

УДК 539.3

**В.А. Баженов**, д-р техн. наук,  
**О.С. Погорелова**, канд. фіз.-мат. наук  
**Т.Г. Постнікова**, канд. техн. наук

## УДАРНІ СИЛИ В ВІБРОУДАРНИХ СИСТЕМАХ

В статті представлений аналіз динамічної поведінки ударних контактних сил в двохмасових віброударних системах з двома ступнями вільності в залежності від параметрів зовнішнього періодичного навантаження та характеристик жорсткості самих систем. Показано, що при зміні  $T$ -періодичного одноударного режиму коливань  $nT$ -періодичними багатударними ( $T$  – період зовнішнього навантаження) величина ударної сили, як правило, збільшується, інколи значно збільшується. Аналіз виконаний методом продовження розв'язку за параметром, який застосовується в синтезі з методом побудови періодичних розв'язків суттєво нелінійних систем та моделюванням удару нелінійною силою контактної взаємодії на базі квазістатичної теорії Герца, що в сукупності є потужним чисельним інструментом для дослідження динаміки віброударних систем.

### Вступ.

Віброударні машини та обладнання широко застосовуються в техніці, тому вивчення їхньої динамічної поведінки, ударних сил взаємодії між елементами в різних умовах роботи викликає значний інтерес і бурно розвивається в останні десятиріччя [1,2]. Однією з важливіших характеристик віброударного руху механічної системи є величина ударної сили.

Віброударні системи – це сильно нелінійні системи, що змінюють свою структуру внаслідок багатократних співударів їхніх елементів. Моделювання удару в таких системах з використанням хвильової теорії удару викликає значні труднощі. Хвильова теорія не вважає зв'язки між різними точками твердого тіла абсолютно жорсткими і допускає їхні відносні переміщення, тобто розглядає деформівне тіло. Кожна точка має три ступня вільності, загальна кількість незалежних координат дорівнює  $3K$ , система суттєво ускладнюється. Застосування для моделювання удару дискретної моделі з представленням твердого тіла як деякої кількості кінцевих елементів також дуже складно внаслідок багатократності співударів. Тому при дослідженні динаміки віброударних систем часто застосовуються більш грубі моделі, що пов'язано з «компромісом між простотою і реалістичністю, досягнути якого на практиці, однак, вдається рідко» [1]. Розповсюдженим є використання класичної стереомеханічної теорії, яка ґрунтується на моделі абсолютно твердого тіла та ньютонівського коефіцієнта відновлення, котрий вважається постійним, визначається матеріалами тіл і не залежить ні від швидкості зближення, ні від яких-небудь інших обставин. Удар вважається миттєвим, в момент удару складаються

граничні умови про рівність переміщень тіл та стрибкоподібне змінення швидкостей. Ця теорія не дозволяє визначити такі важливі характеристики процесу удару, як величина контактної ударної сили та тривалість удару. Використання дискретних моделей локальних деформацій, зокрема моделі, що базується на використанні квазістатичної теорії Герца, є «більш реалістичним підходом» [3].

Теорія Герца розглядає лише локальні деформації тіл, що співударяються, в зоні контакту, вважає удар пружним, низько швидкісним, колінеарним, без тертя (хоча теорію можна узагальнити додаванням в'язкого тертя), поверхні тіл в зоні контакту – гладкими, криволінійними, «Герцевими». Дія удару моделюється нелінійною контактною силою [4], яка вводиться в рівняння руху віброударної системи. Ця сила присутня лише під час удару, в решту часу руху вона відсутня. Моделювання удару контактною силою Герца дозволяє отримати закон руху тіл віброударної системи на всій часовій осі, включаючи час удару, дає можливість врахувати механічні характеристики тіл, що співударяються, визначити тривалість удару і величину ударної контактної сили, як її максимум, так і графік змінювання за часом.

Для побудови розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь руху застосовується метод продовження розв'язку за параметром [5]. При дослідженні еволюції усталених періодичних режимів коливань нелінійних механічних систем він використовується в синтезі з методом побудови періодичних розв'язків суттєво нелінійних систем [6]. Ці методи в сукупності є потужним чисельним інструментом розв'язку нелінійних диференціальних рівнянь. Їхнє використання дозволяє знаходити розв'язки крок за кроком для кожного значення параметру, який обраний ведучим, обходячи перехідний процес та скорочуючи час побудови розв'язків рівнянь руху в усталених режимах коливань в десятки разів. При цьому забезпечується можливість достатньо простого розпізнавання зон нестійкості знайдених режимів коливань. Цю методику вдалося застосувати для дослідження динаміки віброударних систем. Алгоритми, які розроблені, забезпечують побудову залежностей напіврозмахів коливань тіл, ударних сил контактної взаємодії та інших динамічних характеристик сильно нелінійних віброударних систем від обраного ведучого параметру, зокрема, інтенсивності зовнішнього навантаження та його частоти. Аналіз стійкості отриманих режимів коливального руху дозволяє знайти зони нестійких рухів, тобто такі зони, де  $T$ -періодичний коливальний рух в дійсності не реалізується ( $T$  – період зовнішнього навантаження), точно визначити точки біфуркації. Теорія та методика застосування розроблених алгоритмів до двомасової віброударної системи з двома ступнями вільності докладно описані в [7 – 11].

