

УДК 539.3

Ю.В. Максим'юк¹, канд. техн. наук

¹Київський національний університет будівництва і архітектури
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ, Україна. 03680

АЛГОРИТМ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧ НЕЛІНІЙНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ТА СТІЙКОСТІ ПРУЖНОПЛАСТИЧНИХ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ОБОЛОНОК СЕРЕДНЬОЇ ТОВЩИНИ

Розроблена методика, яка базується на розрахункових співвідношеннях моментної схеми скінчених елементів (МССЕ), і запропонований алгоритм розв'язання систем нелінійних рівнянь пружнопластичного деформування і втрати стійкості вісесиметричних оболонок середньої товщини неканонічної форми, який дозволяє отримувати достовірні результати для широкого класу тонкостінних об'єктів.

Ключові слова: метод скінчених елементів, термопружнопластичність, геометрично нелінійне деформування, покроковий алгоритм.

Вступ. Проблемі розробки методів розв'язку вісесиметричних задач фізично і геометрично нелінійного деформування і стійкості оболонок присвячена досить значна кількість публікацій. Їх огляд наведено в багатьох статтях та монографіях зокрема в [1, 3]. Аналіз публікацій з цього питання свідчить, що значна кількість проблем потребує проведення додаткових досліджень. Це в першу чергу стосується побудови розрахункових співвідношень, методів розробки ефективних підходів до розв'язання систем нелінійних рівнянь і визначення на цій основі параметрів напружено-деформованого стану, втрати стійкості і закритичної поведінки відповідальних об'єктів сучасної техніки.

В даній роботі за основу побудови розв'язувальних нелінійних співвідношень вісесиметричних оболонок середньої товщини прийнята методика моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) викладена в роботах [2, 7]. В основу алгоритму розв'язання систем нелінійних рівнянь покладено метод диференціювання за параметром λ , запропонований В.С.Кірія [5] і Д.Ф.Давиденко [4]. Він полягає в заміні системи нелінійних рівнянь задачею Коші для системи диференціальних рівнянь у звичайних похідних по параметру, в якості якого може бути використано інтенсивність зовнішнього силового навантаження або вимушене переміщення в характерній точці. Деяким недоліком такого підходу є можливість накопичення похибки в процесі чисельного інтегрування диференціальних рівнянь, виконуваного кроковим методом.

1. Алгоритм розв'язання систем нелінійних рівнянь МССЕ. У даній роботі використовується комбінований алгоритм, що поєднує

інтегрування по параметру з методом Ньютона-Кантаровича на одному кроці m значення параметра спуску λ [2].

$$\{u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + \{\Delta u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + [K^*]_m^{-1} (\{Q\}_n^m - \{R\}_n^m), \quad (1)$$

де $\{u\}_n^m$ - приращення переміщень на ітерації n кроку m ; $[K^*]_m$ - лінеаризована матриця жорсткості в системі рівнянь МСЕ, обчислена в проміжній відрахунковій конфігурації x_m^α з використанням тензора миттєвих жорсткостей пружнопластичного матеріалу і координат вузлів дискретної моделі x_m^α ; $\{Q\}_n^m$, $\{R\}_n^m$ - вектори вузлових зусиль і реакцій, визначені в актуальній конфігурації X_m^α . Компоненти вектора вузлових реакцій обчислюються з урахуванням, як фізичної так і геометричної нелінійності на основі повних напружень, що дозволяє уникнути вказаної вище проблеми накопичення похибки.

Обчислення здійснюються до виконання умови:

$$\|\{Q\}_n^m\| - \|\{R\}_n^m\| \leq \zeta \|\{Q\}_n^m\|, \quad (2)$$

де ζ - параметр точності розв'язання системи нелінійних рівнянь;

$\|\{Q\}_n^m\|$ - сума квадратів вузлових зусиль скінчено елементної моделі (СЕМ); $\|\{R\}_n^m\|$ - сума квадратів реакцій СЕМ.

Початкове значення вектора переміщень на першій ітерації кроку m екстраполюється за значенням вектора $\{u_{m-1}\}$ і приращень параметра $\Delta\lambda_{m-1}$ і $\Delta\lambda_m$:

$$\{u_m\} = \frac{\{u_{m-1}\} \Delta\lambda_m}{\Delta\lambda_{m-1}}. \quad (3)$$

Після цього вмикається ітераційний процес розв'язання системи нелінійних рівнянь відповідно до (1).

