

УДК 539.3

І.І. Солодей, канд. техн. наук

## БАЗОВІ СКІНЧЕННО-ЕЛЕМЕНТНІ МОДЕЛІ НМСЕ ДЛЯ ПРОСТОРОВИХ ТІЛ В ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ

Розроблено базові неоднорідний круговий та призматичний скінченні елементи (СЕ) з чотирикутним поперечним перерізом загального вигляду, на основі яких побудовані розрахункові співвідношення напіваналітичного метода скінченних елементів (НМСЕ) для кругових та призматичних тіл неканонічної форми, що знаходяться під дією довільного стаціонарного або нестаціонарного навантаження.

### Вступ

Сучасне поширення чисельних методів насамперед пов'язане з розвитком метода скінченних елементів (МСЕ), який широко увійшов у практику наукових та інженерних установ. Однак застосування традиційного МСЕ при дослідженні поведінки просторових об'єктів викликає значні математичні та обчислювальні труднощі, які пов'язані не тільки з необхідністю розв'язання систем рівнянь великих порядків, але і з необхідністю урахування різноманітних механічних факторів, що супроводжують деформування конструкцій в процесі їх експлуатації. Тому, за останній час, отримали розповсюдження альтернативні методики, які орієнтуючись на особливості форми конструкцій значно підвищують продуктивність МСЕ, охоплюючи при цьому досить широкі класи просторових об'єктів. Одним із таких підходів є напіваналітичний метод скінченних елементів (НМСЕ), який дозволяє звести рішення просторової пружної задачі до ряду двовимірних, а у випадку нелінійної – побудувати вельми ефективну процедуру її розв'язання. Досягнення напіваналітичного метода скінченних елементів в статичних та квазістатичних задачах теорії пружності і пластичності [3], задачах повзучості, континуального та дискретного руйнування [1], пошуку рішень задач динаміки на основі використання алгоритмів прямого інтегрування рівнянь руху та розкладу за власними формами [2] створюють міцний базис його подальшого розвитку.

Об'єктами дослідження напіваналітичного метода скінченних елементів традиційно вважаються просторові тіла, які утворені рухом складної геометричної фігури (поперечного перерізу тіла) вздовж утворюючої довільної форми. Зважаючи на те, що реальні елементи конструкцій, у своїй масі, здебільшого є неоднорідними круговими та призматичними тілами, в рамках НМСЕ розроблено спеціальні скінченні

елементи (СЕ), що дозволяють ефективно апроксимувати окремі типи просторових об'єктів. Сучасні методики, які орієнтовані на розрахунок широкого класу конструкцій, що складаються з масивних і тонкостінних елементів, повинні поряд з високою точністю опису напружено-деформованого стану об'єктів складної форми та структури, забезпечувати високу швидкість збіжності до точного рішення при мінімальних чисельних витратах. Завдяки введенню додаткових гіпотез, що не зменшують точність апроксимації, представлення деформацій і напружень в фізичних термінах та у відповідності до моментної схеми скінченного елемента (МССЕ) [5,9] вдається з однієї сторони уникнути трудомісткості процедури чисельного інтегрування по площі поперечного перетину скінченного елемента, з іншої – зберегти високу ефективність просторової дискретизації.

### **1. Круговий та призматичний скінченні елементи із змінними геометричними і фізико-механічними параметрами загального вигляду.**

Для дискретизації неоднорідних просторових тіл при динамічному навантаженні застосовуються круговий та призматичний скінченні елементи з поперечним перерізом у вигляді чотирикутника довільного обрису (рис. 1). На характер розподілу фізичних, механічних та геометричних параметрів, як по довжині, так і по площі поперечного перерізу СЕ ніяких обмежень не накладається і вони обчислюються в деякій кількості точок інтегрування, що належать площині  $x^3 = const$ . В місцевій системі координат їх переріз є квадратом з одиничними сторонами. Початок місцевої системи координат  $x^i$  знаходиться у геометричному центрі елемента, вісі  $x^1$  і  $x^2$  направлені паралельно сторонам поперечного перерізу, а  $x^3$  - вздовж утворюючої.

За невідомі при розв'язанні задачі приймаються компоненти переміщень, швидкостей та прискорень вузлів СЕ:

$$(u:\dot{u}:\ddot{u})_k = \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ \frac{1}{4} + \frac{1}{2} S_1 x^1 + \frac{1}{2} S_2 x^2 + S_1 S_2 x^1 x^2 \right] (u:\dot{u}:\ddot{u})_{k'(S_1, S_2)}. \quad (1)$$

Як показано в роботах [3, 6-8], застосування моментної схеми скінченних елементів [9] дозволяє істотно підвищити ефективність чисельного дослідження комбінованих просторових конструкцій на основі МСЕ.

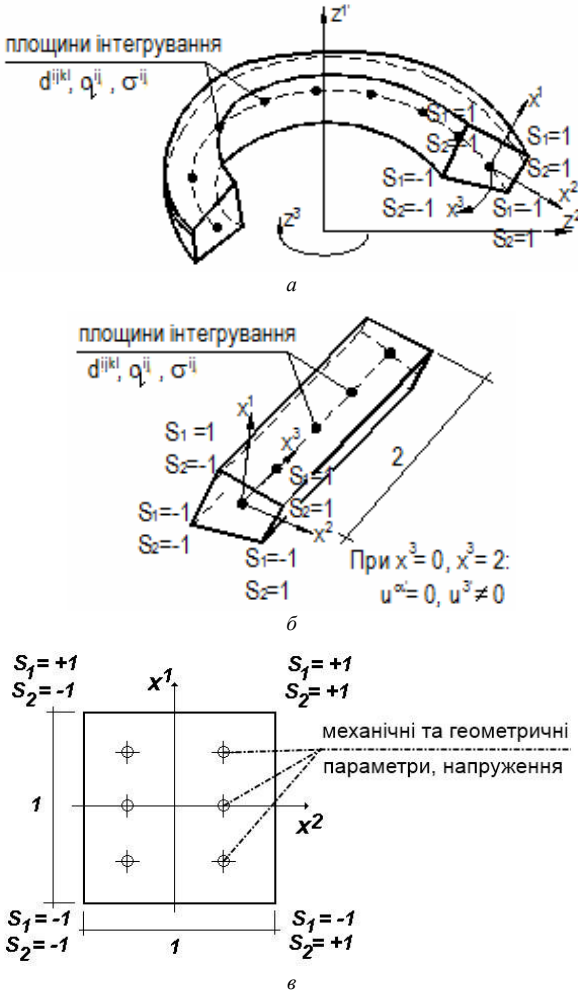


Рис. 1. Скінченні елементи на основі рядів Фур'є:  
 а) замкнутий круговий; б) шарнірно опертий призматичний;  
 в) точки інтегрування у площині