### Постановка задачі.

Динамічна поведінка ударної контактної сили досліджується на прикладі двохмасової віброударної системи з двома ступнями вільності, яка складається із основного та приєднаного тіл, що зв'язані між собою лінійними пружними пружинами та демпферами (рис.1). На основне тіло діє періодичне зовнішнє навантаження

$$F(t) = \lambda F_0 \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (1)$$

де  $\lambda$  – параметр його інтенсивності.

Удар моделюється силою контактної взаємодії на основі квазістатичної теорії Герца:

$$F_{con}(z) = K[H(z)z(t)]^{3/2}, \quad K = \frac{4}{3} \frac{q}{(\delta_1 + \delta_2)\sqrt{A+B}},$$

$$\delta_1 = \frac{1 - \mu_1^2}{E_1 \pi}, \quad \delta_2 = \frac{1 - \mu_2^2}{E_2 \pi}, \quad (2)$$

де  $z(t)$  – відносне зближення тіл завдяки місцевій деформації в зоні контакту,  $H(z)$  - ступінчата функція Хевісайда,  $\mu_i$  та  $E_i$  – коефіцієнти Пуассона і модулі Юнга для матеріалів контактуючих тіл,  $A$ ,  $B$  та  $q$  – характеристики місцевої геометрії зони контакту.

Рівняння руху віброударної системи мають вигляд:

$$\ddot{x}_1 = -2\xi_1\omega_1(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - \omega_1^2(x_1 - x_2 - D) + \frac{1}{m_1}F_{con}(x_2 - x_1),$$

$$\ddot{x}_2 = -2\xi_2\omega_2\dot{x}_2 - \omega_2^2x_2 - 2\xi_1\omega_1\chi(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - \omega_1^2\chi(x_2 - x_1 + D) + \frac{1}{m_2}[F(t) - F_{con}(x_2 - x_1)], \quad (3)$$

де  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k_1}{m_1}}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}}$ ;  $\xi_1 = \frac{c_1}{2m_1\omega_1}$ ,  $\xi_2 = \frac{c_2}{2m_2\omega_2}$ ;  $\chi = \frac{m_2}{m_1}$ ,  $\omega_1, \omega_2$  - парціальні частоти,  $F_{con}(x_2 - x_1)$  – сила контактної взаємодії, яка моделює удар і діє лише під час удару. Вихідні умови задачі такі:

$$x_1(0) = D, x_2(0) = 0, \dot{x}_1(0) = 0, \dot{x}_2(0) = 0.$$

Чисельні параметри віброударної системи приведені [10,11].

### Аналіз динамічної поведінки ударної сили.

Нелінійні диференціальні рівняння руху (3) інтегруються чисельним методом продовження розв'язку за параметром, котрий застосовується в синтезі з методом побудови періодичних розв'язків суттєво нелінійних систем [6]. Розв'язки, які крок за кроком знаходяться для кожного зна-

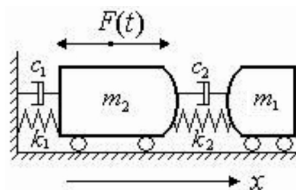


Рис. 1. Розрахункова схема віброударної системи

чення ведучого параметра, забезпечують побудову залежностей сил контактної взаємодії від цього параметра, зокрема, від інтенсивності зовнішнього навантаження та його частоти. Зони стійкого та нестійкого  $T$ -періодичного руху визначаються за значеннями мультиплікаторів – власних чисел матриці монодромії. В момент втрати стійкості хоча б один з мультиплікаторів виходить за рамки одиничного кола. При відшукуванні періодичних розв'язків нелінійних диференціальних рівнянь руху віброударної системи методом продовження за параметром матриця монодромії збігається з матрицею лінеаризованої алгебраїчної системи, що побудована для знаходження приростів вихідних значень змінних. Тому обчислення значень мультиплікаторів та розшук зон нестійкості виконується достатньо просто. Пряме чисельне інтегрування рівнянь руху підтверджує, що в зонах нестійкого руху в дійсності реалізуються  $nT$ -періодичні багатударні чи неперіодичні, хаотичні режими коливань. Аналіз побудованих залежностей сили контактної взаємодії від параметра інтенсивності зовнішнього навантаження та його частоти виконаний в зонах як стійких коливальних режимів, так і нестійких, де в дійсності реалізуються багатударні регулярні та хаотичні режими. Аналізується також вплив параметрів жорсткості віброударної системи на величину максимальної контактної сили та на поведінку контактної сили під час удару.

Залежність максимальної величини контактної сили від параметра інтенсивності зовнішнього навантаження  $\lambda$  представлена на рис. 2.

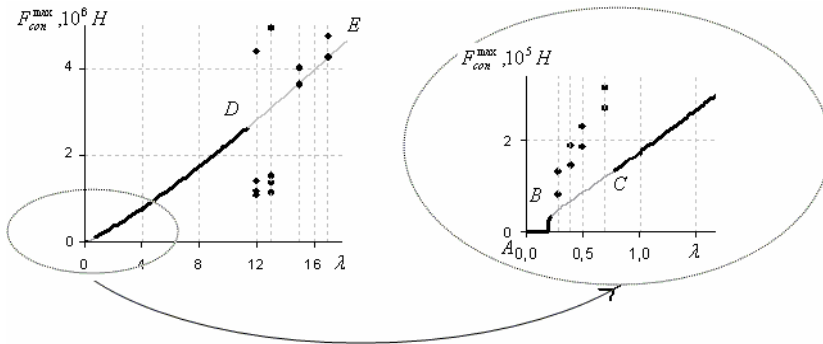


Рис. 2. Залежність максимальної величини контактної сили від інтенсивності зовнішнього навантаження

