

УДК 539.3

П.П. Лізунов, д-р техн. наук

ПРУЖНА РІВНОВАГА СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ В ЦЕНТРАЛЬНОМУ СИЛОВОМУ ПОЛІ

Отримані співвідношення, які описують напружено-деформований стан безмоментної сферичної оболонки, що рухається за круговою траєкторією в центральному силовому полі.

Розглянемо задачу про напружено-деформований стан безмоментної сферичної оболонки, що є частиною споруди, центр мас якої рухається за круговою траєкторією в центральному силовому полі. Введемо наступні праві прямокутні системи координат: $O_a X_a Y_a Z_a$ – абсолютну систему координат з початком в центрі гравітації; $OXYZ$ – орбітальну систему координат, вісь OZ якої є продовженням радіуса-вектора $\vec{\rho}_{(o)}$, проведеного з гравітаційного центру O_a в центр мас споруди, а вісь OX лежить в площині, що проходить через радіус-вектор $\vec{\rho}_{(o)}$ та вектор швидкості центру мас споруди. Будемо використовувати також систему координат O_{xyz} , осі якої направлені вздовж головних центральних осей інерції споруди. У випадку стаціонарного руху споруди в центральному силовому полі осі OZ та O_z співпадають. Введемо також криволінійну систему координат $O_1 x_1 x_2 x_3$, пов'язану з недеформованою поверхнею оболонки.

Під час руху в центральному силовому полі на кожний елемент оболонки діє навантаження, що складається з гравітаційних та інерційних сил

$$\vec{q} = \vec{q}^g + \vec{q}^j. \quad (1)$$

Вектор гравітаційного навантаження, що діє на одиничний елемент поверхні оболонки, визначається за формулою

$$\vec{q}^g = -\frac{\gamma \rho h r^{\rightarrow*}}{r^2}, \quad (2)$$

де $\gamma = f M_0$; f – гравітаційна стала; M_0 – маса гравітаційного центру; ρ – щільність матеріалу оболонки; h – її товщина; \vec{r}^* – одиничний вектор, який визначається співвідношенням $\vec{r} = \vec{r} \cdot \vec{r}^*$; \vec{r} – радіус-вектор елемента оболонки в системі координат $O_a X_a Y_a Z_a$; $r = |\vec{r}|$.

Модуль радіуса-вектора \vec{r} визначається формулою [1]

$$r = \left[\rho_{(o)}^2 - 2\rho_{(o)} (R \cos x_1 - e) \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

де R – радіус кривизни оболонки; e – відстань між центром кривизни оболонки і центром мас споруди.

Підставивши (3) в формулу (2), маємо вираз для модуля гравітаційної сили, що діє на одиничний елемент серединної поверхні оболонки

$$q^g = \gamma \rho h [\rho_{(o)}^2 - 2\rho_{(o)}(R \cos x_1 - e)]^{-1}. \quad (4)$$

Складові гравітаційної сили, що діють в напрямі координатних ліній x_1, x_2, x_3 криволінійної системи координат, мають такий вигляд [1]:

$$\begin{aligned} q_{x_1}^g &= -\frac{\gamma \rho h}{\rho_{(o)}^2} \left[1 + \frac{2}{\rho_{(o)}} (R \cos x_1 - e) \right] \sin x_1; \\ q_{x_2}^g &= 0; \\ q_{x_3}^g &= -\frac{\gamma \rho h}{\rho_{(o)}^2} \left[1 + \frac{2}{\rho_{(o)}} (R \cos x_1 - e) \right] \cos x_1. \end{aligned} \quad (5)$$

Вектор інерційного навантаження, діючого на елемент оболонки, визначається за формулою

$$\vec{q}^J = -\rho h \vec{a}, \quad (6)$$

де \vec{a} – вектор абсолютного прискорення елемента оболонки, проекції якого на координатні лінії x_1, x_2, x_3 криволінійної системи координат мають вигляд [1]:

$$\begin{aligned} a_{x_1} &= -\omega_o^2 (\rho_{(o)} + e - R \cos x_1 \sin^2 x_2) \sin x_1; \\ a_{x_2} &= \omega_o^2 R \sin x_1 \sin x_2 \cos x_2; \\ a_{x_3} &= -\omega_o^2 \left[\rho_{(o)} + e - R (\sin^2 x_1 \cos x_2 + \cos x_1) \cos x_2 \right]. \end{aligned} \quad (7)$$

З урахуванням співвідношень (7) отримуємо проекції вектора інерційного навантаження, діючого на елемент оболонки в напрямі координатних ліній x_1, x_2, x_3 :

$$\begin{aligned} q_{x_1}^J &= \rho h \omega_o^2 (\rho_{(o)} + e - R \cos x_1 \sin^2 x_2) \sin x_1; \\ q_{x_2}^J &= -\rho h \omega_o^2 R \sin x_1 \sin x_2 \cos x_2; \\ q_{x_3}^J &= \rho h \omega_o^2 [\rho_{(o)} + e - R (\sin^2 x_1 \cos x_2 + \cos x_1)] \cos x_2. \end{aligned} \quad (8)$$