Оскільки відмінною особливістю напіваналітичного метода скінченних елементів є значно більш високі порядки апроксимації переміщень вздовж напрямку  $x^3$ , ніж по  $x^1$  і  $x^2$ , раціональним є використання МСЕ тільки в площині поперечного перерізу скінченного елемента, кожна точка якого визначається координатами  $x^1$  і  $x^2$ :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\alpha(\alpha)} &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \quad \varepsilon_{12} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}, \\ \varepsilon_{\alpha 3} &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} x^{(3-\alpha)}, \quad \varepsilon_{33} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} x^\alpha, \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} &= \varepsilon_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \alpha \neq i, j.\end{aligned}\quad (2)$$

Розподіл невідомих в напрямку  $x^3$  проводиться  $2\pi$  - періодичними функціями і їх вузлові значення представляються відрізками тригонометричних рядів Фур'є:

$$(u \dot{u} \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)} = \sum_{l=0}^L (u \dot{u} \ddot{u})_{k'(S_1, S_2)}^l \Psi_{l'(k')}, \quad (3)$$

де для кільцевого СЕ:  $\Psi_{1'}^l = \Psi_{2'}^l = \cos lx^3$ ,  $\Psi_{3'}^l = \sin lx^3$ ,  $l_0 = 0$ ,  $0 \leq x^3 \leq 2\pi$ ; призматичного:  $\Psi_{1'}^l = \Psi_{2'}^l = \sin \frac{\pi l}{2} x^3$ ,  $\Psi_{3'}^l = \cos \frac{\pi l}{2} x^3$ ,  $l_0 = 1$ ,  $0 \leq x^3 \leq 2$ .

Визначивши вузлові переміщення  $u_{k'(S_1, S_2)}$  в (1) через амплітудні значення (3) можна показати, що компоненти коефіцієнтів розкладу деформацій (2) у відповідності до [11] та при заданому законі апроксимації переміщень (1) мають наступний вигляд:

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} = \sum_{l=0}^L \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^l \Psi_{1'}^l + \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^l \Psi_{3'}^l, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha} = \sum_{l=0}^L \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha}^l \Psi_{1'}^l + \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha}^l \Psi_{3'}^l, \quad (\alpha \neq i, j), \quad (4)$$

де для кругового СЕ:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ (z_{,\alpha}^{\gamma'} S_\beta + z_{,\beta}^{\gamma'} S_\alpha) u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l + z_{,\alpha}^{3'} z_{,\beta}^{3'} Z^{2'} u_{2'(S_1, S_2)}^l \right], \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left( \frac{l}{2} z_{,\alpha}^{3'} u_{3'(S_1, S_2)}^l + z_{,\alpha}^{\gamma'} S_\alpha u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l + z_{,\alpha}^{3'} z_{,\alpha}^{3'} Z^{2'} u_{2'(S_1, S_2)}^l \right), \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ l z_{,3}^{3'} u_{3'(S_1, S_2)}^l + (z_{,3}^{3'})^2 Z^{2'} u_{2'(S_1, S_2)}^l \right], \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)}^l &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ (2z_{,\alpha}^{\gamma'} S_1 S_2 + z_{,12}^{\gamma'} S_\alpha) u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l + \right. \\ &\quad \left. + \left( S_{(3-\alpha)} (z_{,\alpha}^{3'})^2 Z^{2'} + z_{,\alpha}^{3'} z_{,12}^{3'} Z^{2'} + \frac{1}{2} (z_{,\alpha}^{3'})^2 z_{(3-\alpha)}^{2'} \right) u_{2'(S_1, S_2)}^l \right], \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ l (2z_{,3}^{3'} S_\alpha + z_{,3\alpha}^{3'}) u_{3'(S_1, S_2)}^l + \right.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( 2S_{\alpha} \left( z_{3,3}^{3'} \right)^2 Z^{2'} + 2z_{3,3\alpha}^{3'} z_{3,3}^{3'} Z^{2'} + \left( z_{3,3}^{3'} \right)^2 z_{,\alpha}^{2'} \right) u_{2'(S_1, S_2)}^l \Big], \\
\mathring{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left\{ l \left( z_{,\alpha}^{3'} S_{(3-\alpha)} + \frac{1}{2} z_{,12}^{3'} \right) u_{3'(S_1, S_2)}^l + \right. \\
& + \left( 2z_{3,3}^{\gamma'} S_1 S_2 + z_{3,3(3-\alpha)}^{\gamma'} S_{\alpha} \right) u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l + \\
& + \left[ S_{(3-\alpha)} z_{3,3}^{3'} z_{,\alpha}^{3'} Z^{2'} + \frac{Z^{2'}}{2} \left( z_{3,3(3-\alpha)}^{3'} + z_{3,3}^{3'} z_{,12}^{3'} \right) + \frac{1}{2} z_{3,3}^{3'} z_{,\alpha}^{3'} z_{,(3-\alpha)}^{2'} \right] u_{2'(S_1, S_2)}^l \Big\}, \\
\mathring{\varepsilon}_{\alpha \beta}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ z_{,\alpha}^{3'} S_{\beta} + z_{,\beta}^{3'} S_{\alpha} - \frac{1}{Z^{2'}} \left( z_{,\alpha}^{2'} z_{,\beta}^{3'} + z_{,\alpha}^{3'} z_{,\beta}^{2'} \right) \right] u_{3'(S_1, S_2)}^l, \\
\mathring{\varepsilon}_{\alpha 3}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left\{ -\frac{l}{2} z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l + \left[ z_{3,3}^{3'} S_{\alpha} - \frac{1}{Z^{2'}} \left( z_{3,3}^{2'} z_{,\alpha}^{3'} + z_{3,3}^{3'} z_{,\alpha}^{2'} \right) \right] u_{3'(S_1, S_2)}^l \right\}, \\
\mathring{\varepsilon}_{33}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ -l z_{3,3}^{\gamma'} u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l - \frac{2}{Z^{2'}} z_{3,3}^{2'} z_{3,3}^{3'} u_{3'(S_1, S_2)}^l \right], \\
\mathring{\varepsilon}_{\alpha \alpha, (3-\alpha)}^l &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ 2z_{,\alpha}^{3'} S_1 S_2 + z_{,12}^{3'} S_{\alpha} - \right. \\
& - \left. \frac{1}{Z^{2'}} \left( 2S_{(3-\alpha)} z_{,\alpha}^{2'} z_{,\alpha}^{3'} + z_{,\alpha}^{2'} z_{,12}^{3'} + z_{,12}^{2'} z_{,\alpha}^{3'} - \frac{1}{Z^{2'}} z_{,\alpha}^{2'} z_{,\alpha}^{3'} z_{,(3-\alpha)}^{2'} \right) \right] u_{3'(S_1, S_2)}^l, \\
\mathring{\varepsilon}_{33, \alpha}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ -l \left( 2z_{3,3}^{\gamma'} S_{\alpha} + z_{3,3\alpha}^{\gamma'} \right) u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l - \right. \\
& - \left. \frac{2}{Z^{2'}} \left( 2S_{\alpha} z_{3,3}^{2'} z_{3,3}^{3'} + z_{3,3\alpha}^{2'} z_{3,3}^{3'} + z_{3,3\alpha}^{3'} z_{,2}^{2'} - z_{3,3}^{2'} z_{3,3}^{3'} z_{,2}^{2'} \frac{1}{Z^{2'}} \right) u_{3'(S_1, S_2)}^l \right], \\
\mathring{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left\{ -l \left( z_{,\alpha}^{\gamma'} S_{(3-\alpha)} + \frac{1}{2} z_{,12}^{\gamma'} \right) u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l + \left[ 2z_{3,3}^{3'} S_1 S_2 + z_{3,3(3-\alpha)}^{3'} S_{\alpha} - \right. \right. \\
& - \left. \frac{1}{Z^{2'}} \left[ \left( z_{3,3}^{2'} z_{,\alpha}^{3'} + z_{3,3}^{3'} z_{,\alpha}^{2'} \right) \left( S_{(3-\alpha)} - \frac{z_{,(3-\alpha)}^{2'}}{2Z^{2'}} \right) + \right. \\
& \left. \left. + \frac{1}{2} \left( z_{3,3(3-\alpha)}^{2'} z_{,\alpha}^{3'} + z_{3,3}^{2'} z_{,12}^{3'} + z_{3,3(3-\alpha)}^{3'} z_{,\alpha}^{2'} + z_{3,3}^{3'} z_{,12}^{2'} \right) \right] \right] u_{3'(S_1, S_2)}^l \Big\}.
\end{aligned}$$

