

УДК 539.3

Д.В. Левківський

## ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ ПЛАСТИНИ МЕТОДОМ ПРЯМИХ З ВИКОРИСТАННЯМ РЯДІВ ФУР'Є

В статті розглядається плоска деформація товстої пластини. Для зниження вимірності вихідних диференціальних рівнянь використовується метод прямих у поєднанні з методом Бубнова-Гальоркіна-Петрова. При шарнірному закріпленні по торцевих площинах  $x=0$ ,  $x=l$  можливе використання рядів Фур'є по координаті  $x$ . Це зводить вихідну систему редукованих диференціальних рівнянь до системи алгебраїчних рівнянь.

Розглядається плоска деформація пластини, кожна точка торцевої поверхні при  $x=0$ , та  $x=l$  закріплена вертикальними в'язями. Оскільки навантаження діє вздовж осі  $y$ , таку систему можна вважати геометрично незмінюваною (рис. 1).

Використовуючи рівняння узагальненого закону Гука та рівняння рівноваги, отримаємо систему вихідних диференціальних рівнянь в частинних похідних, що описують напружено-деформований стан розрахункової моделі (1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u^*(x, y)}{\partial x} = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial v^*(x, y)}{\partial y} + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \sigma_x(x, y) \\ \frac{\partial v^*(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial u^*(x, y)}{\partial y} + \tau_{xy}(x, y) \\ \frac{\partial \sigma_x(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial \tau_{xy}(x, y)}{\partial y} - X(x, y) \\ \frac{\partial \tau_{xy}(x, y)}{\partial x} = -\frac{\partial \sigma_x(x, y)}{\partial y} - Y(x, y) \\ \sigma_y(x, y) = \frac{\lambda}{\mu} \frac{\partial u^*(x, y)}{\partial x} + \frac{\lambda + 2\mu}{\mu} \frac{\partial v^*(x, y)}{\partial y}, \end{array} \right. \quad (1)$$

де  $u^*(x, y) = u(x, y) \cdot \mu$ ,  $v^*(x, y) = v(x, y) \cdot \mu$  - компоненти вектора переміщень;  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\tau_{xy}(x, y)$ ,  $\sigma_y(x, y)$  - компоненти вектора напружень;  $X(x, y)$ ,  $Y(x, y)$  - об'ємні навантаження;  $\lambda$ ,  $\mu$  - коефіцієнти Ляме.

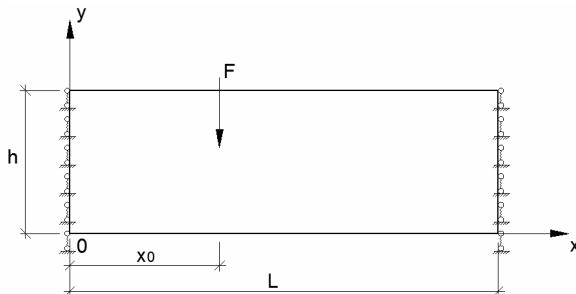


Рис. 1. Розрахункова модель – товста пластина (плоска деформація)

Для зниження вимірності диференціальних рівнянь (1), використовується метод прямих. По координаті  $y$  пластина розбивається на  $(n-1)$  ділянок за допомогою  $n$  прямих. По поперечній координаті обираємо локальні базисні функції  $\varphi_i(y)$  (рис. 2). Дана система базисних функцій косокутна, лінійна незалежність забезпечується локальністю.

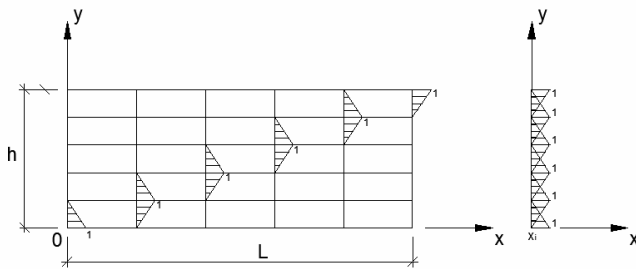


Рис. 2. Локальні базисні функції

Використовуючи метод Бубнова-Гальоркіна-Петрова [2], будь-яку функцію  $f(x, y)$  можна представити у вигляді лінійної комбінації (2), індексна форма запису та операції над індексами детально описані у статті [1]:

$$f(x, y) = f^k(x) \cdot \varphi_k(y). \quad (2)$$

Отже, домножуючи систему (1) на  $\varphi_i(y)$  та інтегруючи по  $y$ , ми отримаємо систему редукованих диференціальних рівнянь (3):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_i^*(x)}{\partial x} = -\frac{\lambda}{\lambda+2\mu} b_{ij} g^{j\alpha} v_\alpha^*(x) + \frac{\mu}{\lambda+2\mu} \delta_i^\alpha \sigma_{x\alpha}(x) \\ \frac{\partial v_i^*(x)}{\partial x} = -b_{ij} g^{j\alpha} u_\alpha^*(x) + \delta_i^\alpha \tau_{xy\alpha}(x) \\ \frac{\partial \sigma_{xi}(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \tau_{xy}^1(x) \\ 0 \\ 0 \\ -\tau_{xy}^n(x) \\ \sigma_x^1(x) \\ 0 \\ 0 \\ -\sigma_x^n(x) \end{bmatrix} + b_{ji} g^{j\alpha} \tau_{xy\alpha}(x) - \delta_i^\alpha X_\alpha(x) \\ \frac{\partial \tau_{xyi}(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \tau_{xy}^1(x) \\ 0 \\ 0 \\ -\tau_{xy}^n(x) \\ \sigma_x^1(x) \\ 0 \\ 0 \\ -\sigma_x^n(x) \end{bmatrix} + \frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} b_{ji} g^{j\beta} b_{\beta k} g^{k\alpha} v_\alpha^*(x) - \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} b_{ji} g^{j\alpha} \sigma_{x\alpha}(x) - \delta_i^\alpha Y_\alpha(x) \\ \sigma_y^j(x) = \frac{4(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} g^{j\beta} b_{\beta k} g^{k\alpha} v_\alpha^*(x) + \frac{\lambda}{\lambda+2\mu} g^{j\alpha} \sigma_{x\alpha} \end{array} \right. \quad (3)$$

Тут з'являються 3 основні метричні тензори:

$\{g_{ij}\} = (\varphi_i(y), \varphi_j(y))$  - двічі коваріантний метричний тензор;

$\{g^{ij}\} = (\varphi^i(y), \varphi^j(y))$  - двічі контраваріантний метричний тензор;

$\{\delta_i^j\} = (\varphi_i(y), \varphi^j(y))$  - мішаний метричний тензор, символ Кронекера.

Функції системи (3) представлені у вигляді моментів:  $u_i^*(x), v_i^*(x), \sigma_{xi}(x), \tau_{xyi}(x)$ . Для розв'язання даної системи можна використовувати ряди Фур'є, невідомі функції розкладаються в ряд по синусам та косинусам. Оскільки пластина по бічним граням закріплена вертикальними в'язями (рис. 3), то невідомі функції мають вигляд:

$$\begin{aligned} u_i^*(x) &= u_{im}^* \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right), & v_i^*(x) &= v_{im}^* \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right), \\ \tau_{xyi}(x) &= \tau_{xyim} \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{l}\right), & \sigma_{xi}(x) &= \sigma_{xim} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Для даних умов закріплення, навантаження  $X_i(x)$  розкладається в ряд Фур'є за косинусами,  $Y_i(x)$  - за синусами.

Оскільки навантаження представлено у вигляді вертикальної зосередженої сили, то функція  $Y(x, y)$  при  $x = x_0, y = y_0$  набуває певного значення  $F$ , у всіх інших точках - 0. Для моделювання роботи сили використовується дельта функція Дірака двох змінних  $\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$ . Основна властивість дельта функції:

$$\int_0^h f(y) \delta(y-y_0) dy = f(y_0).$$

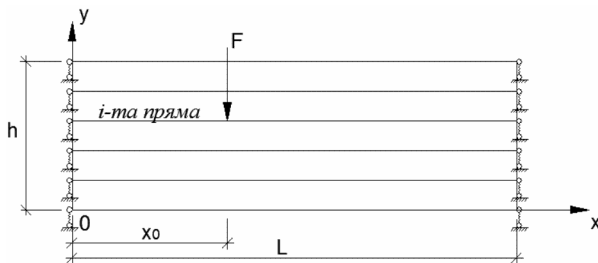


Рис. 3. Шарнірно закріплена пластина

Для даних умов закріплення, навантаження  $X_i(x)$  розкладається в ряд Фур'є за косинусами,  $Y_i(x)$  - за синусами.