При виконанні умови (2) ітераційний процес закінчується. За обчисленням в результаті розв'язку системи нелінійних рівнянь значенням приращення вектора $\{u_m\}$ визначаються прирости фізичних напружень

$(\Delta\tilde{\sigma}^{ij})_m$:

$$(\tilde{\sigma}^{ij})_m = (\tilde{\sigma}^{ij})_{m-1} + (\Delta\tilde{\sigma}^{ij})_m, \quad (4)$$

та виконується перерахунок базисних координат всіх вузлів сіткової області за формулою:

$$z_m^\alpha = z_{m-1}^\alpha + u_m^\alpha. \quad (5)$$

Здійснюється перевірка на закінчення виконання умови (2). Якщо умова не виконана, то визначається нове приращення параметра і виконується наступний крок чисельного інтегрування.

В якості параметра може застосовуватися як інтенсивність навантаження, так і величина переміщення деякого вузла сіткової області. Використання двох параметрів спуску дозволяє отримувати всю криву навантаження-прогин при неоднозначності функцій $q(u)$ або $u(q)$.

2. Ефективність розглянутого алгоритму. Досліджувалася шляхом порівняння з інтегруванням на одному кроці методом Ньютона-Рафсона і методом одно-крокової корекції по Ньютону-Рафсону.

Як об'єкт розглянута затиснена по контуру сферична панель під дією поперечного навантаження (рис. 1).

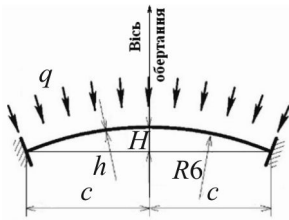


Рис. 1

Поведінка алгоритмів вивчалась на відрізку кривої $\frac{w}{h}(q)$ в межах від 0 до $\frac{w}{h}=0.7$, де w - переміщення в центрі панелі, h - товщина оболонки.

Результати порівняння представлені на рис. 2 у вигляді графіків, що відображають залежність часу розв'язку задачі від величини приросту параметра

навантаження λ_q або іншими словами від величини кроку інтегрування. Крок інтегрування приймається рівномірним і визначається за формулою:

$$\lambda_q = \frac{q(0.7)}{m} \quad (6)$$

де $q(0.7)$ - інтенсивність рівномірного навантаження, відповідна $\frac{w}{h}=0.7$, m - число кроків інтегрування.

На графіку цифрою 1 позначена залежність часу розв'язання задачі від кроку інтегрування відповідно до формули (1), цифрою 2 - інтегрування на одному кроці методом Ньютона-Рафсона, 3 - методом одно-крокової корекції по Ньютону-Рафсону. Крім того, на рис.2 штрих - пунктирною лінією позначена крива, що відображає точність визначення переміщення в центрі панелі від величини приросту параметра при одно-кроковій корекції.

Точність розв'язку, отриманого ітераційними алгоритмами, (1) і (2) не залежить від величини кроку інтегрування і визначається числом ζ .

Наведені результати отримані при $\zeta=10^{-2}$ і відрізняються від еталонного рішення, отриманого при $\zeta=10^{-6}$ менш ніж на 0,1%. У цій задачі

залежність часу розв'язання різними алгоритмами від кількості кроків інтегрування виявилася практично лінійною.

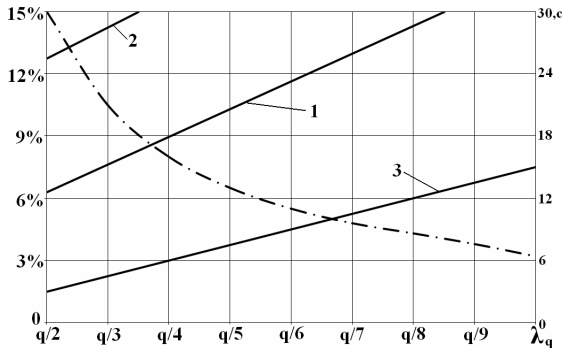


Рис. 2

Найменша витрата часу на одне прирощення параметра інтегрування відповідає методу одно-крокової корекції, однак, точність розв'язання цим алгоритмом істотно залежить від величини приросту параметра. Дещо більша точність (на 2-3%) в розглянутому прикладі може бути отримана за рахунок застосування спуску по параметру переміщення, проте відсутність контролю за точністю розв'язання обмежує можливість використання цього методу. При підвищенні точності за рахунок зменшення кроку інтегрування збільшується загальний час розв'язання задачі і в цьому випадку ітераційні алгоритми виявляються ефективнішими. Особливо помітно це проявляється на ділянках кривої навантаження - прогин поблизу точок перегину, де різко зростає накопичення похибки.

