc}/\tau_{oc}$ . Обчислюємо параметри моделі, що залежать від напруженого стану:

$$k_c = 1 + \varphi_{R(e)} \left\{ 1 - \left[ \frac{(1-c)(1-\mu_\sigma - 2e)}{2e + c(1-\mu_\sigma - 2e)} \right]^2 \right\};$$

$$\Phi = \frac{\Delta \sqrt{3 + \mu_\sigma^2}}{3\sqrt{2}}; \mu_\sigma^* = \frac{\mu_\sigma + \Phi R_{bd}/\tau_{oc}}{1 + \Phi R_{bd}/\tau_{oc}}; \quad (11)$$

$$\delta_p = \delta_{p(2)} + (\delta_{p(1)} + \delta_{p(2)}) \left[ 1 - \frac{(\mu_\sigma^* - \mu_p^*)\mu_\sigma^*}{1 - \mu_p^*} \right].$$

Знаходимо коефіцієнти  $A^*, B^*, C^*$  рівняння (7). Вирішуємо рівняння (7) відносно  $\tau_{oc}^*$ . Перевіряємо значення функції міцності  $s = \tau_{oc}/\tau_{oc}^*$ : якщо  $s < 1$  - міцність забезпечена; якщо  $s \geq 1$  - утворюються тріщини.

Теорія М.І. Карпенко, як і інші феноменологічні теорії міцності, які основані на критеріях, що сформульовані в інваріантах тензора напружень, не дозволяє визначити орієнтацію площини руйнування. Для розв'язку цієї проблеми застосуємо методику М.М. Филоненко-Бородича [20] до умови міцності (6) аналогічно [4].

Запишемо рівняння граничної поверхні (6) у більш загальному вигляді:

$$F(\sigma_{oc}, \tau_{oc}, \mu_\sigma) = 0. \quad (12)$$

Його можна розглядати як двопараметричну множину кіл Мору, з якої шляхом фіксації значення параметра  $\mu_\sigma$  виділяється

однопараметрична множина і будується огинальна Мора. Фіксуючи значення  $\mu_\sigma$ , вибираємо деякі меридіональні перетини граничної поверхні  $\sigma_{oc} = \sigma_{oc}(\tau_{oc})$ . По Морі, руйнування відбувається шляхом зсуву по площині, нахил якої по відношенню до головних осей тензора напружень обчислюється на основі тангенса кута нахилу дотичної до огинальної Мора у відповідній точці (рис. 3):

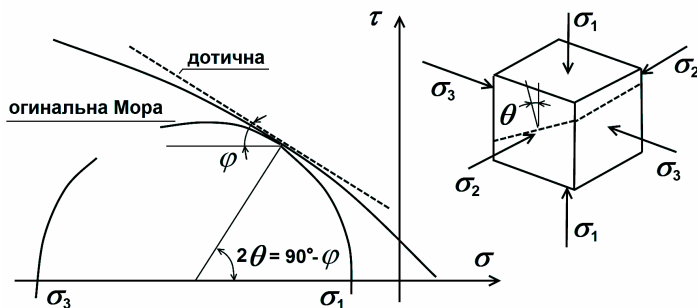


Рис. 3. Визначення орієнтації площини тріщини

$$\eta = \sqrt{2(3 + \mu_\sigma^2)}; \operatorname{tg} \varphi = \frac{3}{\eta \sqrt{\left( \left| \frac{d\sigma_{oc}}{d\tau_{oc}} \right| - \frac{\mu_\sigma}{\eta} \right)^2 - \frac{9}{\eta^2}}}. \quad (13)$$

Диференціюючи (6), одержуємо:

$$\frac{d\sigma_{oc}}{d\tau_{oc}} = \frac{6\tau_{oc} [6(a+b) + (b-a)(2\mu_\sigma - \aleph\eta)]}{6\tau_{oc}(b-a) - R_{bD}k_c\eta} + \frac{R_{bD}\eta [k_c(3-6b-\mu_\sigma) + 6\delta_p]}{6\tau_{oc}(b-a) - R_{bD}k_c\eta}. \quad (14)$$

Дослідження функції (14) показало, що підкореневий вираз в (13) завжди позитивний і (14) має сенс при будь-яких параметрах напруженого стану, що задовольняють рівнянню (6).