В зонах нестійкості  $T$ -періодичного руху (ділянки кривої  $BC, DE$ ) реалізуються  $nT$ -періодичні багатударні режими, зокрема  $4T$ -періодичний 4-х ударний ((4,4)-періодичний) і  $5T$ -періодичний 2-х ударний ((5,2)-періодичний), при малому зовнішньому навантаженні (ділянка кривої

*AB*) рух  $T$ -періодичний безударний. В  $k$ -ударному режимі за цикл стає  $k$  співударів, в кожному з них діє контактна сила. На рис. 2 значення їхніх максимумів показані точками при таких значеннях  $\lambda$ , де розв'язки рівнянь руху отримані прямим чисельним інтегруванням методом Рунге-Кутта 4-го порядку. С ростом інтенсивності навантаження сила контактної взаємодії збільшується, характер коливального руху змінюється. В багатударних режимах контактна сила збільшується в порівнянні з одноударним.

Залежність максимальної величини контактної сили від частоти зовнішнього навантаження  $\omega$  приведена на рис. 3.

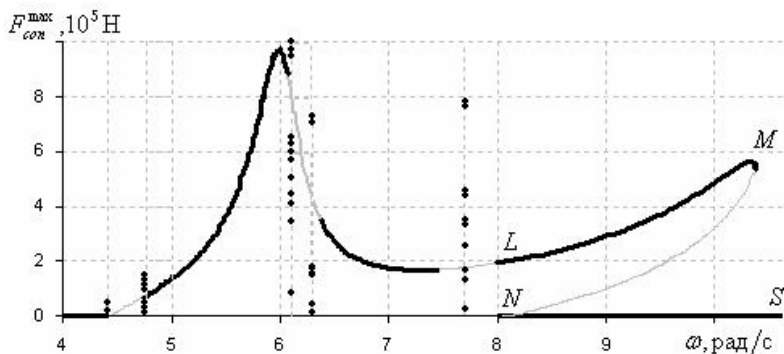


Рис. 3 Залежність максимальної величини контактної сили від частоти зовнішнього навантаження.

В зоні резонансу (парціальні частоти  $\omega_1 = 4,73 \text{ рад/с}$ ,  $\omega_2 = 6,28 \text{ рад/с}$ ) контактна сила різко зростає. В зонах нестійкого руху значення максимумів контактної сили показані точками при тих значеннях  $\omega$ , де розв'язки рівнянь руху були отримані прямим чисельним інтегруванням. З рисунка видно, що при зміні частоти палітра зон нестійкого коливального руху достатньо різноманітна. В усіх цих зонах реалізуються  $nT$ -періодичні багатударні чи неперіодичні режими коливальних систем, контактна сила в таких режимах зростає. Особливо цікавий діапазон частот  $8,0 \text{ рад/с} \leq \omega \leq 10,39 \text{ рад/с}$ . На рис. 3 бачимо, що тут існують три різні гілки кривої. Дві гілки відповідають стійким режимам: гілка  $LM$  – одноударному, а гілка  $SN$  – безударному, а третя гілка  $MN$  – нестійкому стану віброударної системи. Наявність трьох різних режимів в цьому діапазоні частот наочно демонструє залежність динамічного стану сильно нелінійної системи від її вихідного стану. Отримані ці ділянки кривої наступним чином. При русі вздовж кожної гілки розв'язків в точках біфуркацій нев'язка ставала такою великою, що подальший рух вздовж цієї гілки був неможливим.

Щоб не змінювати ведучого параметра, доводилося не тільки змінювати крок за ведучим параметром, а й обирати інші вихідні умови та продовжувати рух, починаючи з цієї точки. Таким чином бачимо, що в віброударній системі можуть реалізуватися різні стійкі  $T$ -періодичні коливальні стани – одноударний та безударний – і який з них реалізується в дійсності, залежить від вихідних умов, тобто від того стану, в якому знаходилася віброударна система перед тим, як вона продовжила коливатися при незначній зміні частоти зовнішнього навантаження [10,11].

Подивимось зараз, як впливають характеристики жорсткості тіл, що співударяються, на контактну силу. Характеристики жорсткості відносяться до важливіших параметрів віброударної системи, саме жорсткість визначає тривалість удару, міру його «м'якості». Залежність максимальної величини контактної сили від жорсткості сполучної пружини представлена на рис. 4.

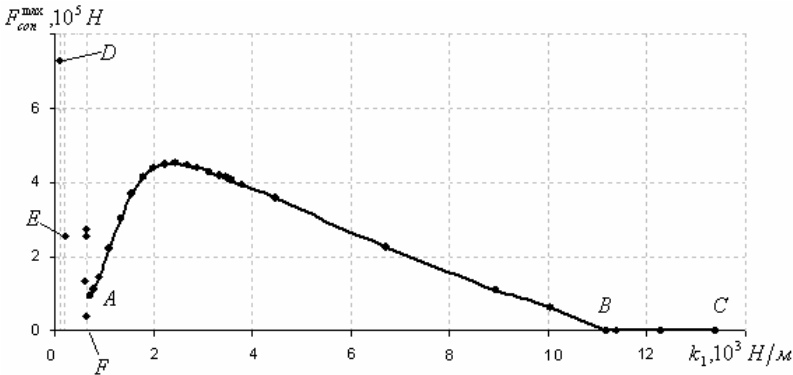


Рис. 4. Залежність максимальної величини контактної сили від жорсткості пружини

При малій жорсткості  $T$ -періодичний режим втрачає стійкість і замінюється  $nT$ -періодичними багатударними ( $n, k$ -періодичними). Для наочності сприймання на рис. 5-8 докладно наведені характеристики цих режимів: переміщення і фазові траєкторії обох тіл та графік зміни контактної сили в часі. Максимальне значення контактної сили з рис. 5 відповідає точці  $D$  на рис. 4, з рис. 6 – точці  $E$ , з рис. 7 – точкам на вертикалі  $F$ .

