

УДК 539.3

О.І. Безверхий¹, д-р фіз.-мат. наук
 В.В. Левченко¹, канд. фіз.-мат. наук
 О.І. Маківський¹

¹Інститут механіки імені С.П. Тимошенка НАН України
 вул. Нестерова, 3, м. Київ, Україна. 03057

ГАРМОНІЧНІ КОЛИВАННЯ П'ЄЗОКЕРАМІЧНОЇ КРУГЛОЇ ПЛАСТИНИ З АЗИМУТАЛЬНИМИ РОЗРІЗАМИ ЕЛЕКТРОДІВ

Виконано дослідження впливу азимутальних розрізів електродного покриття на частоти і форми коливань п'єзоелектричних кільцевих пластин, які поляризовані по товщині.

Ключові слова: кільцева п'єзокерамічна пластина, азимутальний розріз електродів, порівняльний аналіз частот і форм пружноелектричних коливань.

Вступ. В п'єзоелектричних вібраторах круглої конфігурації (диски та кільця) власні форми осесиметричних коливань, починаючи з другої власної частоти (на обертонах) мають вузлові концентричні кола [5,7]. Внаслідок виникнення зон розтягування і стиснення знижується ефективність електромеханічного зв'язку. З метою уникнення такого недоліку запропоновано [5] розрізати електродне покриття по концентричних колах. Оpubліковані теоретичні дослідження в цьому напрямі не дають достатньої інформації аналізу цього явища, що і спричинило викладені в даній статті дослідження.

1. Постановка і загальний розв'язок задачі. Планарні гармонічні коливання п'єзоелектричної круглої пластини з електродованими лицевими площинами $z = \pm h/2$ при плоскому напруженому стані ($u_z = u_\theta = 0$, $\sigma_{zz} = \sigma_{zr} = \sigma_{z\theta}$, $E_x = E_y = 0$) у випадку осесиметричної деформації описуються рівнянням [1,2,3]

$$\frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} = (1 - \nu_E^2) s_{11}^E \rho \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} \quad (1)$$

і формулами для механічних напружень та електричної індукції

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{1}{(1 - \nu_E^2) s_{11}^E} \left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \nu_E \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z \right), \\ \sigma_{\theta\theta} &= \frac{1}{(1 - \nu_E^2) s_{11}^E} \left(\nu_E \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - (1 + \nu_E) d_{31} E_z \right), \\ D_z &= d_{31} (\sigma_r + \sigma_\theta) + d_{33} \sigma_z + \epsilon_{33}^T E_z. \end{aligned} \quad (2)$$

В співвідношеннях (1), (2) s_{11}^E, s_{12}^E - пружні сталі при нульовому електричному полі, d_{31} - п'єзоелектрична стала, $k_E^2 = (1 - \nu_E^2) s_{11}^E \rho \omega^2$, $\nu_E = -s_{12}^E / s_{11}^E$ - аналог коефіцієнта Пуассона, ρ - густина матеріалу.

Розглянемо кільцеву пластину $r_0 < r < r_2$ з двобічними розрізом електродного покриття по кільцевій лінії $r = r_1$. Розв'язок рівняння (1) при гармонічних коливаннях $f(r, t) = \text{Re } f^a(r) \exp i \omega t$ буде таким [4]

$$\begin{aligned} u_r^a(r) &= R A_1 J_1(k_E r) + R B_2 Y_1(k_E r), \quad r_0 < r < r_1 \\ u_r^a(r) &= R A_2 J_1(k_E r) + R B_2 Y_1(k_E r), \quad r_{11} < r < r_2 \end{aligned} \quad (3)$$