Для призматичного СЕ:

(5)

$$\begin{aligned}
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left( z_{,\alpha}^{\gamma'} S_\beta + z_{,\beta}^{\gamma'} S_\alpha \right) u_{\gamma'}^l(S_1, S_2), \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left( -\frac{\pi l}{4} z_{,\alpha}^{3'} u_{3'}^l(S_1, S_2) + z_{,3}^{\gamma'} S_\alpha u_{\gamma'}^l(S_1, S_2) \right), \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} -\frac{\pi l}{2} z_{,3}^{3'} u_{3'}^l(S_1, S_2), \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)}^l &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left( 2z_{,\alpha}^{\gamma'} S_1 S_2 + z_{,12}^{\gamma'} S_\alpha \right) u_{\gamma'}^l(S_1, S_2), \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} -\frac{\pi l}{2} \left( 2z_{,3}^{3'} S_\alpha + z_{,3\alpha}^{3'} \right) u_{3'}^l(S_1, S_2), \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ -\frac{\pi l}{2} \left( z_{,\alpha}^{3'} S_{(3-\alpha)} + \frac{1}{2} z_{,12}^{3'} \right) u_{3'}^l(S_1, S_2) + \right. \\
&\quad \left. + \left( 2z_{,3}^{\gamma'} S_1 S_2 + z_{,3(3-\alpha)}^{\gamma'} S_\alpha \right) u_{\gamma'}^l(S_1, S_2) \right], \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left( z_{,\alpha}^{3'} S_\beta + z_{,\beta}^{3'} S_\alpha \right) u_{3'}^l(S_1, S_2), \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left( \frac{\pi l}{4} z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma'}^l(S_1, S_2) + z_{,3}^{3'} S_\alpha u_{3'}^l(S_1, S_2) \right), \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \frac{\pi l}{2} z_{,3}^{\gamma'} u_{\gamma'}^l(S_1, S_2), \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)}^l &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left( 2z_{,\alpha}^{3'} S_1 S_2 + z_{,12}^{3'} S_\alpha \right) u_{3'}^l(S_1, S_2), \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \frac{\pi l}{2} \left( 2z_{,3}^{\gamma'} S_\alpha + z_{,3\alpha}^{\gamma'} \right) u_{\gamma'}^l(S_1, S_2), \\
\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ \frac{\pi l}{2} \left( z_{,\alpha}^{\gamma'} S_{(3-\alpha)} + \frac{1}{2} z_{,12}^{\gamma'} \right) u_{\gamma'}^l(S_1, S_2) + \right. \\
&\quad \left. + \left( 2z_{,3}^{3'} S_1 S_2 + z_{,3(3-\alpha)}^{3'} S_\alpha \right) u_{3'}^l(S_1, S_2) \right].
\end{aligned}$$

Початкове співвідношення при побудові розрахункових рівнянь напіваналітичного метода скінченних елементів приймається у вигляді

варіаційного принципу Даламбера [11], яке записується для системи з  $E$  скінченних елементів. Розглянемо варіацію енергії деформації:

$$\delta W = \sum_{e=1}^E \delta W^e, \quad (6)$$

де  $\delta W^e$  - варіація енергії деформації елемента  $e$ .

В місцевій системі координат варіація енергії деформації SE записується через компоненти тензорів напружень і деформацій:

$$\delta W^e = \iiint_{x^1 x^2 x^3} \sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (7)$$

Перепишемо вираз (7) у матричному вигляді, опускаючи індекс  $e$ :

$$\delta W = \iiint_{x^1 x^2 x^3} \delta \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (8)$$

де

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\}^T &= \{\varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{12} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{13} \quad \varepsilon_{23} \quad \varepsilon_{33}\}, \\ \{\sigma\}^T &= \{\sigma^{11} \quad \sigma^{12} \quad \sigma^{22} \quad \sigma^{13} \quad \sigma^{23} \quad \sigma^{33}\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Зв'язок між деформаціями і коефіцієнтами розкладу переміщень представимо у вигляді:

$$\{\varepsilon\} = \sum_{l=0}^L \left( \overline{[B]}_l \psi_{1'}^l + \overline{[B]}_l \psi_{3'}^l \right) \{u\}_l, \quad (10)$$

де

$$\begin{aligned} \overline{[B]}_l &= \left[ \overline{[B]}_l^{(-1,-1)} \quad \overline{[B]}_l^{(1,-1)} \quad \overline{[B]}_l^{(-1,1)} \quad \overline{[B]}_l^{(1,1)} \right], \\ \overline{\overline{[B]}}_l &= \left[ \overline{\overline{[B]}}_l^{(-1,-1)} \quad \overline{\overline{[B]}}_l^{(1,-1)} \quad \overline{\overline{[B]}}_l^{(-1,1)} \quad \overline{\overline{[B]}}_l^{(1,1)} \right], \\ \{u\}_l^T &= \left[ \{u\}_{l(-1,-1)}^T \quad \{u\}_{l(1,-1)}^T \quad \{u\}_{l(-1,1)}^T \quad \{u\}_{l(1,1)}^T \right], \\ \{u\}_{l(S_1, S_2)}^T &= \left[ u_{1'}^l(S_1, S_2) \quad u_{2'}^l(S_1, S_2) \quad u_{3'}^l(S_1, S_2) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

Елементи підматриць  $\overline{[B]}_l^{(S_1, S_2)}$  і  $\overline{\overline{[B]}}_l^{(S_1, S_2)}$  обчислюються відповідно до формул (5), на основі розкладу (2).