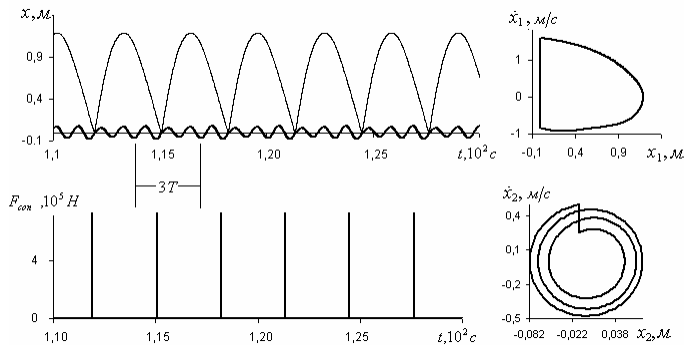


Рис. 5 Характеристики (3,1)-періодичного режиму коливань ( $k_1 = 111,72 \text{ H/М}$ )

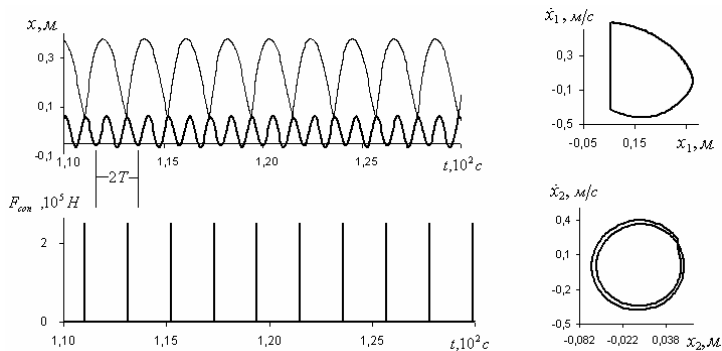


Рис. 6. Характеристики (2,1)-періодичного режиму коливань ( $k_1 = 223,45 \text{ H/М}$ )

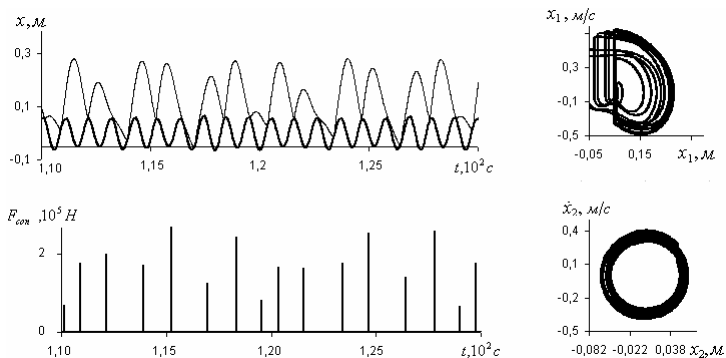


Рис. 7. Характеристики (n,k)-періодичного режиму коливань ( $k_1 = 670,34 \text{ H/М}$ )

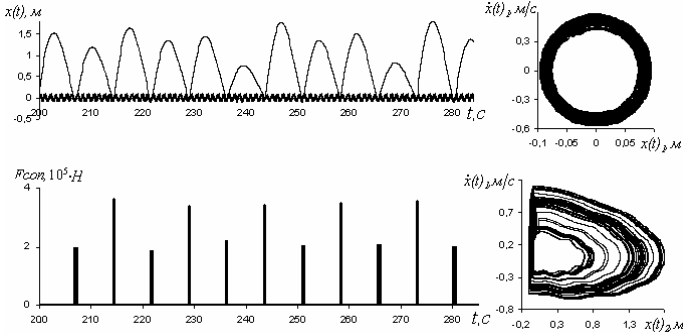


Рис. 8. Характеристики хаотичного режиму коливань ( $k_1 = 22,3 \text{ Н/м}$ )

В одноударному  $T$ -періодичному режимі контактна сила має найбільше значення при деякій жорсткості сполучної пружини ( $k_1 = 2234 \text{ Н/м}$ ), при інших значеннях жорсткості вона зменшується. При збільшенні жорсткості (ділянка кривої  $BC$  на рис. 4) режим коливань стає безударним. Це логічно: жорсткість пружини настільки велика, що задана зовнішня сила не забезпечує співударання тіл.

На рис. 9 в великому масштабі часу зображені графіки контактної сили за один удар при різних значеннях жорсткості сполучної пружини. За початок відліку часової осі приймається момент початку удару в різних чисельних експериментах.