Оскільки навантаження представлено у вигляді вертикальної зосередженої сили, то функція  $Y(x, y)$  при  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  набуває певного значення  $F$ , у всіх інших точках - 0. Для моделювання роботи сили використовується дельта функція Дірака двох змінних  $\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)$ . Основна властивість дельта функції:

$$\int_0^h f(y)\delta(y-y_0)dy = f(y_0).$$

Домножуючи дельта функцію на  $\phi_i(y)$  та інтегруючи по  $y$ , отримаємо:

$$Y_i(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ F\delta(x-x_0) \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Далі функція розкладається в ряд Фур'є по синусам:

$$F\delta(x-x_0) = \frac{2}{l} \left( \int_0^l F\delta(x-x_0) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) dx \right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right) = F \cdot \sin\left(\frac{m\pi x_0}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{l}\right).$$

Графік такої функції при  $F=1$ ,  $l=1$ , та  $x_0 = 0,5l$ , зображений на рис. 4.

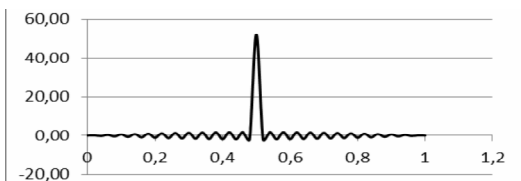


Рис. 4. Апроксимація одиничної сили, прикладеної посередині прольоту пластини

Підставляючи функції (4) в систему (3), отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (5):

$$\begin{cases} \frac{m\pi}{l} u_{\alpha m}^* - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} b_{ij} g^{j\alpha} v_{\alpha m}^* + \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \sigma_{x\alpha m} + 0 \cdot \tau_{xy\alpha} = 0 \\ b_{ij} g^{j\alpha} u_{\alpha m}^* + \frac{m\pi}{l} v_{\alpha m}^* + 0 \cdot \sigma_{x\alpha m} - \tau_{xyim} = 0 \\ 0 \cdot u_{\alpha m}^* + 0 \cdot v_{\alpha m}^* + \frac{m\pi}{l} \sigma_{x\alpha m} - b_{ji} g^{j\alpha} \tau_{xy\alpha m} = X_{\alpha}(x) \\ 0 \cdot u_{\alpha m}^* + \frac{4(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} b_{ji} g^{j\beta} b_{\beta k} g^{k\alpha} v_{\alpha m}^* - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} b_{ji} g^{j\alpha} \sigma_{x\alpha m} + \frac{m\pi}{l} \tau_{xy\alpha m} = Y_{\alpha}(x). \end{cases} \quad (5)$$

Дана система була чисельно розв'язана та в залежності від кількості прямих, гармонік і навантаження, отримуємо матрицю, що відповідає напружено-деформованому стану пластини.

Для перевірки достовірності запропонованого підходу, розглянемо пластину  $l = 1\text{ м}$  та  $x_0 = 0,5\text{ м}$ , навантажену одиничною силою посередині прольоту (рис. 5),  $E = 2,1 \cdot 10^7 \text{ МПа}$ , коефіцієнт Пуассона  $\nu = 0,3$ , візьмемо 5 прямих та  $m = 50$  гармонік.