Підставляючи (10) в (8), запишемо варіацію енергії деформації елемента через амплітудні переміщення  $\{u\}_l$  та вузлові реакції  $\{r_\sigma\}_l$ :

$$\delta W^e = \sum_{l=l_0}^L \delta \{u\}_l^T \{r_\sigma\}_l, \quad (12)$$

де

$$\{r_\sigma\}_l = \iiint_{x^1 x^2 x^3} \left( \psi_{1'}^l [\overline{B}]_l^T \{\sigma\} + \psi_{3'}^l [\overline{B}]_l^T \{\sigma\} \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (13)$$

Виконуючи чисельне інтегрування, отримаємо формулу для обчислення вузлових реакцій скінченного елемента із змінними по всім трьом координатам фізико-механічними та геометричними параметрами:

$$\{r_\sigma\}_l = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \left[ \left( \phi_{1'}^l [\overline{B}]_l^T \{\sigma\} + \phi_{3'}^l [\overline{B}]_l^T \{\sigma\} \right) \sqrt{g} H_i H_j H_n \right]_{(x_i^1, x_j^2, x_n^3)}, \quad (14)$$

де  $I, J, N$  - кількість точок інтегрування по  $x^1, x^2$  і  $x^3$  відповідно,  $H_i, H_j, H_n$  - вагові функції,  $x_i^1, x_j^2, x_n^3$  - координати точок

інтегрування. Тут для кільцевого СЕ  $\phi_{1'}^l = \phi_{2'}^l = \cos l \frac{\pi n}{N}$ ,  $\phi_{3'}^l = \sin l \frac{\pi n}{N}$ ;

для призматичного  $\phi_{1'}^l = \phi_{2'}^l = \sin l \frac{\pi n}{2N}$ ,  $\phi_{3'}^l = \cos l \frac{\pi n}{2N}$ .

Для виводу матриці жорсткості скінченного елемента представимо зв'язок між прирощеннями напружень і деформацій у вигляді:

$$\{\Delta \sigma\} = [D] \{\Delta \varepsilon\}. \quad (15)$$

Елементи матриці  $[D]$  обчислюються з урахуванням залежності механічних характеристик матеріалу від рівня розвитку пластичних деформацій та зон контактної взаємодії [11].

Опускаючи позначку  $\Delta$ , прирощення варіації енергії деформації можна записати як:

$$\delta W^e = \iiint_{x^1 x^2 x^3} \delta \{\varepsilon\}^T [D] \{\varepsilon\} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (16)$$

Подаючи деформації через коефіцієнти розкладу перемішень, отримаємо:

$$\delta W^e = \sum_{l=l_0}^L \sum_{m=m_0}^M \delta \{u\}_l^T [k]_m \{u\}_m, \quad (17)$$



де  $[k]_{lm}$  - амплітудні матриці жорсткості:

$$[k]_{lm} = \iiint_{x^1 x^2 x^3} \left( \psi_{1'}^l [\overline{B}]_i^T [D] [\overline{B}]_m \psi_{1'}^m + \psi_{1'}^l [\overline{B}]_i^T [D] [\overline{B}]_m \psi_{3'}^m + \right. \\ \left. + \psi_{3'}^l [\overline{B}]_i^T [D] [\overline{B}]_m \psi_{1'}^m + \psi_{3'}^l [\overline{B}]_i^T [D] [\overline{B}]_m \psi_{3'}^m \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (18)$$

Використовуючи формулу чисельного інтегрування:

$$[k]_{lm} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \left[ \left( \phi_{1'}^l [\overline{B}]_i^T [D] [\overline{B}]_m \phi_{1'}^m + \phi_{1'}^l [\overline{B}]_i^T [D] [\overline{B}]_m \phi_{3'}^m + \right. \right. \\ \left. \left. + \phi_{3'}^l [\overline{B}]_i^T [D] [\overline{B}]_m \phi_{1'}^m + \phi_{3'}^l [\overline{B}]_i^T [D] [\overline{B}]_m \phi_{3'}^m \right) \sqrt{g} H_i H_j H_n \right]_{(x_i^1, x_j^2, x_n^3)}. \quad (19)$$

Варіація кінетичної енергії в місцевій системі координат описується співвідношенням:

$$\delta T^e = - \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \rho \dot{u}^{k'} \delta u_{k'} \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (20)$$

На основі (3) можна записати:

$$\delta T^e = - \sum_{l=0}^L \delta \{u\}_l^T \{r_p\}_l. \quad (21)$$

Вектор інерційних вузлових навантажень скінченного елемента має вигляд:

$$\{r_p\}_l = \int \int \int_{x^1 x^2 x^3} \rho [\tilde{g}] \{\ddot{u}\} [\psi]_l \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (22)$$

де  $[\tilde{g}]$  - метричний тензор контрваріантних компонент.

На основі чисельного інтегрування:

$$\{r_p\}_l = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \left[ \rho [\tilde{g}] \{\ddot{u}\} [\phi]_l \sqrt{g} H_i H_j H_n \right]_{(x_i^1, x_j^2, x_n^3)}.$$

Якщо прискорення вузлів СЕ в окружному напрямку розкласти в ряд Фур'є, то виходячи з (20) отримаємо вираз:

$$\delta T^e = - \sum_{l=0}^L \sum_{m=m_0}^L \delta \{u\}_l^T [m]_{lm} \{\ddot{u}\}_m, \quad (23)$$

де  $[m]_{lm}$  - амплітудна матриця мас, компоненти якої обчислюються за формулою:

$$[m]_{lm} = \int \int \int_{x^1, x^2, x^3} \rho [\psi]_l^T [\tilde{g}] [\psi]_m \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3 \quad (24)$$

або

$$[m]_{lm} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \sum_{n=1}^N \left[ \rho [\phi]_l^T [\tilde{g}] [\phi]_m \sqrt{g} H_i H_j H_n \right]_{(x_i^1, x_j^2, x_n^3)}$$

## 2. Неоднорідні круговий та призматичний скінченні елементи канонічної форми із змінною площею поперечного перерізу.

Важливим частковим випадком, що має самостійне значення є неоднорідні кругові та призматичні тіла утворені рухом деякої площини вздовж утворюючої канонічної форми (коло, пряма) із змінною площею поперечного перерізу [11].