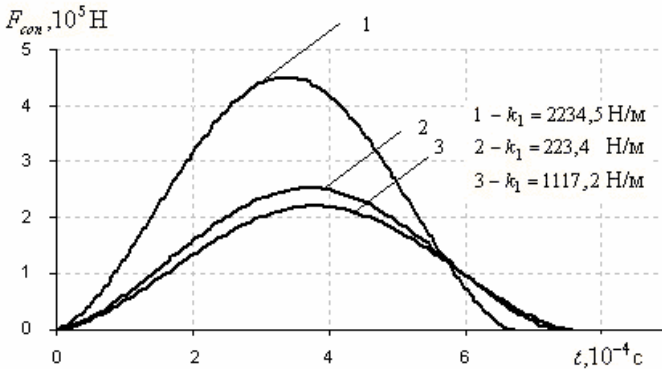


Рис. 9. Графіки контактної сили при різних значеннях жорсткості пружини  $k_1$



Значно впливають на величину максимальної контактної сили величини модулів пружності матеріалів контактуючих тіл. Ми прийняли, що матеріал обох тіл однаковий, тобто  $E_1 = E_2$ . В таблиці 1 приведені значення максимальної контактної сили для чотирьох різних матеріалів. Відмітимо цікавий результат – модуль пружності каучуку в 26000 разів менше, ніж сталі, контактна сила менше в 70 разів, при цьому напіврозмах основного тіла зменшився тільки в 1,24 рази!

Таблиця 1

| Матеріал                             | Сталь | Мідь | Алюміній | Каучук  |
|--------------------------------------|-------|------|----------|---------|
| Модуль Юнга, $10^{11} \text{ H/m}^2$ | 2,10  | 1,11 | 0,69     | 0,00008 |
| $F_{con}^{max}, 10^5 \text{ H}$      | 4,51  | 3,49 | 2,89     | 0,065   |

### Ударна контактна сила в віброударній системі з м'яким ударом.

Для узагальнення картини розглянемо динамічну поведінку ударної контактної сили в іншій моделі віброударної системи (рис. 10).

Ця модель відповідає розрахунковій схемі віброударного майданчика, що широко використовується в будівельному виробництві для ущільнення бетонних сумішей та формування бетонних виробів. Вона докладно описана в [12,13], там же приведені її чисельні параметри і параметри зовнішнього навантаження та рівняння руху. Коротко скажемо: на стіл майданчика масою  $m_1$  діє періодичне зовнішнє навантаження вигляду (1) від двигунів, що встановлені під ним. До столу прикріплена гумова прокладка, на якій без кріплення лежить форма з бетоном величезної маси  $m_2$ . Коли двигуни працюють, стіл здійснює коливальний рух вздовж осі  $y$  і підкидає форму з бетоном. Вона відривається від столу, а потім падає на прокладку, діється удар, форма відскакує знову і т.д. Як бачимо, ця модель має суттєві особливості та відмінності від попередньої, а саме: величезну масу верхнього тіла, його відрив від нижнього, м'якість, піддатливість гумової прокладки (в порівнянні зі сталюю формою, а також значно більшу частоту зовнішньої сили ( $\omega = 157 \text{ рад/с}$ ), ніж в попередньої моделі ( $\omega = 7,23 \text{ рад/с}$ )).

Удар моделюється силою контактної взаємодії на базі квазістатичної теорії Герца (2), що, як і раніше, забезпечує отримання законів руху тіл

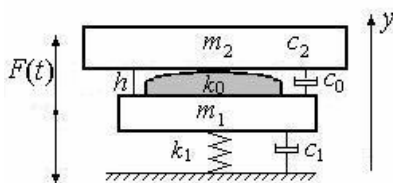


Рис. 10. Розрахункова схема моделі з м'яким ударом

віброударної системи на всій часовій осі, включаючи період удару, дає можливість одержати величину максимальної контактної сили та закон її зміни в часі, обчислити тривалість удару.

Розв'язки рівнянь руху та характеристики контактної сили отримані прямим чисельним інтегруванням методом Рунге-Кутта 4-го порядку в окремих точках.

Залежність максимальної величини контактної ударної сили від інтенсивності зовнішнього навантаження  $\lambda$  представлена на рис. 11.

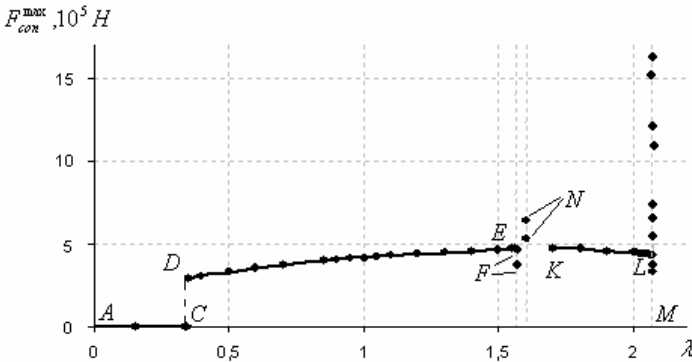


Рис. 11. Залежність максимального значення контактної сили від інтенсивності зовнішнього навантаження для моделі з м'яким ударом

При малому зовнішньому навантаженні (ділянка кривої  $AC$ ) рух безударний – зовнішня сила недостатня, щоб відірвати форму від прокладки, і тіла рухаються спільно. Зі збільшенням зовнішньої сили режим стає одноударним  $T$ -періодичним, характеристики якого при  $\lambda = 1,05$  для наочності приведені на рис. 12. Тонкою лінією тут і далі на графіках сили показана зовнішня періодична сила. Тривалість дії контактної сили, тобто тривалість удару, в порівнянні з її періодом дуже значна (на графіку контактна сила має вигляд дзвона, а не «ціпка» при кожному ударі). Такий удар вважається м'яким, і ми вважаємо модель віброударного майданчика моделлю з м'яким ударом.