Порівняємо результати застосування викладеного підходу до обчислення орієнтації площини руйнування з експериментальними значеннями кутів нахилу тріщин, зафіксованими І.Г. Гончаровим [7] при випробуваннях циліндричних зразків із цементного розчину (табл.1) Наявні також експериментальні значення граничного осьового стиску при різних рівнях бічного тиску і обчислені аналітично за критеріями М.І. Карпенко (6) та Генієва-Кисюка [6].

У розрахунках фіксувався вид напруженого стану:  $\mu_\sigma$  і  $\aleph$  встановлювалися рівними експериментальним. Точність значень кутів нахилу тріщин, обчислених по (13) і (14), уступає результатам, що

отримані згідно з теорією Генієва-Кисюка, однак похибка обчислень розкиду кутів нахилу тріщин становить  $\pm 5\%$  [10]. При цьому значення граничного осьового стиску, розраховані за критерієм М.І. Карпенко, набагато краще узгоджуються з даними випробувань, ніж ті, що обчислені по теорії Г.О. Генієва.

Таблиця 1

Г.І. Гончаров			Г.О. Генієв		М.І. Карпенко	
Бічний тиск $\sigma_r$ , МПа	Осьовий тиск $\sigma_z$ , МПа	$\theta^e$ , град	Осьовий тиск $\frac{\sigma_z}{\Delta}$ , МПа / %	$\theta^a$ , град	Осьовий тиск $\frac{\sigma_z}{\Delta}$ , МПа / %	$\theta^a$ , град
0.0	18.84	23.50	$\frac{18.84}{0}$	$\frac{28.3}{4.6}$	$\frac{18.84}{0}$	$\frac{22.7}{-0.8}$
2.0	27.37	29.70	$\frac{24.30}{-12.6}$	$\frac{30.8}{1.1}$	$\frac{28.67}{4.5}$	$\frac{26.5}{-3.2}$
4.0	34.64	31.80	$\frac{28.26}{-22.6}$	$\frac{32.1}{0.3}$	$\frac{36.31}{4.6}$	$\frac{28.7}{-3.1}$
6.0	40.35	32.50	$\frac{31.86}{-26.7}$	$\frac{33.1}{0.6}$	$\frac{43.32}{6.8}$	$\frac{30.3}{-2.2}$
7.7	46.96	35.70	$\frac{33.69}{-39.3}$	$\frac{33.5}{-2.2}$	$\frac{46.86}{-0.2}$	$\frac{31.0}{-4.7}$

Згідно [13] співвідношення між головними напруженнями  $\{\sigma\}$  і деформаціями  $\{\varepsilon\}$  можна представити за допомогою матриці податливості  $[D]$  зі змінними коефіцієнтами:

$$\{\varepsilon\} = [D]\{\sigma\}, \quad (15)$$

де  $D_{ij} = \frac{1}{E_b v_{bi}}$  при  $i=j$  і  $D_{ij} = D_{ji} = -\frac{v_{nij}}{E_b \tilde{v}_{bj}}$  при  $i \neq j$ ;  $E_b$  - початковий модуль пружності бетону;  $v_{bi}, \tilde{v}_{bj}$  - коефіцієнти зміни січного модуля бетону;  $v_{nij}$  - коефіцієнт поперечної деформації.