Отримані співвідношення п. 1 не накладають обмежень на розподіл фізико-механічних і геометричних параметрів вздовж будь-якої з осей  $x^i$ . Їх використання веде до необхідності виконання значного об'єму обчислень, що пов'язані з операціями чисельного інтегрування. Дослідження [1,3,4,10] показали, що більш ефективною схемою є підхід, який припускає використання усереднених значень в області поперечного перерізу у поєднанні з моментною схемою скінченного елемента на базі компонент тензора фізичних деформацій (рис. 2).

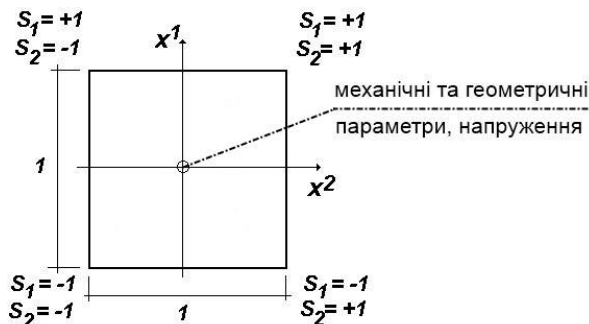


Рис. 2. Усереднення значень в області поперечного перерізу

Приймається, що щільність матеріалу  $\rho$ , компоненти тензора пружних постійних  $d^{ijkl}$  і визначник метричного тензора  $g$  незначно змінюються в області поперечного перерізу елемента і вважаються рівними відповідним значенням в його центрі:

$$\overset{\circ}{\rho} = \rho \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{d}^{ijkl} = d^{ijkl} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \sqrt{\overset{\circ}{g}} = \sqrt{g} \Big|_{x^\alpha=0}. \quad (25)$$

Постійні матеріалу і напруження довільно змінюються вздовж осі  $x^3$  і обчислюються в необхідній кількості точок інтегрування.

Особливістю представлених скінченних елементів є формулювання моментної схеми скінченного елемента в термінах компонент тензора фізичних деформацій:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}}. \quad (26)$$

При цьому компоненти тензора деформацій, що розкладаються в ряд Маклорена, набувають вигляду:

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} &= \frac{1}{g_{(\alpha\alpha)}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} + \left[ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} h_{(\alpha\alpha),(3-\alpha)} \right] x^{(3-\alpha)} \right\}, \\ \tilde{\varepsilon}_{12} &= \frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}, \\ \tilde{\varepsilon}_{\alpha 3} &= \frac{1}{\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}g_{33}}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3} + \left[ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3,(3-\alpha)} - \frac{\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}}{2} \left( h_{(\alpha\alpha),(3-\alpha)} + h_{33,(3-\alpha)} \right) \right] x^{(3-\alpha)} \right\}, \\ \tilde{\varepsilon}_{33} &= \frac{1}{g_{33}} \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} + \left[ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} - \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} h_{33,\alpha} \right] x^\alpha \right\}, \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij} &= \varepsilon_{ij} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\alpha} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^\alpha} \Big|_{x^\alpha=0}, \quad h_{(ii),\alpha} = \frac{g_{(ii),\alpha}}{g_{(ii)}}, \quad \alpha \neq i, j. \end{aligned} \quad (27)$$

Формули для обчислення коефіцієнтів ряду Маклорена для тензора деформацій в цьому випадку значно спрощуються. Аналогічно (5) представимо коефіцієнти розкладу деформацій (27) через амплітудні значення переміщень. Тоді для кільцевого СЕ:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left( z'_{,\alpha} S_\beta + z'_{,\beta} S_\alpha \right) u'_{\gamma'(S_1, S_2)}^l, \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left( l u'_{3'(S_1, S_2)} + Z^2 u'_{2'(S_1, S_2)} \right), \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha,(3-\alpha)}^l &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left( 2 z'_{,\alpha} S_1 S_2 + z'_{,12} S_\alpha \right) u'_{\gamma'(S_1, S_2)}^l, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha}^l &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ l S_\alpha u_{3'(S_1, S_2)}^l + \left( Z^{2'} S_\alpha + \frac{1}{2} z_{,\alpha}^{2'} \right) u_{2'(S_1, S_2)}^l \right], \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}^l &= 0, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)}^l = 0, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{12, (3-\alpha)}^l = 0, \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ -\frac{l}{2} z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l + \left( S_\alpha - \frac{z_{,\alpha}^{2'}}{Z^{2'}} \right) u_{3'(S_1, S_2)}^l \right], \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left\{ -l \left( z_{,\alpha}^{\gamma'} S_{(3-\alpha)} + \frac{1}{2} z_{,12}^{\gamma'} \right) u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l + \right. \\ &\quad \left. + \left[ 2S_1 S_2 - \frac{1}{Z^{2'}} \left( z_{,\alpha}^{2'} S_{(3-\alpha)} - \frac{z_{,\alpha}^{2'} z_{, (3-\alpha)}^{2'}}{2Z^{2'}} + \frac{1}{2} z_{,12}^{2'} \right) \right] u_{3'(S_1, S_2)}^l \right\}, \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta}^l &= 0, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^l = 0, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha, (3-\alpha)}^l = 0, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha}^l = 0, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{12, (3-\alpha)}^l = 0. \end{aligned}$$

Для призматичного СЕ:

(28)

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left( z_{,\alpha}^{\gamma'} S_\beta + z_{,\beta}^{\gamma'} S_\alpha \right) u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l, \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} -\frac{\pi l}{2} a u_{3'(S_1, S_2)}^l, \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha, (3-\alpha)}^l &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left( 2z_{,\alpha}^{\gamma'} S_1 S_2 + z_{,12}^{\gamma'} S_\alpha \right) u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l, \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha}^l &= \frac{1}{2} \sum_{S_1} \sum_{S_2} -\frac{\pi l}{2} a S_\alpha u_{3'(S_1, S_2)}^l, \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}^l &= 0, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)}^l = 0, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{12, (3-\alpha)}^l = 0, \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left( \frac{\pi l}{4} z_{,\alpha}^{\gamma'} u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l + a S_\alpha u_{3'(S_1, S_2)}^l \right), \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha 3, (3-\alpha)}^l &= \frac{1}{4} \sum_{S_1} \sum_{S_2} \left[ \frac{\pi l}{2} \left( z_{,\alpha}^{\gamma'} S_{(3-\alpha)} + \frac{1}{2} z_{,12}^{\gamma'} \right) u_{\gamma'(S_1, S_2)}^l + 2a S_1 S_2 u_{3'(S_1, S_2)}^l \right], \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\beta}^l &= 0, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^l = 0, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha\alpha, (3-\alpha)}^l = 0, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha}^l = 0, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{12, (3-\alpha)}^l = 0. \end{aligned}$$

Фізичні компоненти тензора напружень визначаються співвідношенням:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \sigma^{ij} \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}. \quad (29)$$

