

УДК 539.3

Ю.В. Ворона, канд. техн. наук

А.А. Козак

О.С. Черненко

## ДВОВИМІРНИЙ НДС ПРУЖНОГО МАСИВУ З ДВОМА ОТВОРАМИ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

На основі співвідношень методу потенціалу побудовано чисельний алгоритм для розв'язання у двовимірній постановці задачі про нестационарні коливання пружних масивів, послаблених отворами. Розв'язана модельна задача про коливання простору з двома циліндричними отворами.

В стані плоскої деформації за відсутності об'ємних сил динамічний деформований стан тіла описується рівнянням

$$(C_1^2 - C_2^2)u_{j,jk} + C_2^2 u_{k,jj} - \ddot{u}_k = -\Phi_k, \quad j, k=1, 2. \quad (1)$$

Фундаментальний розв'язок задачі  $U_{kj}(\bar{x}, \bar{y}, t)$ , тобто  $j$ -а компонента переміщення в точці  $\bar{y}$  в момент часу  $t$ , яке відповідає дії в точці  $\bar{x}\{x_1, x_2\}$  безмежної двовимірної області зосередженого миттєвого одиничного імпульсу, що мав місце в момент часу  $t_0=0$  і діяв в  $k$ -му напрямі. Таке поле динамічних переміщень задовольняє рівнянню

$$(C_1^2 - C_2^2)u_{j,jk} + C_2^2 u_{k,jj} - \ddot{u}_k = \delta(t)\delta(\bar{x}-\bar{y}). \quad (2)$$

$$r(\bar{x}, \bar{y}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}.$$

Розв'язок рівняння (2) може трактуватись як реакція на дію в тривимірному пружному просторі миттєвого імпульсного навантаження, рівномірно з одиничною інтенсивністю розподіленого вздовж прямої, яка проходить через т.  $\bar{x}\{x_1, x_2\}$  паралельно осі  $x_3$  [1]:

$$U_{kj}(r, t) = \frac{1}{2\pi\rho} \left[ \frac{H(C_1 t - r)}{C_1 r^2} f_{kj}^{(1)}(\bar{x}, \bar{y}, t) + \frac{H(C_2 t - r)}{C_2 r^2} f_{kj}^{(2)}(\bar{x}, \bar{y}, t) \right], \quad (3)$$

де

$$f_{kj}^{(1)}(r, t) = \left( 2d_1 + \frac{r^2}{d_1} \right) r_{,k} r_{,j} - \delta_{kj} d_1,$$

$$f_{kj}^{(2)}(r, t) = \left( 2d_2 + \frac{r^2}{d_2} \right) r_{,k} r_{,j} - \delta_{kj} \left( d_2 + \frac{r^2}{d_2} \right),$$

$$d_1 = \sqrt{(C_1 t)^2 - r^2}, \quad d_2 = \sqrt{(C_2 t)^2 - r^2}.$$

Гранично-часове інтегральне рівняння за нульових початкових умов і відсутності масових сил має наступний вигляд

$$\frac{1}{2} u_k(\vec{x}_0, t) = \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} U_{kj}(\vec{x}_0, \vec{y}, t - \tau) q_j(\vec{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau - \int_0^{t^+} \int_{\Gamma} T_{kj}(\vec{x}_0, \vec{y}, t - \tau) u_j(\vec{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau, \quad (4)$$

де  $T_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, t)$  - узагальнена похідна фундаментального розв'язку, тобто напруження на площинках з компонентами нормалі  $n_k$ , які виникають в пружному двовимірному просторі від дії миттєвого імпульсу, одиничної інтенсивності:

$$\begin{aligned} T_{kj}(r, t) = & \frac{1}{2\pi\rho} \left\{ \frac{H(C_1 t - r)}{C_1} \left[ -g_{kj}^{(1)}(r) \left( 2d_1 + \frac{r^2}{d_1} \right) - g_{kj}^{(2)}(r) \frac{r^3}{d_1^3} \right] + \right. \\ & + \frac{H(C_2 t - r)}{C_2} \left[ g_{kj}^{(1)}(r) \left( 2d_2 + \frac{r^2}{d_2} \right) + g_{kj}^{(2)}(r) \frac{r^3}{d_2^3} + g_{kj}^{(3)}(r) \frac{r}{d_2^3} \right] + \\ & \left. + \frac{\delta(C_1 t - r)}{C_1} g_{kj}^{(2)}(r) \left( 2d_1 + \frac{r^2}{d_1} \right) - \frac{\delta(C_2 t - r)}{C_2} g_{kj}^{(2)}(r) \left( 2d_2 + \frac{r^2}{d_2} \right) + g_{kj}^{(3)}(r) \frac{r}{d_2} \right\}, \quad (5) \\ g_{kj}^{(1)}(r) = & \frac{-2}{r^3} \left( \delta_{kj} \frac{\partial r}{\partial n} - 4 \frac{\partial r}{\partial n} r_{,k} r_{,j} + n_k r_{,j} + n_j r_{,k} \right), \\ g_{kj}^{(2)}(r) = & \frac{-2\mu}{r^2} \left( \frac{\partial r}{\partial n} r_{,k} r_{,j} + \frac{1}{1-2\nu} n_j r_{,k} \right), \\ g_{kj}^{(3)}(r) = & \mu \left( \delta_{kj} \frac{\partial r}{\partial n} + n_k r_{,j} + \frac{2}{1-2\nu} n_j r_{,k} \right). \end{aligned}$$

Неважко побачити, що вираз узагальненої похідної  $T_{kj}(r, t)$  містить в своєму складі величину

$$\frac{1}{[C_k^2(t-\tau)^2 - r^2]^{1/2}} \delta[C_k(t-r) - r], \quad (6)$$

яка є сингулярною, коли  $C_k^2(t-\tau)^2 = r^2$ , і з цієї причини потребує деяких додаткових перетворень для свого чисельного визначення. Зазначимо, що з'являється ця компонента в результаті диференціювання за просторовою координатою фундаментального розв'язку (3). Як і у задачі антиплоскої деформації, розглянутої в [2], диференціювання за просторовою координатою можна замінити диференціюванням за часом з подальшим

зменшенням сингулярності за допомогою інтегрування частинами. Похідну фундаментального розв'язку (3) за просторовою координатою запишемо наступним чином

$$\frac{\partial}{\partial x_j} U_{lk} = \frac{1}{2\pi\rho} \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ H[C_\alpha(t-\tau)-r] \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{f_{lk}^{(\alpha)}}{C_\alpha r^2} \right) + \frac{f_{lk}^{(\alpha)}}{C_\alpha r^2} \frac{\partial}{\partial x_j} H[c_\alpha(t-\tau)-r] \right\}. \quad (7)$$

Беручи до уваги, що

$$\frac{\partial}{\partial x_j} H[c_\alpha(t-\tau)-r] = \frac{r_{,j}}{c_\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} H[c_\alpha(t-\tau)-r] \quad (8)$$

та

$$\frac{\partial}{\partial \tau} U_{lk} = \frac{1}{2\pi\rho} \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ H[C_\alpha(t-\tau)-r] \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{f_{lk}^{(\alpha)}}{C_\alpha r^2} \right) + \frac{f_{lk}^{(\alpha)}}{C_\alpha r^2} \frac{\partial}{\partial x_j} H[c_\alpha(t-\tau)-r] \right\}, \quad (9)$$

похідній (7) надамо вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} U_{lk} = \frac{1}{2\pi\rho} \sum_{\alpha=1}^2 \left\{ H[C_\alpha(t-\tau)-r] \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{f_{lk}^{(\alpha)}}{C_\alpha r^2} \right) - \frac{r_{,j}}{C_\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \frac{f_{lk}^{(\alpha)}}{C_\alpha r^2} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{r_{,j}}{C_\alpha} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \frac{H(C_\alpha t - r)}{C_\alpha r^2} f_{kj}^{(\alpha)}(\bar{x}, \bar{y}, t) \right] \right\}. \quad (10) \end{aligned}$$