Розв'язку (3) відповідають механічні напруження $\sigma_{rr}^a, \sigma_{\theta\theta}^a$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr}^a &= \frac{R}{s_{11}^E (1 - \nu_E^2)} (A_n a_1(k_E r) + B_n b_1(k_E r) - (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,n}) e^{i \omega t}, \\ \sigma_{\theta\theta}^a &= \frac{R}{s_{11}^E (1 - \nu_E^2)} (A_n a_2(k_E r) + B_n b_2(k_E r) - (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,n}) e^{i \omega t}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$r_{n-1} < r < r_n, \quad n = 1, 2.$$

В формулах (4) введено такі позначення

$$\begin{aligned} a_1(k_E r) &= k_E R J_0(k_E r) - (1 - \nu_E) \frac{R}{r} J_1(k_E r); \\ b_1(k_E r) &= k_E R Y_0(k_E r) - (1 - \nu_E) \frac{R}{r} Y_1(k_E r); \\ a_2(k_E r) &= \nu_E k_E R J_0(k_E r) + (1 - \nu_E) \frac{R}{r} J_1(k_E r); \\ a_2(k_E r) &= \nu_E k_E R J_0(k_E r) + (1 - \nu_E) \frac{R}{r} J_1(k_E r). \end{aligned}$$

Тут використовуються позначення $s_E = s_{11}^E (1 - \nu_E^2)$, $E_{za,n}$ - амплітуди напруженості електричного поля $E_{z,n} = \text{Re } E_{za,n} \exp i \omega t$ на кільці $r_{n-1} < r < r_n$. Приймається, що для всіх кілець $r_{n-1} < r < r_n$ залишаються справедливими припущення про плоский напружений стан і у всіх них електричний потенціал поля незалежний від планарних координат і змінюється по товщині по лінійному закону.

З умов спряження по лінії розрізу електродів r_1 при досконалому механічному і електричному контактах

$$u_r(r_1 - 0, t) = u_r(r_1 + 0, t), \quad \sigma_r(r_1 - 0, t) = \sigma_r(r_1 + 0, t) \quad (5)$$

одержимо систему алгебраїчних рівнянь

$$\begin{aligned}
 A_1 J_1(k_E r_1) + B_1 Y_1(k_E r_1) &= A_2 J_1(k_E r_1) + B_2 Y_1(k_E r_1), \\
 A_1 a_1(k_E r_1) + B_1 b_1(k_E r_1) - (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,1} &= \\
 &= A_2 a_1(k_E r_1) + B_2 b_1(k_E r_1) - (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,2}, \quad (6)
 \end{aligned}$$

Маємо чотири можливі комбінації граничних умов при $r=r_0$ і $r=r_2$ та відповідні системи для визначення невідомих сталих A_1 , B_1 , A_2 , B_2 :

1. жорстко закріплений край $r=r_0$ – жорстко закріплений край $r=r_2$

$$\begin{aligned}
 A_1 J_1(k_E r_0) + B_1 Y_1(k_E r_0) &= 0, \\
 A_2 J_1(k_E r_2) + B_2 Y_1(k_E r_2) &= 0; \quad (7)
 \end{aligned}$$

2. жорстко закріплений край $r=r_0$ – вільний від напружень край $r=r_2$

$$\begin{aligned}
 A_1 J_1(k_E r_0) + B_1 Y_1(k_E r_0) &= 0, \\
 A_2 a_1(k_E r_2) + B_2 b_1(k_E r_2) &= (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,2}; \quad (8)
 \end{aligned}$$

3. вільний від напружень край $r=r_0$ – жорстко закріплений край $r=r_2$

$$\begin{aligned}
 A_1 a_1(k_E r_0) + B_1 b_1(k_E r_0) &= (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,1}, \\
 A_2 J_1(k_E r_2) + B_2 Y_1(k_E r_2) &= 0; \quad (9)
 \end{aligned}$$

4. вільний від напружень край $r=r_0$ – вільний від напружень край $r=r_2$

$$\begin{aligned}
 A_1 a_1(k_E r_0) + B_1 b_1(k_E r_0) &= (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,1}, \\
 A_2 a_1(k_E r_2) + B_2 b_1(k_E r_2) &= (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,2}. \quad (10)
 \end{aligned}$$