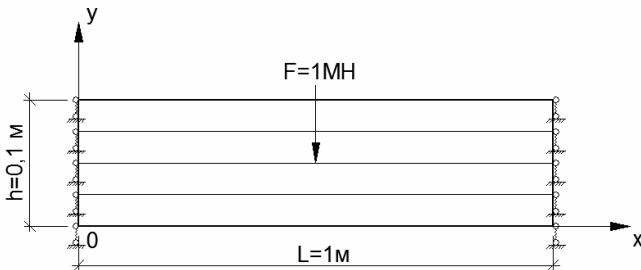


Рис. 5. Розрахункова схема

$$\text{Вектор } X_{\alpha}(x) = 0, Y_{\alpha}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \sin(m\pi 0,5) \cdot \sin(m\pi x) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Вертикальний прогин посередині прольоту на центральній прямій  $v^3 = 1,13 \cdot 10^{(-5)} \text{ м}$ . Оскільки пластина досить тонка, прогин в будь-якій точці можна знайти, використовуючи балочну теорію з циліндричною жорсткістю  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{0,1^3 \cdot 2,1 \cdot 10^7}{12(1-0,09)} = 1923,077 \text{ МНм}$ .

Прогин посередині прольоту балки  $w = 1,08 \cdot 10^{(-5)}$  м. Отримані результати відрізняються на 4% в більшу сторону.

В роботі [1] був розглянутий схожий підхід до розв'язання поставленої задачі, але система (3) в подальшому розв'язувалась чисельно методом дискретної ортогоналізації С.К.Годунова з використанням метода Рунге-Кутта-Мерсона. На графіках (рис. 6, 7) наочно показана збіжність отриманих результатів за двома підходами.



Рис. 6. Графік залежності вертикального переміщення від координати  $x$

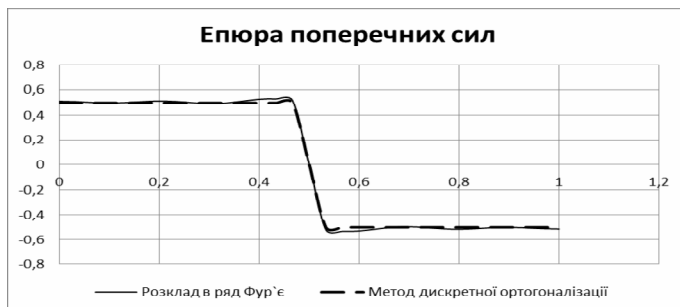


Рис. 7. Графік залежності дотичних напружень від координати  $x$

Дана розрахункова модель є миттєво змінюваною і використовується тільки за умови рівноваги конструкції в горизонтальній площині. Отримані результати показали високу збіжність – до 5%, але при зміні умов закріплення не завжди функція розкладається в ряд Фур'є, тоді потрібно використовувати інші функції, які задовольнятимуть граничним

умовам. Даний підхід можна використовувати для тестування інших методик і програм.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т., Левківський Д.В. До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих// Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 36 – К.: КНУБА, 2010 – с. 413 – 423.
2. С. М. Михлин Вариационные методы в математической физике// Гос-ное из-во технико-теоретической л-ры: М 1957 – 476 с
3. Годунов С.К. О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений// Успехи математических наук. – 1961. – т.16 – вып.3. – с.171 - 174.
4. Жемочкин Б.Н. Теория упругости. – 2-е изд., перераб. – М – 1957, 250 с.
5. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – 3-е изд., перераб. и доп. – М: «Наука»: Главная редакция физико-математической литературы, 1979.-392 с.

*Стаття надійшла до редакції 06.06.2013 р.*

*Левковський Д.В.*

#### **ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИН МЕТОДОМ ПРЯМЫХ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ РЯДОВ ФУРЬЕ**

В статье рассматривается плоская деформация толстой пластины. Для понижения размерности дифференциальных уравнений используется метод прямых совместно с методом Бубнова-Галеркина-Петрова. При шарнирном закреплении по торцевых плоскостях  $x=0$ ,  $x=l$  возможно использование рядов Фурье по координате  $x$ . Это приводит редуцированную систему дифференциальных уравнений до системы алгебраических уравнений.

*Levkivskiy D.V.*

#### **DEFINITION STRESS-STRAIN STATE OF PLATES BY USING LINES OF FOURIER SERIES**

In this paper we consider the planar deformation of the thick plate. To reduce the dimension of differential equations using the method of lines with the Bubnov-Galerkin-Petrov. At the end of simply supported by planes  $x=0$ ,  $x=l$ , you can use Fourier series in the coordinate  $x$ . This causes a reduced system of differential equations to systems of algebraic equations.