Якщо підставити (10) у вираз

$$T_{lk} = \left[ \rho(C_1^2 - 2C_2^2) U_{lk,j} \delta_{km} + \rho C_2^2 (U_{lk,m} + U_{lm,k}) \right] n_m, \quad (11)$$

який пов'язує між собою розв'язки  $T_{kj}(r, t)$  та  $U_{kj}(r, t)$ , то інтегруючи частинами за часом при нульових початкових умовах другий інтеграл у правій частині рівняння (4), будемо мати:

$$\begin{aligned} \int_0^{t^+} T_{lk}(x, y, t-\tau) u_k(y, \tau) d\tau = \\ = \int_0^{t^+} Z_{lk}(x, y, t-\tau) u_k(y, \tau) - W_{lk}(x, y, t-\tau) \dot{u}_k(y, \tau) d\tau. \quad (12) \end{aligned}$$

Тепер гранично-часове інтегральне рівняння (4) набуває такого вигляду

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} u(\bar{x}_0, t) = \int_0^{t^+} \int_\Gamma U_{kj}(\bar{x}_0, \bar{y}, t-\tau) q_j(\bar{y}, \tau) d\Gamma_y d\tau - \\ - \int_0^{t^+} \int_\Gamma \left[ Z_{kj}(\bar{x}_0, \bar{y}, t-\tau) u_j(\bar{y}, \tau) - W_{kj}(\bar{x}_0, \bar{y}, t-\tau) \dot{u}_j(\bar{y}, \tau) \right] d\Gamma_y d\tau, \quad (13) \end{aligned}$$

де

$$W_{lk} = \frac{C_2^2}{2\pi C_1^2} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} 2r_{,l} r_{,k} + \frac{\lambda}{\mu} r_{,l} n_{,k} \right] \frac{1}{R_1} + \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\partial r}{\partial n} (\delta_{lk} - 2r_{,l} r_{,k}) + r_{,k} n_{,l} \right] \frac{1}{R_2} \quad (14)$$

і

$$\begin{aligned} Z_{lk} = Z_{lk}^{(1)} + Z_{lk}^{(2)} = & \frac{C_2^2}{2\pi C_1} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[ \delta_{lk} \left( \frac{2}{rR_1} + \frac{4R_1}{r^3} \right) - 2r_{,l} r_{,k} \left( \frac{C_1(t-\tau) - r}{R_1^3} + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. + \frac{4}{rR_1} + \frac{8R_1}{r^3} \right) \right] + n_{,l} r_{,k} \left( \frac{2}{rR_1} + \frac{4R_1}{r^3} \right) + n_{,k} r_{,l} \left( -\frac{\lambda}{\mu} \frac{C_1(t-\tau) - r}{R_1^3} + \frac{2}{rR_1} + \frac{4R_1}{r^3} \right) \right\} + \\ & + \frac{C_1}{2\pi} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} \left[ -\delta_{lk} \left( \frac{2}{rR_2} + \frac{4R_2}{r^3} + \frac{C_2(t-\tau) - r}{R_2^3} \right) + 2r_{,l} r_{,k} \left( \frac{C_2(t-\tau) - r}{R_2^3} + \frac{4}{rR_2} + \frac{8R_2}{r^3} \right) \right] - \right. \\ & \left. - n_{,l} r_{,k} \left( \frac{2}{rR_2} + \frac{4R_2}{r^3} + \frac{C_2(t-\tau) - r}{R_2^3} \right) - n_{,k} r_{,l} \left( \frac{2}{rR_2} + \frac{4R_2}{r^3} \right) \right\}. \quad (15) \end{aligned}$$

Для алгебраїзації гранично-часового інтегрального рівняння (4) за звичайною процедурою МГЕ необхідно розділити область інтегрування на окремі елементи і зробити припущення про характер зміни невідомих величин (переміщень і напружень) в межах кожного з елементів. Особливість розглядуваної задачі полягає в тому, що до складу змінних додається час. Якщо прийняти, що граничні напруження в межах кожного проміжку часу залишаються постійними, то інтегрування за часом в першому з доданків у правій частині рівняння (4) може бути виконане аналітично:

$$\begin{aligned} & \int_{\tau_{m-1}}^{\tau_m} U_{kj}(\bar{x}_0, \bar{y}, t_n - \tau) q_j(\bar{y}, \tau) d\tau = \\ & = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{1}{4\pi\rho C_\alpha^2} \left[ \delta_{lk} H_\alpha + (-1)^\alpha (\delta_{lk} - 2r_{,l} r_{,k}) G_\alpha \right], \quad (16) \end{aligned}$$