З подальшим зростанням зовнішнього навантаження характер коливального руху змінюється, він стає  $nT$ -періодичними багатударними ( $n, k$ -періодичними). Ударна контактна сила в таких режимах, як правило, збільшується, інколи значно збільшується. Для кращого уявлення на рис. 13–15 представлені характеристики деяких з них. Максимальне значення контактної сили з рис. 13 відповідає точці  $N$  на рис. 11, з рис. 14 – точці  $L$ , з рис. 15 – точкам на вертикалі  $M$ , де показані величини ударних сил при хаотичному русі.

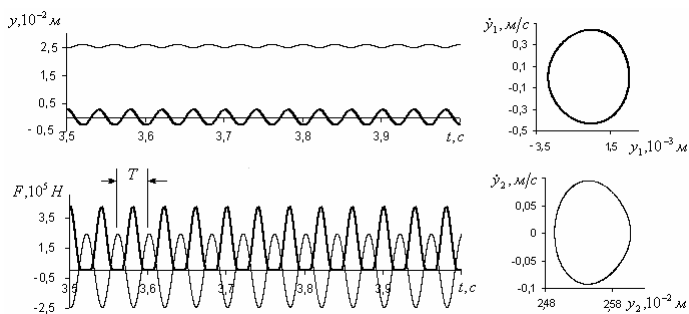


Рис. 12. Характеристики (1,1)--періодичного режиму коливань системи з м'яким ударом ( $\lambda=1,05$ )

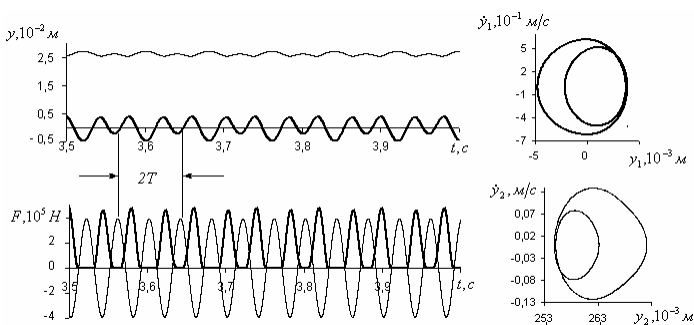


Рис. 13. Характеристики (2,2)--періодичного режиму коливань системи з м'яким ударом ( $\lambda=1,6$ )

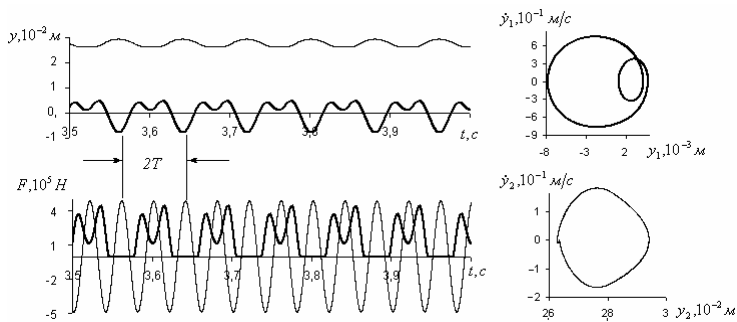


Рис. 14. Характеристики (2,1)--періодичного режиму коливань системи з м'яким ударом ( $\lambda=2$ )

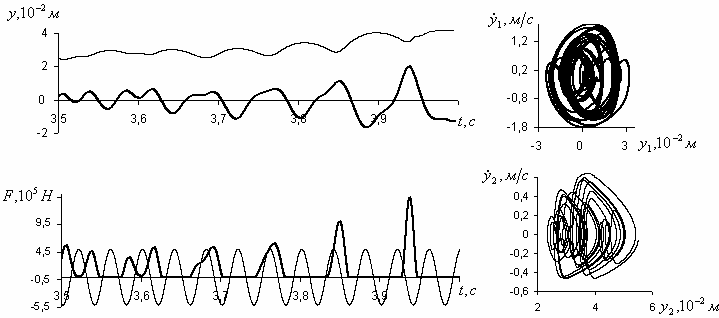


Рис. 15. Характеристики хаотичного режиму коливань системи с м'яким ударом ( $\lambda=2,07$ )

Залежність максимальної величини контактної ударної сили від частоти зовнішнього навантаження представлена на рис. 16. При малій частоті режим коливань хаотичний, контактна сила показана точками на вертикалі *A*, вона досягає великих значень. При великій частоті відрив відсутній, удару немає.

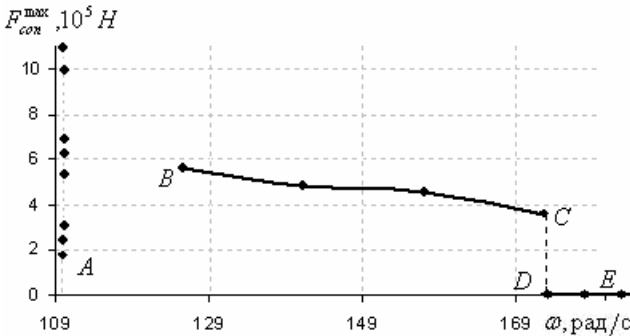


Рис. 16. Залежність максимального значення контактної сили від частоти зовнішнього навантаження для моделі з м'яким ударом

Залежність максимальної величини контактної ударної сили від жорсткості прокладки зображена на рис. 17.