Аналізуючи наведені результати можна зазначити, що застосування ітераційних алгоритмів в (1) і (2) найбільш сприятливо при максимальній величині кроку інтегрування. По витраті машинного часу переважним виявився алгоритм, заснований на використанні методу Ньютона-Кантаровича. Так, на вирішення завдання цим алгоритмом потрібно майже в 2 рази менше часу, ніж методом Ньютона-Рафсона, при одних і тих же параметрах спуску. Отримані дані дозволяють обґрунтувати застосування алгоритму (1), який забезпечує оптимальну відповідність між обчислювальними витратами і точністю розв'язання для розглянутого кола задач.

3. Дослідження достовірності моделювання фізично нелінійного деформування. Для з'ясування можливості визначення розвитку зон пластичності в тонкостінних конструкціях, які апроксимуються по товщині одним скінченим елементом, виконано пружно-пластичний

розрахунок шарнірно опертої балки звантаженої рівномірно розподіленим навантаженням (рис. 5) при наступних механічних характеристиках: $E=1.0$; $\nu=0.3$. За товщиною скінченного елемента приймалося п'ять Гаусових точок інтегрування.

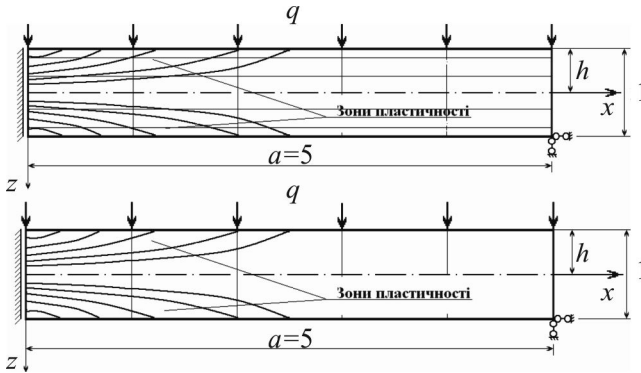


Рис. 3

Аналітичний розв'язок задачі наведений в роботі [8], де зв'язок координат між зонами пластичності з інтенсивністю заданого розподіленого навантаження q представлений у вигляді:

$$Z^2 - 3h^2 = 2h^2 \frac{q}{q_0} \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right) \quad (7)$$

тут h - половина висоти балки; a - половина довжини балки; q_0 - величина розподіленого навантаження, при якій з'являються пластичні деформації,

$$q_0 = \frac{4M}{3a^2}, \quad (8)$$

де M - значення згинального моменту.

4. Використання алгоритму (1) при розв'язанні фізично і геометрично нелінійних задач. Для дослідження достовірність результатів розв'язку фізично і геометрично нелінійних задач, при використанні одного СЕ по товщині оболонки було проведено їх порівняння з просторовим розв'язком.

Торосферичний посуд, складається з елементів сфери, тора і циліндра, під дією внутрішнього тиску (рис. 4). Товщина стінки сосуда $h=1/4$ дюйма (0.00635 м), коефіцієнт Пуассона $\nu=0.31$, інтенсивність внутрішнього тиску складає 100 фунтов на один квадратний дюйм (689.476 кН/м²). Відношення межі текучості τ_s до модуля пружності E складає 1:750. Результати розрахунку отримані МССЕ порівнювалися з результатами,

що отримані в роботі [6]. На рис. 5 представлені криві, які показують зростання максимальної деформації на тороїдальній частині сосуду в залежності від величини інтенсивності внутрішнього тиску.