де

$$H_\alpha = \ln \frac{\left[ \eta_\alpha + (\eta_\alpha^2 - 1)^{1/2} \right]}{\left[ \theta_\alpha + (\theta_\alpha^2 - 1)^{1/2} \right]}, \quad G_\alpha = \eta_\alpha (\eta_\alpha^2 - 1)^{1/2} - \theta_\alpha (\theta_\alpha^2 - 1)^{1/2}, \quad (17)$$

$$\eta_\alpha = \begin{cases} C_\alpha (t_n - \tau_{m-1}) / r, & \text{при } r < C_\alpha (t_n - \tau_{m-1}) \\ 1, & \text{при } r \geq C_\alpha (t_n - \tau_{m-1}) \end{cases} \quad (18)$$

$$\theta_\alpha = \begin{cases} C_\alpha (t_n - \tau_m) / r, & \text{при } r < C_\alpha (t_n - \tau_m) \\ 1, & \text{при } r \geq C_\alpha (t_n - \tau_m) \end{cases}. \quad (19)$$

Аналогічні вирази можуть бути отримані і для обчислення другого інтегралу у правій частині рівняння (4) [1].

Наведені співвідношення складають основу методики чисельного дослідження нестационарних двовимірних коливань пружних масивів, яку було застосовано для аналізу динамічної поведінки двовимірного масиву, послабленого двома однаковими круговими отворами радіусу  $R$ . Границя одного з отворів рівномірно навантажена радіальним тиском (рис. 1), зміна якого в часі описується трапецеїдальним імпульсом [2].

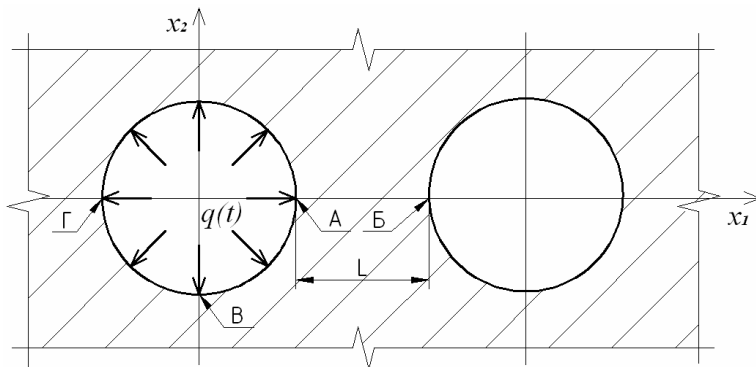


Рис. 1. Розрахункова область

Розрахунки були проведені при трьох варіантах відстані  $L$  між границями отворів -  $L=2R$ ,  $L=2R/3$  і  $L=R/3$ . Найменший взаємний вплив на деформацію сусіднього отвору має місце в першому випадку, коли відстань між отворами дорівнювала двом радіусам (рис. 2). На вказаному рисунку цифрою 1 позначено графік залежності від часу нормованого переміщення в т.  $A$  (точка на контурі навантаженого отвору, найближча до ненавантаженого). Цифрою 2 позначено графік залежності