При малій жорсткості відрив відсутній, стіл та форма рухаються спільно. При збільшенні жорсткості встановлюється одноударний *T*-періодичний режим, в якому величина ударної сили не змінюється при деякій зміні жорсткості. Але в деяких діапазонах значень жорсткості виникає *3T*-періодичний 2-х ударний ((3,2)-періодичний) режим, що показав

ний на рис. 18. Величина ударної сили в цьому режимі значно перевищує її величину в (1,1)-періодичному.

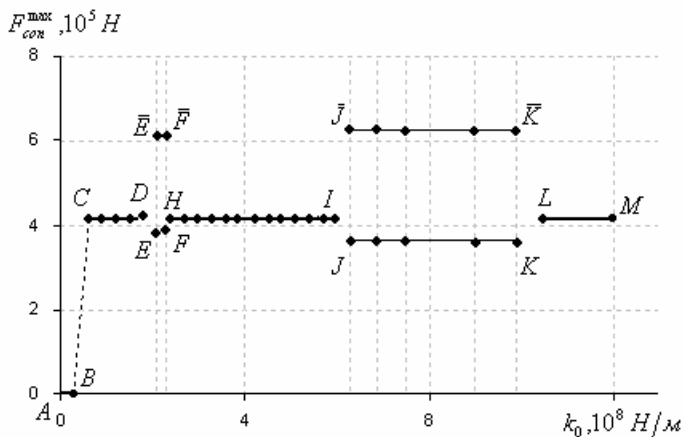


Рис. 17. Залежність максимального значення контактної сили від жорсткості прокладки для моделі з м'яким ударом

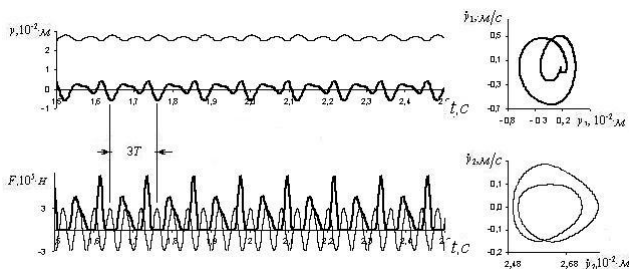


Рис. 18 Характеристики (3,2)-періодичного руху системи з м'яким ударом  
( $k_0 = 6,3 \cdot 10^8 \text{ H/M}$ )

Величина модуля пружності матеріалу прокладки як одна з характеристик жорсткості також сильно впливає на режим коливань віброударного майданчика та на величину ударної контактної сили. Форма з бетоном вважається сталюю, модуль пружності сталі  $E = 2 \cdot 10^{11} \text{ H/M}^2$ , прокладка гумова. В деякому діапазоні значень модуля пружності матеріалу прокладки (1,1)-періодичний режим змінюється (3,2)-періодичним, при цьому ударна контактна сила приймає значення, які приведені в таблицях 2 та 3.

Таблиця 2

| Режим коливань (1,1)-періодичний              |      |      |      |      |      |      |      |      |
|---|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Модуль Юнга прокладки, $10^8 \text{ Н/м}^2$   | 3,0  | 4,0  | 4,3  | 4,35 | 5,7  | 6,0  | 7,0  | 8,0  |
| $F_{\text{кон}}^{\text{max}}, 10^5 \text{ Н}$ | 4,15 | 4,72 | 4,86 | 4,89 | 5,47 | 5,59 | 5,95 | 6,28 |

Таблиця 3

| Режим коливань (3,2)-періодичний (2 удари за цикл) |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|--|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Модуль Юнга прокладки, $10^8 \text{ Н/м}^2$        | 4,4  | 4,5  | 5,0  | 5,1  | 5,2  | 5,5  | 5,6  | 5,65 | 5,68 |
| $F_{\text{кон}}^{\text{max}}, 10^5 \text{ Н}$      | 7,46 | 7,90 | 7,53 | 7,97 | 8,03 | 8,24 | 8,31 | 8,34 | 8,35 |
|  | 5,11 | 5,18 | 5,60 | 5,70 | 5,78 | 6,00 | 6,05 | 6,13 | 6,14 |

Для наочності на рис. 19 приведені графіки контактної ударної сили в цих режимах коливань.

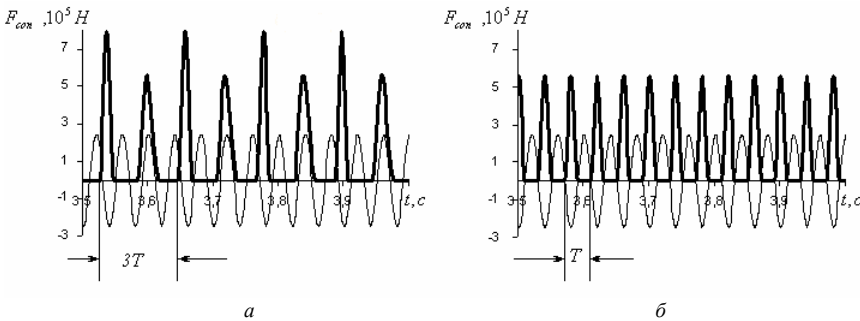


Рис. 19 Характеристики (3,2)-періодичного при  $E = 5 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$  (а) та (1,1)-періодичного при  $E = 6 \cdot 10^8 \text{ Н/м}^2$  (б) руху системи з м'яким ударом

### Висновок.

В роботі виконаний аналіз динамічної поведінки однієї з важливіших характеристик віброударного руху, а саме ударної контактної сили. Показана її залежність від параметрів зовнішнього періодичного навантаження та від характеристик жорсткості самої віброударної системи. Характерно, що при зміні  $T$ -періодичного одноударного режиму коливань на  $nT$ -періодичні багатударні та хаотичні максимальна контактна сила, як правило, збільшується, інколи значно збільшується.