Задача про визначення особливостей форм коливання зводиться до розв'язку систем алгебраїчних рівнянь. У випадку граничних умов коли край $r=r_0$ вільний від напружень $\sigma(r_0, t)=0$, а край $r=r_2$ – жорстко закріплений тобто $u(r_2, t)=0$ і протифазним з'єднанням електродів система має вигляд

$$\begin{bmatrix} a_1(k_E r_0) & b_1(k_E r_0) & 0 & 0 \\ J_1(k_E r_1) & Y_1(k_E r_1) & -J_1(k_E r_1) & -Y_1(k_E r_1) \\ a_1(k_E r_1) & b_1(k_E r_1) & -a_1(k_E r_1) & b_1(k_E r_1) \\ 0 & 0 & J_1(k_E r_2) & Y_1(k_E r_2) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + \nu_E) d_{13} E_{za,1} \\ 0 \\ 2(1 + \nu_E) d_{13} E_{za,1} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

У випадках інших граничних умов і з'єднань електродів системи будуть мати подібний вигляд.

2. Чисельні результати та їх аналіз. Розглянемо п'єзокерамічну кільцеву пластину з наступними матеріальними параметрами $\rho=7740 \text{ кг/м}^3$, $s_{11}^E=15,2 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}$, $s_{12}^E=-5,8 \cdot 10^{-12} \text{ м}^2/\text{Н}$, $d_{31}=-125 \cdot 10^{-12} \text{ Кл/Н}$ $E_{za,1}=E_{za,2}=2000 \text{ в/м}$, що відповідає п'єзокераміці

ЦТС-19 [2, 6]. Аналіз проводився при відношенні радіусів $r_0/r_2=0,4$ і для одного діаметрального розрізу електродного покриття на радіусі r_{01} . Розрахунки проводились для безрозмірних власних частот $k_E R = \bar{\omega}$. Розглядався варіант з'єднань електродів при яких напруженість електричного поля E в частинах кільця рівна за величиною, але протилежно направлена.

Розрахунки дозволяють зробити наступні висновки: наявність розрізів електродного покриття не впливає на значення власних частот коливань пластини; форми коливань для мод починаючи з другої мають вузлові точки ($u(r)=0$) радіус розташування яких не залежить від наявності розрізу електродного покриття і його радіусу; форми коливань в малому околі вузлових точок для пластини без розрізу і з розрізом співпадають.

В таблиці для перших чотирьох мод наведено частоти і відносні радіуси r_0/r_2 вузлових точок для двох типів граничних умов (1 тип - вільний внутрішній край $r_0(\sigma(r_0,t)=0)$ і закріплений зовнішній $r_2(u(r_2,t)=0)$, 2 тип - закріплення по внутрішньому радіусу $r_0(u(r_0,t)=0)$ і вільна зовнішня границя $r_2(\sigma(r_2,t)=0)$) для пластин з розрізами електродного покриття і без (однорідна пластина).

Граничні умови	мода	частота	Вузлові точки однорідної пластини	Вузлові точки обумовлені розрізами електродів
1	1	3.20884	--	0.887
	2	8.04387	0.65805	0.55
	3	13.20123	0.5221 0.76136	0.485 0.795 0.975
	4	18.40479	0.4876 0.65805 0.8291	0.46 0.68 0.81
2	1	2.76583	--	0.68
	2	7.93913	0.8027	0.865
	3	13.14434	0.881 0.641	0.46 0.59 0.92
	4	18.36553	0.5718 0.7434 0.9147	0.605 0.705 0.95

При зміні радіусу розрізу від r_0 до r_2 значення $u(r,t)$ змінюється переходячи через нульові значення. Кількість нульових значень залежить від номера моди і завжди є непарним числом. Ці точки будемо називати вузлами обумовленими розрізами електродного покриття.