Формули, по яких обчислюються коефіцієнти  $D_{ij}$ , відрізняються для областей I і II, де поряд із стискаючими можуть бути напруження розтягу  $\sigma_1$  і  $\sigma_2$ . Так, виходячи з [13], запишемо:

$$v_{bi} = \tilde{v}_{bi} = v_{b3} = \hat{v}_{b3} \pm \left( v_{03} - \hat{v}_{b3} \right) \sqrt{1 - e_{13} \eta_3 - e_{23} \eta_3^2}, \quad (16)$$

де знак "+" відповідає висхідній гілці діаграми  $\sigma - \varepsilon$ , а знак "-" спадаючій;  $v_{03}$  і  $\hat{v}_{03}$  - значення  $v_{b3}$  на початку діаграми  $\sigma - \varepsilon$  і у її вершині:

$$\begin{aligned}
 v_{03} &= v_{03}^0 - c \left| \frac{\hat{\sigma}_3}{R_{bD}} \right|^{1/3}; \quad c = \left( 0.75 \left| v_R - \hat{v}_{b3} \right| \right)^S; \\
 v_R &= \frac{R_{bD}}{\varepsilon_R E_b}; \quad \hat{v}_{b3} = \frac{R_{bD}}{\varepsilon_R \left| \frac{\hat{\sigma}_3}{R_{bD}} \right|^{1/3} E_b}; \\
 5 \geq s &= \frac{R_1}{R_2 - R_{bD}}; \quad \eta_3 = \frac{\hat{\sigma}_3}{\hat{\sigma}_3}; \quad e_{13} = 2 - 2.05 \hat{v}_{b3}; \quad e_{23} = 1 - e_{13};
 \end{aligned} \tag{17}$$

$v_{03}^0 = 1$  на висхідній гілці діаграми  $\sigma - \varepsilon$ ;  $v_{03}^0 = 2.05 \hat{v}_{b3}$  - на спадаючій;  $R_1$  і  $R_2$  - параметри моделі;  $\hat{\sigma}_3$  - граничне значення головного напруження  $\sigma_3$  при заданому режимі простого навантаження;  $\varepsilon_R$  - гранична відносна деформація бетону при одноосьовому стиску.

Модифікація наведених вище формул у порівнянні з [13] полягає в заміні межі міцності при осьовому стиску  $R_b$  на міцність малого елемента бетону в зоні концентрації напружень  $R_{bD}$ .

Для моделі М.І. Карпенко значення  $\varepsilon_R$ ,  $R_1$  і  $R_2$  приймаються постійними, а  $\hat{\sigma}_3$  залежить лише від виду напруженого стану. В даній роботі при описі неоднорідного напружено-деформованого стану в малих об'ємах використовуються значення зазначених параметрів, які відкореговані згідно п. 2 відповідно до рівня концентрації напружень:

$$\varepsilon_R = 0.002 R_{bD} / R_b; \quad R_1 = (60 \text{ МПа}) R_{bD} / R_b; \tag{18}$$

$$R_2 = (70 \text{ МПа}) R_{bD} / R_b; \quad \hat{\sigma}_3 = \hat{\sigma}_3(R_{bD}, R_{bID}).$$

Коефіцієнти поперечної деформації визначаються по спрощеній формулі, згідно [13]:

$$v_{\pi ij} = v_{\pi}^0 \tilde{v}_{bi}, \tag{19}$$

де  $v_{\pi}^0 = 0.175$ .

Співвідношення для області II відрізняються лише формулами, по яких обчислюються коефіцієнти  $v_{bi}$ , що відповідають позитивним головним напруженням  $\sigma_i$ :

$$v_{bi} = \hat{v}_{bi} \pm \left( v_{0i} - \hat{v}_{bi} \right) \sqrt{1 - e_{1i} \eta_i - e_{2i} \eta_i^2}, \tag{20}$$

де  $v_{0i} = 1$  для висхідної гілки діаграми  $\sigma - \varepsilon$ ,  $v_{0i} = 2.05 \hat{v}_{bi}$  - на