Для дослідження поведінки ударної сили в двохмасовій віброударній системі з двома ступнями вільності використаний потужний чисельний інструмент методу продовження розв'язку за параметром, який застосовується в синтезі з методом побудови періодичних розв'язків суттєво нелінійних систем та моделюванням удару нелінійною силою контактної взаємодії на базі квазістатичної теорії Герца. Застосування цієї методики забезпечує побудову залежностей будь-яких динамічних характеристик сильно нелінійних віброударних систем, зокрема, ударних сил контактної взаємодії, від обраного ведучого параметра при значному скороченні обчислювального процесу. Розроблені алгоритми також дають можливість достатньо просто виконати аналіз стійкості віброударного руху та визначити зони нестійкого руху.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Иванов А.П.* Динамика систем с механическими соударениями. – М.: Междунар. прогр. образования, 1997. – 336 с.
2. *Ibrahim R.J.* Vibro-Impact Dynamics: Modeling, Mapping and Applications // Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg. 2009. № 43. – P.31–54.
3. *Foale S., Bishop S.R.* Bifurcations in impact oscillations //Nonlinear Dynamics. – 1994. – Т. 6. – №. 3. – С. 285–299.
4. *Гольдсмит В.* Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел.– М.:Стройиздат, 1965. –448 с.
5. *Шалашилин В.И., Кузнецов Е.Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация в прикладной математике и механике. – М. : Эдиториал УРСС, 1999. – 224 с.
6. *Гуляев В.И., Баженов В.А., Дехтярюк Е.С., Гоцуляк Е.А., Лизунов П.П.* Устойчивость периодических режимов колебаний в нелинейных механических системах. – Вища школа. – Львов, 1983. – 286 с.
7. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.* Розвиток методу продовження за параметром для віброударних систем при моделюванні удару силою контактної взаємодії.// Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник – К.:КНУБА. 2011.-Вип. 87. – С. 63–73.
8. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.* Реалізація методу продовження за параметром для віброударних систем при побудові кривих навантаження. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник – К.:КНУБА. 2011. – Вип. 88. – К.: КНУБА, 2011. – С. 56–64.
9. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.* Теоретичні основи аналізу динамічної поведінки віброударних систем. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник – К.:КНУБА. 2012. – Вип. 89. – К.: КНУБА, 2012. – С.39–49.
10. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постнікова Т.Г.* Застосування методу продовження розв'язку за параметром до аналізу динамічної поведінки віброударної системи. // Опір матеріалів і теорія споруд: Наук.-техн.збірник - К.:КНУБА. 2012. –Вип. 90. – К.: КНУБА, 2012. – С.16–30.

11. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г.* Анализ динамического поведения виброударных систем разных типов. – LAP LAMBERT Academic Publ. GmbH & Co. KG Dudweiler, Germany, 2013. – 132 с.
12. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г., Гончаренко С.Н.* Сравнительный анализ способов моделирования контактного взаимодействия в виброударных системах. // Пробл. прочности. – 2009. – №4. – С. 69–77.
13. *Баженов В.А., Погорелова О.С., Постникова Т.Г.* Влияние конструктивных параметров виброударной системы на ее динамику. // Пробл. прочности. – 2011. - №1. – С. 122-133.

*Стаття надійшла до редакції 02.05.2013 р.*

*Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.*

### **УДАРНЫЕ СИЛЫ В ВИБРОУДАРНЫХ СИСТЕМАХ**

В статье представлен анализ динамического поведения ударных контактных сил в двухмассовых виброударных системах с двумя степенями свободы в зависимости от параметров внешней периодической нагрузки и характеристик жесткости самих систем. Показано, что при замене  $T$ -периодического одноударного режима колебаний  $nT$ -периодическими многоударными ( $T$  – период внешней нагрузки) величина ударной силы, как правило, увеличивается, иногда значительно увеличивается. Анализ выполнен методом продолжения решения по параметру, который применяется в синтезе с методом построения периодических решений существенно нелинейных систем и моделированием удара нелинейной силой контактного взаимодействия на базе квазистатической теории Герца, что в совокупности является мощным численным инструментом для исследования динамики виброударных систем.

*Bazhenov V.A., Pogorelova O.S., Postnikova T.G.*

### **IMPACT FORCES IN VIBROIMPACT SYSTEMS**

Analysis of impact contact forces dynamic behaviour is presented in this article. We examine two-mass two-degree-of-freedom vibroimpact systems. Forces behaviour is examined as dependence from external periodical loading parameters and hardness system characteristics. It is shown that the impact force increases when  $T$ -periodical one-impact regime changes by  $nT$ -periodical regimes with many impacts during the cycle. Sometimes this increase is considerable. Analysis is fulfilled by parameter continuation method which is used in synthesis with method of periodical solutions creation for essentially nonlinear systems and with impact simulation by nonlinear contact interactive force based at quasistatic Hertz's theory. These methods in totality give powerful numerical instrument for vibroimpact systems dynamic investigation.