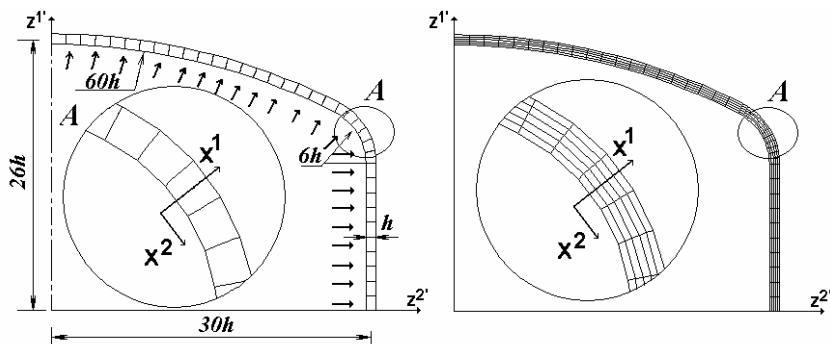


Рис. 4

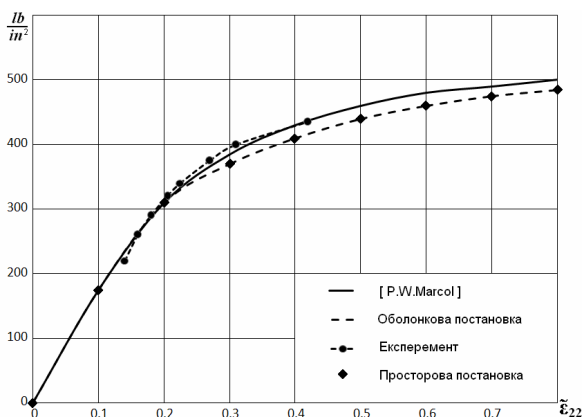


Рис. 5

Суцільною лінією зображені результати роботи [6], пунктирною з кружечками – дані експерименту, пунктирною лінією – розв'язки отримані на основі МССЕ. Спостерігається непогана для такої складної задачі збіжність результатів.

5. Обґрунтування достовірності визначення верхнього і нижнього критичного навантажень проведено на прикладі задачі втрати стійкості сферичної панелі (рис. 4). На рис. 6 наведено графік залежності між параметром навантаження $q^* = qc^4/(Eh^4)$ і безрозмірною стрілою

прогину $\zeta = u/h$ в центрі (h – товщина, $H=3h$) отриманий в роботі В.І. Феодосєєва [9].

Квадратами позначені результати, отримані алгоритмом (1). При цьому спостерігається хороша збіжність результатів. Результати дослідження швидкості збіжності результатів МССЕ при збільшенні кількості СЕ представлені на рис. 7. На ньому зображені криві, які характеризують збіжність верхнього P_e і нижнього P_n критичного навантаження в залежності від числа скінчених елементів (СЕ) в меридіональному напрямку. По товщині оболонки прийнятий один елемент. Відсоток похибки визначається відносно розв'язку опублікованому в роботі [9].

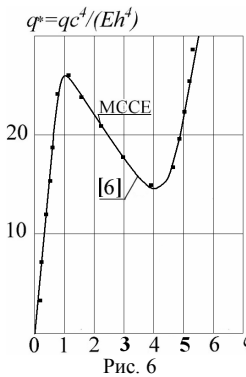


Рис. 6

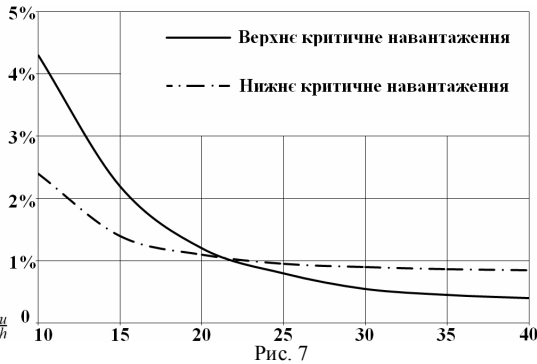


Рис. 7

Слід відзначити хорошу погодженість результатів, отриманих різними методами. Аналіз приведених графіків дозволяє встановити, що поступове згущення сіток в 2 рази від 10 до 20 СЕ змінює значення верхнього критичного навантаження на 3,1%, нижнього – в межах 0,2%.

Висновок. Таким чином, розроблена методика, яка базується на розрахункових співвідношеннях МССЕ і запропонованому алгоритмі розв'язання систем нелінійних рівнянь пружнопластичного деформування і втрати стійкості вісесиметричних оболонок середньої товщини неканонічної форми дозволяє отримувати достовірні результати для широкого класу тонкостінних об'єктів.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А.* Нелінійне деформування та стійкість пружних оболонок неоднорідної структури / В.А. Баженов, О.П. Кривенко, М.О. Соловей. – К.: ЗАТ «Віпол», 2010. – 315 с.