спадаючій:

$$\begin{aligned} \hat{v}_{bi} &= \hat{v}_{bi}^+ \hat{v}_{bi}^-; \hat{v}_{bi}^+ = 1 - (1 - v_{Rt}) \left( \frac{\hat{\sigma}_i}{R_{btD}} \right)^{1/4}; \\ \hat{v}_{bi}^- &= 1 - (1 - v_{Rt}) \left( \frac{\sigma_3}{R_{btD}} \right); v_{Rt} = 0.75; \eta_i = \frac{\sigma_i}{\hat{\sigma}_i}; \\ e_{1i} &= 2 - 2.05 \hat{v}_{bi}; e_{2i} = 1 - e_{1i}; \end{aligned} \quad (21)$$

$R_{btD}$  - міцність при осьовому розтязі малого бетонного елемента в зоні концентрації напружень.

Область III, де всі головні напруження позитивні, не розглядається в [13]. Екстраполюючи на цю область співвідношення (20), отримуємо:

$$\hat{v}_{bi} = 1 - (1 - v_{Rt}) \left( \frac{\hat{\sigma}_i}{R_{btD}} \right)^{1/4}; \tilde{v}_{bi} = v_{bi}, \quad (22)$$

Наведені вище співвідношення (15) - (22) використовуються за допомогою наступних процедур в рамках кроково-ітераційного алгоритму МСЕ в переміщеннях, які виконуються для кожного SE дискретної моделі залізобетонної конструкції:

- на поточному  $i$ -му кроці продовження по параметру обчислюється матриця податливості  $[D]$  для вершини діаграми  $\sigma - \varepsilon$  в припущенні, що вид напруженого стану мало відрізняється від попереднього кроку (на 1-му кроці матриця  $[D]$  обчислюється для пружного ізотропного матеріалу);

- матриця  $[D]$  і головні напруження  $\{\sigma\}_{i-1}$  з попереднього кроку використовуються для обчислення головних деформацій  $\{\hat{\varepsilon}\}$ , віднесених до вершини діаграми  $\sigma - \varepsilon$ , які служать для оцінки норми вектора деформацій  $\{\varepsilon\}_i$  поточного кроку; якщо  $\|\{\varepsilon\}_i\| < \|\{\hat{\varepsilon}\}\|$  тоді напружено-деформований стан поточного кроку зображується точкою на висхідній гілці; а якщо ні, то - на спадаючій;

- остаточно уточнюється матриця  $[D]$ ; знаходиться обернена до неї і використовується для обчислення головних напружень на поточному кроці продовження по параметру  $\{\sigma\}_i = [D]^{-1} \{\varepsilon\}_i$ .

На рис. 4 наведені діаграми  $\sigma - \varepsilon$ , побудовані в результаті чисельного моделювання осьового розтягу і стиску зразків стандартних розмірів. Матеріал: бетон, для якого  $E_b = 36500 \text{ МПа}$ ,  $R_b = 28 \text{ МПа}$ ,  $R_{bt} = 2 \text{ МПа}$ . Використані співвідношення (15) - (22) і викладений алгоритм.

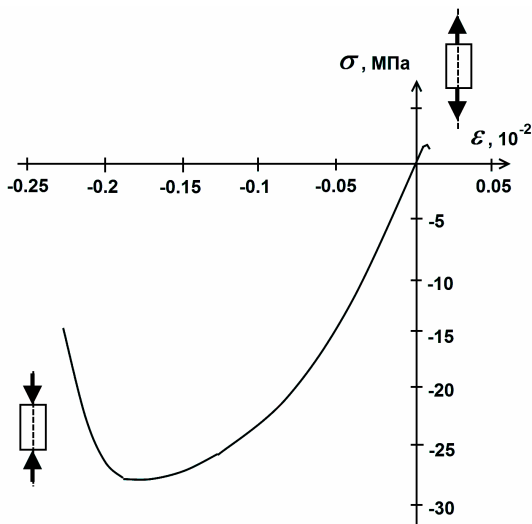


Рис. 4. Діаграми напруження-деформації при осьовому стисненні і розтязі

Тут графік характеризує спадаючі гілки та істотну (приблизно 25 кратну) відмінність деформацій бетону у вершинах відповідних діаграм. Урахування деформаційного зменшення бетону, яке проявляється у вигляді спадаючої гілки графіка  $\sigma - \varepsilon$ , приводить до необхідності аналізу рівня деформацій при оцінці міцності бетону.