На рис. 1 - 3 наведено форми коливань у випадку 1, на рис. 4 - 6 – у випадку 2 для третьої моди. На рис. 1 і 4 точками наведено форми коливань при відсутності розрізів. На рис. 1, 2, 4, 5 приведено форми коливань в околі точок де $u(r,t)=0$ тільки при наявності розрізів електродів, а на рис. 3 і 6 поблизу вузлових точок в пластині без розрізів електродів.

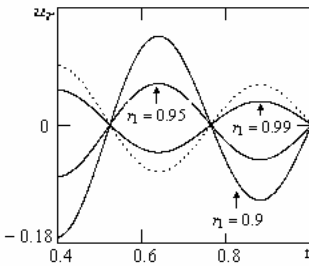


Рис. 1

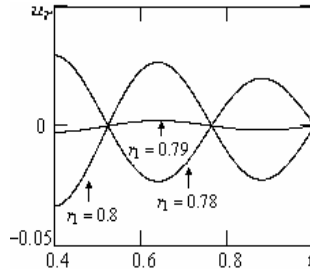


Рис. 2

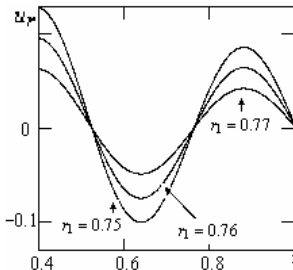


Рис. 3

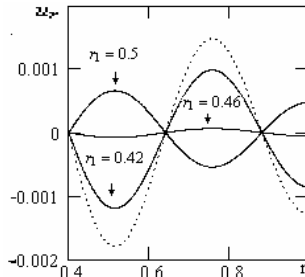


Рис. 4

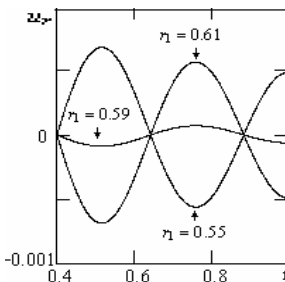


Рис. 5

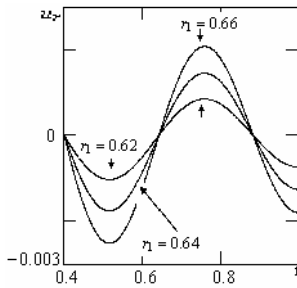


Рис. 6

Як витікає з результатів розрахунків, частково приведених на рис. 1 - 6, наявність розрізів суттєво змінює вигляд коливань, з'являються значення радіусів розрізу електродів при яких коливання в пластині відсутні, в околі цих радіусів амплітуда коливань міняє знак. При наближенні значення r_1 до вузлової точки вигляд коливання співпадає з коливаннями в пластині з однорідним покриттям і амплітуда коливань не змінює знак, змінюється тільки амплітуда.

Розглянемо залежність $u(r, t)$ від r_1 для вільної границі. На рис. 7 наведено суцільною лінією переміщення на границі r_0 при закріпленій зовнішній границі, а лінія із штрихів відповідає переміщенню при $r=r_2$ при закріпленій внутрішній границі. Мас сенс розглянути при яких значення радіусу розрізу спостерігається нульове переміщення.