Зв'язок між компонентами тензора фізичних напружень та деформацій подається на основі узагальненого закону Гука:

$$\tilde{\sigma}^{ij} = \tilde{d}^{ijkl} \tilde{\varepsilon}_{ij}, \quad \tilde{d}^{ijkl} = d^{ijkl} \sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)} g_{(kk)} g_{(ll)}}. \quad (30)$$

Аналогічно (27) представимо напруження відрізками ряду Маклорена:

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}^{\alpha(\alpha)} &= g_{(\alpha\alpha)} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha(\alpha)} + \overset{\circ}{\sigma}'_{,(3-\alpha)}{}^{\alpha(\alpha)} x^{(3-\alpha)} \right\}, \quad \tilde{\sigma}^{12} = \sqrt{g_{11} g_{22}} \overset{\circ}{\sigma}^{12}, \\ \tilde{\sigma}^{\alpha 3} &= \sqrt{g_{(\alpha\alpha)} g_{33}} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}^{\alpha 3} + \overset{\circ}{\sigma}'_{,(3-\alpha)}{}^{\alpha 3} x^{(3-\alpha)} \right\}, \quad \tilde{\sigma}^{33} = g_{33} \left\{ \overset{\circ}{\sigma}^{33} + \overset{\circ}{\sigma}'_{,\alpha}{}^{33} x^{\alpha} \right\}. \end{aligned} \quad (31)$$

Компоненти  $\overset{\circ}{\sigma}'_{,\alpha}{}^{i(i)} (\alpha \neq i)$  відображають напруження згину і їх впливом на точність розв'язання нехтувати не можна, в особливості для оболонок і пластин. Члени ряду  $\overset{\circ}{\sigma}'_{,\alpha}{}^{12}$ ,  $\overset{\circ}{\sigma}'_{,\alpha}{}^{3(\alpha)}$  визначають зміну напружень зсуву. Вклад їх в енергію деформації елемента при використанні МССЕ рівний нулю. Для тонких оболонок з навантаженням, що приведене до серединної поверхні в класичній теорії запроваджуються умови рівності нулю нормальних напружень на площадках, які паралельні площині, що дотична до серединної поверхні. Цій умові відповідає наступна гіпотеза:

$$\overset{\circ}{\sigma}'_{,\alpha}{}^{(\alpha)(\alpha)} = 0, \quad (32)$$

яка визначає постійність напружень обтягу.

Зв'язок між коефіцієнтами розкладів (27) і (31) в центрі меридіонального перерізу СЕ на основі узагальненого закону Гука:

$$\overset{\circ}{\sigma}^{ij} = \overset{\circ}{d}^{ijkl} \overset{\circ}{\varepsilon}_{kl}. \quad (33)$$

Зв'язок між похідними напружень і деформацій для лінійно-пружного матеріалу, який забезпечує універсальність СЕ, що пропонуються:

$$\overset{\circ}{\sigma}'_{,\alpha}{}^{ij} = \overset{\circ}{d}'_{\alpha}{}^{ijkl} \overset{\circ}{\varepsilon}'_{kl,\alpha}, \quad (34)$$

де

$$\overset{\circ}{d}'_{\alpha}{}^{ijkl} = \overset{\circ}{d}{}^{ijkl} - \frac{\overset{\circ}{d}{}^{ij(\alpha)(\alpha)} \overset{\circ}{d}{}^{(\alpha)(\alpha)kl}}{\overset{\circ}{d}{}^{(\alpha)(\alpha)(\alpha)(\alpha)}}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}'_{ij,\beta} = \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\beta} - \frac{\overset{\circ}{\varepsilon}{}^{ij}}{2} (h_{(ii),\beta} + h_{(jj),\beta}).$$

Напруження і їх похідні незалежно подаються відрізками ряду Фур'є вздовж  $x^3$ :

$$\overset{\circ}{\sigma}^{ij} = \sum_{l=l_0}^L \overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} \Psi_l^l + \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha l}^{ij} \Psi_{3'}^l, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{ij} = \sum_{l=l_0}^L \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha l}^{ij} \Psi_l^l + \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha l}^{ij} \Psi_{3'}^l. \quad (35)$$

Для однорідних вздовж  $x^3$  тіл амплітудні значення напружень та їх похідних в центрі поперечних перерізів СЕ можуть бути отримані безпосередньо через амплітудні значення деформацій і їх похідних:

$$\overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} = d^{ijkm} \overset{\circ}{\varepsilon}_{km}^l, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha l}^{ij} = d_{\alpha}^{ijkm} \overset{\circ}{\varepsilon}_{km,\alpha}^l, \quad \overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} = d^{ijkm} \overset{\circ}{\varepsilon}_{km}^l, \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha l}^{ij} = d_{\alpha}^{ijkm} \overset{\circ}{\varepsilon}_{km,\alpha}^l. \quad (36)$$

В загальному випадку, компоненти тензора пружних постійних залежать від координати  $x^3$  і значення напружень неможливо отримати через амплітудні значення деформацій. Тому, амплітудні значення напружень визначаються співвідношеннями гармонійного аналізу чисельним інтегуванням:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} &= \frac{1}{\theta N} \sum_{n=0}^{2N-1} \overset{\circ}{\sigma}_n^{ij} \phi_l^l(n), \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha l}^{ij} = \frac{1}{\theta N} \sum_{n=0}^{2N-1} \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha n}^{ij} \phi_l^l(n), \\ \overset{\circ}{\sigma}_l^{ij} &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} \overset{\circ}{\sigma}_n^{ij} \phi_{3'}^l(n), \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha l}^{ij} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{2N-1} \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha n}^{ij} \phi_{3'}^l(n). \end{aligned} \quad (37)$$

Тут для кільцевого СЕ  $\theta = \begin{cases} 2, & \text{якщо } l = 0 \\ 1, & \text{якщо } l > 0 \end{cases}$ , для призматичного  $\theta = 1$ ;  $\overset{\circ}{\sigma}_n^{ij}$  і

$\overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha n}^{ij}$  - координатні значення напружень і їх похідні в центрі поперечних перерізів, що відповідають точкам інтегування  $n$ ;  $2N$  - загальне число точок інтегування вздовж координати  $x^3$ .