За такої критерій в умовах тривимірного напруженого стану використовується відношення норм векторів головних деформацій: досягнутих  $\|\{\varepsilon\}_i\|$  і відповідних до вершини діаграми  $\sigma - \varepsilon$  для розглянутого виду напружено-деформованого стану  $\|\{\hat{\varepsilon}\}\|$ . Міцність бетону забезпечується, поки  $\|\{\varepsilon\}_i\| < \chi \|\{\hat{\varepsilon}\}\|$ , де  $\chi \geq 1$ .

Враховуючи обставини, при яких може проявитися деформаційне зменшення (п. 1), а також у зв'язку з малою вивченістю цього явища, лише при аналізі концентрації напружень у малих об'ємах в умовах стиснутого деформування бетону доцільно встановлювати  $\chi > 1$ .

Таким чином, наведені вище розрахункові співвідношення забезпечують узагальнення теорії опору бетону М.І. Карпенко для урахування неоднорідного напружено-деформованого стану і визначення орієнтації площин тріщин.

## Висновки

Наукова новизна отриманих результатів включає: розвиток відомих



феноменологічних законів стану бетону для урахування факторів масштабного ефекту і градієнта поля напружень, які впливають на деформативність і міцність матеріалу, побудову математичних моделей високого рівня, що досить повно інтерпретують закони деформування армованого матеріалу із тріщинами.

Теорія в повній мірі задовольняє рекомендаціям державних будівельних норм у відношенні урахування нелінійних властивостей залізобетону.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Александров А.П., Журков С.Н.* Явление хрупкого разрыва. – Ленинград: ГТТИ. – 1933.
2. *Алиев Ш.А.* Сопротивление бетона раскалыванию арматурой. – Тр. НИИЖБ. – 1961. – Вып. 5.
3. *Ахвердов И.Н., Лукиша Л.К.* О характере разрушения бетона при различных напряженных состояниях //Бетон и железобетон. – 1964. - № 7. – С.297-302.
4. *Бобров Р.К., Козак А.Л.* Особенности расчета железобетонных оболочек с учетом физической нелинейности и трещинообразования по методу конечных элементов //Численные методы решения задач строительной механики. – Киев: Изд-во КИСИ. – 1978. – С.140-143.
5. *Болотин В.В.* Статистические методы в строительной механике. – М.: Стройиздат, 1965. – 279 с.
6. *Гениев Г.А., Киссюк В.Н., Тюпин Г.А.* Теория пластичности бетона и железобетона. – М.: Стройиздат, 1974. – 316 с.
7. *Гончаров И.Г.* Прочность каменных материалов в условиях различных напряженных состояний. – Ленинград: Госстройиздат, 1960. – С.97.
8. Железобетонные конструкции /Под ред. Панарина Н.Я. – М.: Высш. Школа, 1971. – 554 с.
9. *Карпенко Н.И.* К построению модели сцепления арматуры с бетоном, учитывающей контактные трещины //Бетон и железобетон. – 1973. - № 1. – С.19-23.
10. *Карпенко Н.И.* Теория деформирования железобетона с трещинами. – М.: Стройиздат, 1976. – 208 с.
11. *Карпенко Н.И.* Об одной характерной функции прочности бетона при трехосном сжатии //Там же. – 1982. - № 2. – С.33-36.
12. *Карпенко Н.И.* К построению условия прочности бетонов при неосиных напряженных состояниях //Бетон и железобетон. – 1985. - № 10. – С.35-37.
13. *Карпенко Н.И.* К построению общей ортотропной модели деформирования бетона //Строит. мех. и расчет сооруж. – 1987. - № 2. – С.31-36.
14. *Лукиша Л.К.* О пластическом течении бетона под нагрузкой. Изв. АН БССР. Сер. физ.-тех. наук. - 1962. - № 1. - С.132-137.
15. Новое о прочности железобетона/ Под ред.. К.В.Михайлова. - Там же, 1977. - 272 с.
16. *Новожиллов В.В.* К основам теории равновесных трещин в хрупких телах// Прикл. мат. и мех. - 1969. - Т. 33. - № 5. - С.797-812.
17. *Писаренко Г.С., Лебедев А.А.* Деформирование и прочность материалов при слоном напряженном состоянии. - Киев: Наук. Думка, 1967. - 415 с.
18. Прочность, структурные изменения и деформация бетона/ Под ред. А.А.Гвоздева. - М.: Стройиздат, 1978. - 297 с.
19. *Тимошенко С.П., Гере Дж.* Механика материалов. - М.:Мир, 1976. - 669 с.