Додаючи відповідні праві частини виразів (5) і (8), з урахуванням умови $\gamma/\rho_{(o)}^3 = \omega_o^2$ рівноваги гравітаційних та інерційних навантажень в центрі мас споруди, отримуємо складові вектора повного навантаження, що діє на елемент оболонки вздовж координатних ліній x_1, x_2, x_3 :

$$q_{x_1} = \rho h \omega_o^2 [3(e - R \cos x_1) + R \cos x_1 \cos^2 x_2] \sin x_1;$$

$$q_{x_2} = -\rho h \omega_o^2 R \sin x_1 \sin x_2 \cos x_2;$$

$$q_{x_3} = \rho h \omega_o^2 [(e - R \cos x_1)(2 \cos x_1 + \cos x_2) - R \sin^2 x_1 \cos^2 x_2]. \quad (9)$$

Диференціальні рівняння руху безмоментної сферичної оболонки мають вигляд [1, 2]

$$\frac{1}{\sin x_2} \frac{\partial N_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial x_2} + 2N_{12} \operatorname{ctg} x_2 + Rq_{x_1} = 0,$$

$$\frac{1}{\sin x_2} \frac{\partial N_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial x_2} + (N_{22} - N_{11}) \operatorname{ctg} x_2 + Rq_{x_2} = 0,$$

$$-N_{11} - N_{22} + Rq_{x_3} = 0, \quad (10)$$

де N_{11} , N_{22} , N_{12} – зусилля в серединній поверхні оболонки, які визначаються наступними формулами:

$$N_{11} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{11} + \nu \varepsilon_{22});$$

$$N_{22} = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{22} + \nu \varepsilon_{11});$$

$$N_{12} = \frac{Eh}{2(1+\nu)} \varepsilon_{12}, \quad (11)$$

де ε_{11} , ε_{22} , ε_{12} – компоненти тензора деформацій, які виражаються через складові вектора переміщень елемента оболонки u , v , w вздовж координатних ліній x_1 , x_2 , x_3 таким чином:

$$\varepsilon_{11} = \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin x_2} \frac{\partial u}{\partial x_1} + v \operatorname{ctg} x_2 + w \right);$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} + w \right);$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial x_2} - u \operatorname{ctg} x_2 + \frac{1}{\sin x_2} \frac{\partial v}{\partial x_1} \right); \quad (12)$$

E – модуль пружності матеріала оболонки; ν – коефіцієнт Пуассона.

Система диференціальних рівнянь, що описують пружну рівновагу безмоментної сферичної оболонки в центральному силовому полі, з урахуванням виразів (9) – (12), має вигляд:

$$\frac{E}{R^2(1-\nu^2)} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - (1+\nu) \frac{\partial w}{\partial x_1} + \frac{1+\nu}{2 \sin x_1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_1 \partial x_2} + \operatorname{ctg} x_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\nu-3}{2} \frac{\operatorname{ctg} x_1}{\sin x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} - (\nu + \operatorname{ctg}^2 x_1) u + \frac{1-\nu}{2 \sin^2 x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \right] =$$

$$\begin{aligned}
&= \rho \omega_0^2 \left[3(R \cos x_1 - e) - R \cos x_1 \cos^2 x_2 \right] \sin x_1, \\
&\frac{E}{R^2(1-\nu^2)} \left[\frac{1+\nu}{2 \sin x_1} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} + \operatorname{ctg} x_1 \frac{\partial v}{\partial x_1} \right) + \frac{1}{\sin^2 x_1} \frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2} + \right. \\
&\left. + \frac{3-\nu}{2} \frac{\operatorname{ctg} x_1}{\sin x_1} \frac{\partial u}{\partial x_2} - \frac{1+\nu}{\sin x_1} \frac{\partial w}{\partial x_2} + \frac{(1-\nu)(1-2 \cos^2 x_1)}{2 \sin^2 x_1} v \right] = \rho \omega_0^2 R \sin x_1 \sin x_2 \cos x_2, \\
&\frac{E}{R^2(1-\nu^2)} \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial x_1} + v \left(\frac{1}{\sin x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} + u \operatorname{ctg} x_1 \right) - \right. \right. \\
&- (1+\nu) w \left. \right] \left[1 + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \right] + \left[v \frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{1}{\sin x_1} \frac{\partial v}{\partial x_2} + u \operatorname{ctg} x_1 - \right. \\
&\left. \left. - (1+\nu) w \right] \left[1 + \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin^2 x_1} \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + \operatorname{ctg} x_1 \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) \right] \right\} = \\
&= \rho \omega_0^2 \left[(R \cos x_1 - e)(2 \cos x_1 + \cos x_2) + R \sin^2 x_1 \cos^2 x_2 \right]. \quad (13)
\end{aligned}$$

Інтегруючи рівняння (13), можна визначати внутрішні зусилля розтягу, які підтримують задану форму сферичної оболонки, що рухається за круговою траєкторією в центральному силовому полі.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Гуляев В.И., Лизунов П.П. Колебания систем твердых и деформируемых тел при сложном движении. – К.: Вища школа, 1989. –199 с.
2. Вольмир А.С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. – М.: Наука, 1972. –314 с.

Стаття надійшла до редакції 10.06.2013 р.

Лизунов П.П.

УПРУГОЕ РАВНОВЕСИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ЦЕНТРАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Получены соотношения, описывающие напряженно-деформированное состояние безмоментной сферической оболочки, движущейся по круговой траектории в центральном силовом поле.

Lizunov P.

EQUILIBRIUM ELASTIC SPHERICAL SHELL IN A CENTRAL FORCE FIELD

These ratios, which describe the stress-strain state moment free spherical shell that moves on a circular path in a central force field.