Подавши компоненти тензорів напружень та деформацій відповідно основним положенням МССЕ (27) і (31), отримаємо:

$$\delta W^e = \iiint_{x^1 x^2 x^3} \left( \overset{\circ}{\sigma}^{ij} + \overset{\circ}{\sigma}'_{,\alpha}{}^{ij} x^\alpha \right) \left( \delta \varepsilon_{ij} + \delta \varepsilon'_{ij,\beta} x^\beta \right) \sqrt{g} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (38)$$

Виконаємо інтегування по площині поперечного перерізу СЕ з урахуванням гіпотез (25):

$$\delta W^e = \int_{x^3} \left( \overset{\circ}{\sigma}^{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \overset{\circ}{\sigma}'_{,\alpha}{}^{ij} \delta \varepsilon'_{ij,\alpha} \right) \sqrt{g} dx^3. \quad (39)$$

або в матричному вигляді:

$$\delta W^e = \int_{x^3} \left( \delta \{\overset{\circ}{\varepsilon}\}^T \{\overset{\circ}{\sigma}\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \delta \{\overset{\circ}{\varepsilon}\}_{\alpha}^T \{\overset{\circ}{\sigma}\}_{\alpha} \right) \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3, \quad (40)$$

де

$$\begin{aligned} \{\overset{\circ}{\varepsilon}\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{11} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{12} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{22} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{13} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{23} \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \right\}, \\ \{\overset{\circ}{\varepsilon}\}_{\alpha}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\varepsilon}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\alpha} \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{(3-\alpha)3,\alpha} \right\}, \\ \{\overset{\circ}{\sigma}\}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\sigma}^{11} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{12} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{22} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{13} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{23} \quad \overset{\circ}{\sigma}^{33} \right\}, \\ \{\overset{\circ}{\sigma}\}_{\alpha}^T &= \left\{ \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{(3-\alpha)(3-\alpha)} \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{33} \quad \overset{\circ}{\sigma}_{,\alpha}^{(3-\alpha)3} \right\}. \end{aligned} \quad (41)$$

Зв'язок між деформаціями і коефіцієнтами розкладу переміщень представимо у вигляді:

$$\{\overset{\circ}{\varepsilon}\} = \sum_{l=0}^L \left( \overset{\circ}{[B]}_l \psi'_l + \overline{\overline{\overset{\circ}{[B]}}}_l \psi'_{3l} \right) \{u\}_l, \quad \{\overset{\circ}{\varepsilon}\}_{\alpha} = \sum_{l=0}^L \left( \overset{\circ}{[B]}_{\alpha l} \psi'_l + \overline{\overline{\overset{\circ}{[B]}}}_{\alpha l} \psi'_{3l} \right) \{u\}_l. \quad (42)$$

Матриці  $\overset{\circ}{[B]}_l$ ,  $\overline{\overline{\overset{\circ}{[B]}}}_l$ ,  $\overset{\circ}{[B]}_{\alpha l}$ ,  $\overline{\overline{\overset{\circ}{[B]}}}_{\alpha l}$  за своєю структурою подібні матрицям  $\overset{\circ}{[B]}_l$  і  $\overline{\overline{\overset{\circ}{[B]}}}_l$ . Елементи підматриць  $\overset{\circ}{[B]}_l^{(S_1, S_2)}$ ,  $\overline{\overline{\overset{\circ}{[B]}}}_l^{(S_1, S_2)}$ ,  $\overset{\circ}{[B]}_{\alpha l}^{(S_1, S_2)}$ ,  $\overline{\overline{\overset{\circ}{[B]}}}_{\alpha l}^{(S_1, S_2)}$  обчислюються згідно (28).

Використавши (42), варіацію енергії деформації представимо через амплітудні значення переміщень та вузлових реакцій:

$$\delta W^e = \sum_{l=0}^L \delta \{u\}_l^T \{r_{\sigma}\}_l, \quad (43)$$

де

$$\{r_{\sigma}\}_l = \int_{x^3} \left\{ \left( \psi'_l \overset{\circ}{[B]}_l^T + \psi'_{3l} \overline{\overline{\overset{\circ}{[B]}}}_l^T \right) \{\overset{\circ}{\sigma}\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \psi'_l \overset{\circ}{[B]}_{\alpha l}^T + \psi'_{3l} \overline{\overline{\overset{\circ}{[B]}}}_{\alpha l}^T \right) \{\overset{\circ}{\sigma}\}_{\alpha} \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3. \quad (44)$$

Закон Гука для коефіцієнтів розкладу напружень і деформацій має вигляд:

$$\{\overset{\circ}{\sigma}\} = [D]\{\overset{\circ}{\varepsilon}\}, \quad \{\overset{\circ}{\sigma}\}_\alpha = [D]_\alpha \{\overset{\circ}{\varepsilon}\}_\alpha. \quad (45)$$

Тоді (40) запишеться як:

$$\delta W^e = \int_{x^3} \left( \delta \{\overset{\circ}{\varepsilon}\}^T [D] \{\overset{\circ}{\varepsilon}\} + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \delta \{\overset{\circ}{\varepsilon}\}_\alpha^T [D]_\alpha \{\overset{\circ}{\varepsilon}\}_\alpha \right) \sqrt{g} dx^3. \quad (46)$$

Використавши розклад деформацій через переміщення, варіацію енергії деформації представимо у вигляді:

$$\delta W^e = \sum_{l=l_0}^L \sum_{m=m_0}^L \delta \{u\}_l^T [k]_{lm} \{u\}_m, \quad (47)$$

де матриця жорсткості неоднорідного скінченного елемента визначається виразом:

$$\begin{aligned} [k]_{lm} = \int_{x^3} & \left[ \psi_{1'}^l [\overset{\circ}{B}]_l^T [\overset{\circ}{D}] [\overset{\circ}{B}]_m \psi_{1'}^m + \psi_{1'}^l [\overset{\circ}{B}]_l^T [\overset{\circ}{D}] [\overset{\circ}{B}]_m \psi_{3'}^m + \right. \\ & + \psi_{3'}^l [\overset{\circ}{B}]_l^T [\overset{\circ}{D}] [\overset{\circ}{B}]_m \psi_{1'}^m + \psi_{3'}^l [\overset{\circ}{B}]_l^T [\overset{\circ}{D}] [\overset{\circ}{B}]_m \psi_{3'}^m + \\ & + \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \psi_{1'}^l [\overset{\circ}{B}]_{\alpha l}^T [\overset{\circ}{D}]_\alpha [\overset{\circ}{B}]_{\alpha m} \psi_{1'}^m + \psi_{1'}^l [\overset{\circ}{B}]_{\alpha l}^T [\overset{\circ}{D}]_\alpha [\overset{\circ}{B}]_{\alpha m} \psi_{3'}^m + \right. \\ & \left. \left. + \psi_{3'}^l [\overset{\circ}{B}]_{\alpha l}^T [\overset{\circ}{D}]_\alpha [\overset{\circ}{B}]_{\alpha m} \psi_{1'}^m + \psi_{3'}^l [\overset{\circ}{B}]_{\alpha l}^T [\overset{\circ}{D}]_\alpha [\overset{\circ}{B}]_{\alpha m} \psi_{3'}^m \right) \right] \sqrt{g} dx^3. \quad (48) \end{aligned}$$