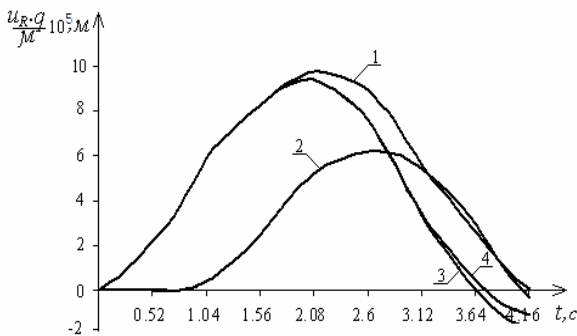


Рис. 2. Переміщення точок системи при  $L=2R$

переміщення в т.  $B$  (точка на ненавантаженому отворі). Графік із позначкою 3 відповідає залежності від часу переміщення в т.  $B$ , яка є точкою перетину контуру навантаженого отвору та осі  $x_2$  (рис. 1). І нарешті, цифрою 4 позначено графік залежності переміщення в т.  $\Gamma$  (точка на контурі навантаженого отвору, найвіддаленіша від ненавантаженого). Максимального значення, величиною  $9.89 \cdot 10^{-5}$  м, переміщення в т.  $A$  отримує в момент часу 2.094 с., при цьому впродовж перших 0.7 с. т.  $B$  є взагалі нерухомою.

Аналогічні результати для значень  $L=2R/3$  і  $L=R/3$  показані відповідно на рисунках 3 і 4. Максимальні значення нормованого переміщення в т.  $A$  також мали місце в момент близько 2 с. і дорівнювали відповідно  $1.79 \cdot 10^{-4}$  м і  $2.99 \cdot 10^{-4}$  м.

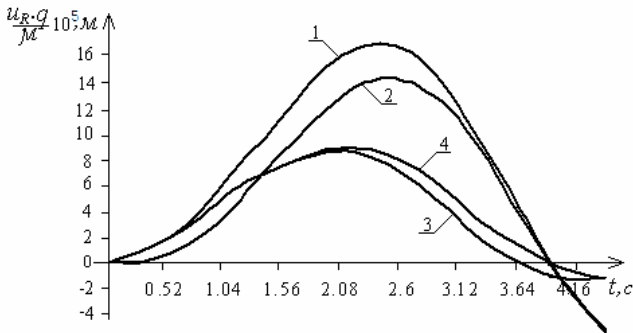


Рис. 3. Переміщення точок системи при  $L=2R/3$

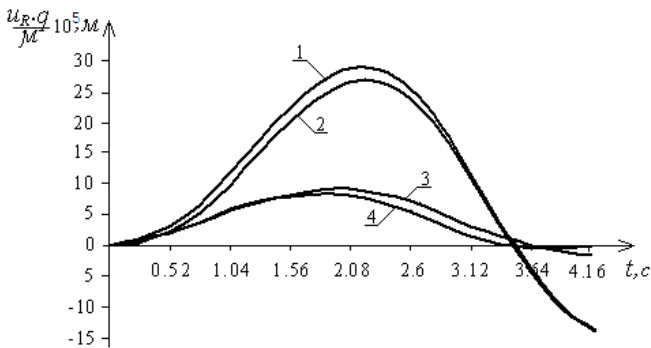


Рис. 4. Переміщення точок системи при  $L=R/3$

Наведені дані наочно свідчать про роботоспроможність розробленого методологічного апарату.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Dominguez J.* Boundary Elements in Dynamics. – Southampton, Boston: Computational Mechanics Publications, 1993.
2. *Ворона Ю.В., Козак А.А., Черненко Е.С.* Методика чисельного дослідження антиплоских нестационарних коливань масивних елементів конструкцій // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2011. – Вип. 88. – С.83–96

*Стаття надійшла до редакції 14.10.2012 р.*

*Ворона Ю.В., Козак А.А., Черненко Е.С.*

**ДВУМЕРНОЕ НДС УПРУГОГО МАССИВА С ДВУМЯ ОТВЕРСТИЯМИ ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ**

На основе соотношений метода потенциала построен численный алгоритм для решения в двумерной постановке задачи про нестационарные колебания упругих массивов, ослабленных отверстиями. Решена модельная задача про колебания пространства с двумя цилиндрическими отверстиями.

*Vorona Yu.V., Kozak A.A., Chernenko O.S.*

**DEFORMING OF 2D ELASTIC SOLID WITH TWO HOLES UNDER IMPULSE LOADINGS**

The boundary element technique for analysis 2D transient vibration of elastic solids with holes is developed. Oscillations of the solid with two round holes subjected to impulse loadings were investigated.