20. *Филоненко-Бородич М.М.* Механические теории прочности.- М.: Изд-во МГУ, 1961.- 91 с.
21. *Холмянский М.М.* Закладные детали сборных железобетонных элементов.- М.: Госстройиздат, 1968.- 207 с.
22. *Холмянский М.М.* Контакт арматуры с бетоном.- М.: Стройиздат, 1981.- 184 с.
23. *Холмянский М.М., Белавин Ф.С., Ерин Н.Н.* Податливость заделки в бетоне и поперечное давление сосредоточенных анкеров// Тр. НИИЖБ.- 1967.- Вып. 13.
24. *Цискрели Г.Д.* Сопротивление растяжению неармированных и армированных бетонов.- М.: Госстройиздат, 1954.- 81 с.
25. *Argyris J.H., Faust G., Szimmat J. et. Al.* Recent development in the finite element analysis of prestressed concrete reactor vessels// Nucl. Eng. And Des.- 1974.- 28.- N 1.- P.42-75.
26. *Bazant Z.P.* Instability, ductility, and size effect in strain softening concrete// J. Eng. Mech. Div. ASCE/- 1976.- 102. N EM2. P.331-344.
27. *Bazant Z.P., Lin Feng-Bao.* Nonlocal yield limit degradation// Int. J.Numb. Methods Eng.- 1988.- 26.- N 8.- P.1805-1823.
28. *Glucklich J.J.* Fracture of plain concrete// J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng.- 1963.- 89.- N 6.- P.127-138.
29. *Rehm G.* Uber die Grundlagen des Verbundes Zwischen Stahl und Beton//Deutscher Ausschuss für Stahlbeton.- 1961.- H. 138.
30. *Weibull W.* A statistical theory of the strength of materials// Proc. Roy. Swed. Inst. Eng. Res.- 1939.- N 151.
31. *Wright W., Byrne I.G.* Stress concentration in concrete// Nature.- 1964.- N 203.

*Стаття надійшла до редакції 13.12.2012 р.*

*Гуляр А.И., Лизунов П.П., Солодей И.И.*

#### **МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ПОЯВИ ТА РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ЗОН РУЙНУВАННЯ КРУГОВИХ НЕОДНОРІДНИХ ДИСПЕРСНО-АРМОВАНИХ ТІЛ**

Представленные исследования направлены на создание новых физических и математических моделей и алгоритмов эффективного численного моделирования нелинейной работы широкого класса пространственных железобетонных конструкций с учетом пластических деформаций, трещинообразования и совместной работы с армированием и облицовкой.

*Gulyar O.I., Lizunov P.P., Solodei I.I.*

#### **THE NUMERICAL MODELS OF INITIATION AND DEVELOPMENT OF FRACTURE ZONES FOR REINFORCED HETEROGENEOUS SOLIDS OF REVOLUTION**

New physical and mathematical models and algorithms of effective numerical modeling of 3D non-linear behaviour of reinforced massive solids of revolution considering plastic deformation, fracture zones and combined action with concrete reinforcement and thin-walled facings are considered.