У випадку, коли фізико-механічні характеристики та площа поперечного перерізу SE незмінні вздовж  $x^3$ , інтегрування в (48) можна виконати в замкнутій формі:

$$[k]_{ll} = h \left\{ [\overset{\circ}{B}]_l^T [\overset{\circ}{D}] [\overset{\circ}{B}]_l + [\overset{\circ}{B}]_l^T [\overset{\circ}{D}] [\overset{\circ}{B}]_l + \right.$$



$$+ \frac{1}{12} \sum_{\alpha=1}^2 \left( \overset{\circ}{[B]}_{\alpha l}^T \overset{\circ}{[D]}_{\alpha} \overset{\circ}{[B]}_{\alpha l} + \overset{\circ}{[B]}_{\alpha l}^T \overset{\circ}{[D]}_{\alpha} \overset{\circ}{[B]}_{\alpha l} \right) \left. \right\} \sqrt{\overset{\circ}{g}}. \quad (49)$$

Тут  $\hbar = \hbar_1$  при  $l \neq 0$  і  $\hbar = \hbar_2$  при  $l = 0$ . Для кільцевого СЕ:  $\hbar_1 = \pi$ ,  $\hbar_2 = 2\pi$ ; для призматичного:  $\hbar_1 = 1$ ,  $\hbar_2 = 0$ .

Розглянемо варіацію кінетичної енергії скінченного елемента по аналогії з п. 1.

$$\delta T^e = - \sum_{l=l_0}^L \delta \{u\}_l^T \{r_p\}_l. \quad (50)$$

При формуванні коефіцієнтів матриці жорсткості беруть участь поліноми більш низького ступеня (перші похідні), ніж при формуванні коефіцієнтів матриці мас. Отже, збіжність чисельного рішення визначається збіжністю потенціальної енергії деформації. В цьому випадку доцільно зменшити ступінь поліномів, які використовуються при обчисленні коефіцієнтів матриці мас. Використавши припущення про осереднення маси біля вузла, що розглядається, та враховуючи, що кожна вузлова маса відповідає частині маси елементів, які примикають до даного вузла, вектор інерційних вузлових навантажень скінченного елемента можна записати:

$$\{r_p\}_l = \frac{1}{4} \int_{x^3} \rho [\tilde{g}] \{\ddot{u}\} [\psi]_l \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3. \quad (51)$$

Якщо прискорення вузлів СЕ в окружному напрямку розкласти в ряд Фур'є, отримаємо вираз:

$$\delta T^e = - \sum_{l=l_0}^L \sum_{m=m_0}^L \delta \{u\}_l^T [m]_{lm} \{\ddot{u}\}_m, \quad (52)$$

де  $[m]_{lm}$  - амплітудна "неузгоджена" матриця мас, компоненти якої обчислюються за формулою:

$$[m]_{lm} = \frac{1}{4} \int_{x^3} \rho [\psi]_l^T [\tilde{g}] [\psi]_m \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^3. \quad (53)$$

Для однорідних тіл із постійною площею поперечного перерізу вздовж  $x^3$  інтегрування в (53) можна виконати в замкнутій формі:

$$[m]_{ll} = \frac{1}{4} \hbar \rho [\tilde{g}] \sqrt{\overset{\circ}{g}}. \quad (54)$$

## Висновки

Розрахункові співвідношення напіваналітичного метода скінчених елементів, отримані в рамках просторової задачі динаміки, дозволяють розглядати неоднорідні кругові та призматичні тіла неканонічної форми із складною формою і структурою поперечного перерізу з урахуванням наявності зон нелінійної роботи матеріалу та контактної взаємодії.

При побудові рівнянь не накладалися обмеження на характер розподілу масових і механічних властивостей матеріалів. Запропонований підхід з енергією деформації на базі фізичних компонент тензорів напружень і деформацій та усередненими значеннями фізико-механічних і геометричних параметрів в області поперечного перерізу СЕ забезпечують високу швидкість збіжності результатів до точного і значне скорочення об'ємів обчислень, що пов'язані з чисельним інтегруванням.

## СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування простових тіл. Монографія. – КНУБА, 2005. – 298 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Сахаров О.С., Солодей І.І.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах динаміки просторових тіл - Монографія. Київ, 2012. – 248 с.
3. *Баженов В.А., Гуляр А.І., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел. - Киев: Випол, 1993, 376 с.
4. *Баженов В.А., Гуляр А.І., Топор А.Г., Солодей І.І.* Развитие ПМКЭ применительно к задачам статики и динамики тел вращения при неосесимметричных нагрузках // Прикладная механика №1, 1998, Том 34, с. 31-38.
5. *Блох В.И.* Теория упругости.- Харьков: Изд-во Харьк. ун-та.- 1964. –483с.
6. *Гуляр А.І., Козак А.Л., Сахаров А.С., Чорный С.М.* Применение МСКЭ к расчету круглых пластин и оболочек вращения // Сопrotивление материалов и теория сооружений. –1978. –Вып.33. –С.81-85.
7. *Гуляр А.І., Сахаров А.С., Чорный С.М.* Сходимость моментной схемы метода конечных элементов в задачах упругого и пластического осесимметричного деформирования // Сопrotивление материалов и теория сооружений. – 1978, №32 – с.3-10.
8. *Кислокий В.Н., Сахаров А.С., Соловей Н.А.* Моментная схема метода конечных элементов в геометрически нелинейных задачах прочности и устойчивости оболочек // Проблемы прочности. –1977. -№7. –С.25-33.
9. *Сахаров А.С.* Моментная схема конечных элементов МСКЭ с учетом жестких смещений // Сопrotивление материалов и теория сооружений. –1974. –Вып.24. –С.147-156.
10. *Солодей І.І.* Ефективність скінченноелементної бази напіваналітичного метода скінчених елементів для апроксимації тіл обертання та призматичних тіл в задачах динаміки // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.82, 2008.-с.154-163.
11. *Солодей І.І.* Постановка задачі лінійного і нелінійного деформування та руйнування просторових тіл в задачах динаміки // Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-техн. збірник / Відп. ред. В.А.Баженов. –К.:КНУБА, Вип.89, 2012.-с.93-106.

*Стаття надійшла до редакції 21.12.2012 р.*

*Солодей И.И.*

**БАЗОВЫЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ МОДЕЛИ ПМКЭ ДЛЯ  
ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ТЕЛ В ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ**

Разработаны базовые неоднородные круговой и призматический конечные элементы (КЭ) с четырехугольным поперечным сечением общего вида, на основе которых получены расчетные соотношения полуаналитического метода конечных элементов (ПМКЭ) для круговых и призматических тел неканонической формы под действием произвольного стационарного или нестационарного нагружения.

*Solodei I.I.*

**BASIC FINITE ELEMENT MODELS SAFEM FOR THREE-DIMENSIONAL BODIES  
UNDER DYNAMIC LOADING**

Basic universal finite circular and prismatic elements (FE) with quadrangular cross-section are considered. Design equations of semi-analytical finite elements method (SAFEM) for 3D uncanonical circular and prismatic bodies under dynamic loading are developed.