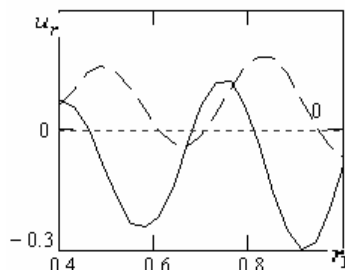


Рис. 7

Висновки. Наявність азимутальних розрізів в покритті пезокерамічних не призводить до зміни власних частот коливань. Вузлові точки (точки в яких переміщення дорівнює нулеві) не змінюють свого розташування при наявності розрізів. Форми коливань пластини при наявності розрізів і без розрізів співпадають у вузлових точках співпадають. В решті випадків спостерігається суттєва відмінність коливань. Зміною радіусу розрізу можна керувати амплітудою коливань і змінювати її на протилежну. При певних значеннях радіусу коливання амплітуда коливань рівна нулеві. Число таких значень є непарне і росте з ростом моди коливань.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. – М.: Наука, 1982. – 424с.
2. Механика связанных полей в элементах конструкций. Т. 5. Электроупругость / Гринченко В.Т., Улитко А.Ф., Шульга Н.А./ Отв. Ред. А.Н. Гузь – К.: Наук. думка, 1989. – 280 с.
3. Партон В.З., Кудрявцев Б.А. Электромагнитоупругость пьезоэлектрических и электропроводных тел: - М.: Наука, 1988. – 472с.
4. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972. – 736 с.
5. Шульга М.О. Карлаш В.Л. Резонансні електромеханічні коливання п'єзоелектричних пластин. – К.: Наук. думка, 2008. – 272 с.

6. *Mason W.P.* Piezoelectricity, its history and applications // *J. Acoust. Soc. Am.* – 1981. – 70, N 6. – P. 1561 – 1566.
7. *Shul'ga N.A., Bezverkhiy O.I., Mekievskii O.I.* Resonant Frequencies of Electroelastic Vibrations of Piezoceramic Plates // *Int. Appl. Mech.* – 2010. – 46, N9. – P. 1031 – 1037.

REFERENCES

1. *E.Dielesaint., D. Royer.* Elastic waves in solid bodys. Application to signal processing, Wiley-Interscience, New York(1981).
2. *V.T. Grinchenko, A.F. Ulitko, and N.A. Shul'ga,* Electroelasticity, Vol. 5 of the six-volume series Mechanics of Coupled Fields in Structural Members [in Russian], Naukova Dumka, Kyiv (1989).
3. *V.Z. Parton and B.A. Kudryavtsev.* Electromagnetoelasticity of piezoelectric and electroconductiv bodies [in Russian], Nauka, Moscow(1988).
4. *A.N. Tikhonov and A. A. Samarskii,* Equations of Mathematical Physics, Dover, New York (1990)
5. *N. A. Shul'ga and V. L. Karlash,* Resonant electromechanical vibrations of piezoelectric plates [in Ukrainian], Naukova Dumka, Kyiv (2008).
6. *W. P. Mason,* "Piezoelectricity, its history and applications," *J. Acoust. Soc. Am.*, 70, No. 6, 1561-1566 (1981).
7. *N.A. Shul'ga., O.I. Bezverkhiy and O.I. Mekievskii.* "Resonant Frequencies of Electroelastic Vibrations of Piezoceramic Plates" *Int. Appl. Mech.*, 46, No, 9. – P. 1031 – 1037(2010).

Стаття надійшла до редакції 21.01.2014 р.

Безверхий А.И., Левченко В.В., Макиевский А.И.

ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ КРУГОВОЙ ПЛАСТИНЫ С АЗИМУТАЛЬНЫМИ РАЗРЕЗАМИ ЭЛЕКТРОДОВ

Проведено исследование влияния азимутальных разрезов электродного покрытия на частоты и формы колебаний пьезоэлектрических кольцевых пластин поляризованных по толщине при различных граничных условиях.

Ключевые слова: кольцевая пьезокерамическая пластина, азимутальные разрезы электродов сравнительный анализ частот и форм упругоэлектрических колебаний.

Bezverkhiy O.I., Levchenko V.V., Makievskiy O.I.

HARMONIC VIBRATIONS OF PIEZOCERAMIC RING PLATE WITH AN AZIMUTHALLY CUT OF ELECTRODES

Research of influence of azimuthal cuts of electrode coverage is conducted on frequencies and forms of vibrations of piezoelectric circular plates polarized on a thickness is executed is under various boundary conditions

Key words: ring piezoceramic a plate, azimuthally cut of electrodes, comparative analysis of frequencies and forms electroelastic vibrations.