2. *Баженов В.А.* Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при нелінійних розрахунках оболонок і пластин / В.А. Баженов, О.І. Гулярь, О.С. Сахаров, С.О. Пискунов, Ю.В. Максим'юк // Опір матеріалів і теорія споруд. - 2014. – Вип. 92. – С. 3-16.
3. *Гуляев В.И.* Устойчивость нелинейных механических систем / В. И. Гуляев, В. А. Баженов, Е. А. Гоцуляк – Л.: Вища школа, 1982. – 255с.
4. *Давиденко Д. Ф.* Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений / Д.Ф. Давиденко// ДАН СССР, т.88, №4, 1953.
5. *Кірія В.С.* Движение тел в сопротивляющихся средах. – в кн. Труды Тбилисского гос. ун-та, 1951, 44.
6. *Маркол П.В.* Определение больших прогибов упруго-пластических оболочек вращения. Ракетная техника и космонавтика / P.W. Marcol // 1970. №9.
7. *Пискунов С.О.* Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при лінійних розрахунках оболонок і пластин / С. О. Пискунов, І. І. Солодей, Ю. В. Максим'юк, А. Д. Солоденко // Опір матеріалів і теорія споруд. - 2013. – Вип. 91. – С. 59-75.
8. *Соколовский В.В.* Теория пластичности / В.В. Соколовский. – М.: Высш. шк., 1969. – 608 с.
9. *Феодосьев В.И.* Об одном новом способе решения нелинейных задач устойчивости деформируемых систем / В.И. Феодосьев// ПММ, №2, 1963.

REFERENCES

1. *Bazhenov V.A.* Nelineinye deformuvannya ta stiykist' pruzhnykh obolonok neodnorodnoyi struktury „Nonlinear deformation and stability of elastic shells heterogeneous structure” / V. A. Bazhenov, O.P. Kryvenko, M.O. Solovey.– K.: ZAT «Vipol», 2010. – 315 s.
2. *Bazhenov V.A.* Osoblyvosti vykorystannya momentnoyi skhemy skinchenykh elementiv (MSSE) pry nelineynykh rozrakhunkakh obolonok i plastyn „Features of torque finite element scheme (MSSE) in the nonlinear calculations of shells and plates” / V.A. Bazhenov, O.I. Hulyar, O.S. Sakharov, S.O. Pyskunov, Yu.V. Maksym'yuk // Opir materialiv i teoriya sporud. 2014. – Vyp. 92. – S. 3-16.
3. *Hulyayev V.Y.* Ustoychyvost' nelyneynykh mekhanycheskykh system „Persistence nelineynih mechanical systems” / V.Y. Hulyayev, V.A. Bazhenov, E.A. Hotsulyak – L.: Vyshcha shkola, 1982. – 255s.
4. *Davydenko D.F.* Ob odnom novom metode chyslenoho reshenyya system nelyneynykh uravnenyy „On a new method of numerical solution of systems of nonlinear equations” / D. F. Davydenko// DAN SSSR, t.88, #4, 1953.
5. *Kiriya V.S.* Dvyzhenye tel v soprotivlyayushchykh sredakh. „Motion in a resistant medium” – v kn. Tруды Tbylysskoho hos. un-ta, 1951, 44.
6. *Markol P.V.* Opredelyenye bol'shykh prohybov upruho-plastycheskykh obolochek vrashchenyya. Raketnaya tekhnika y kosmonavtyka „Opredilenie large deflection elastic-plastic shells of revolution. Rocketry and astronautics” / P. W. Marcol // 1970. #9.
7. *Pyskunov S.O.* Osoblyvosti vykorystannya momentnoyi skhemy skinchenykh elementiv (MSSE) pry liniynykh rozrakhunkakh obolonok i plastyn „Features of torque finite element scheme (MSSE) with linear calculations of shells and plates” / S.O. Pyskunov, I.I. Solodey, Yu.V. Maksym'yuk, A.D. Solodenko // Opir materialiv i teoriya sporud. 2013. – Vyp. 91. – S. 59-75.
8. *Sokolovskyy V.V.* Teoryya plastychnosty „Theory of Plasticity” / V. V. Sokolovskyy. – M.: Vyshcha shkola, 1969. – 608 s.
9. *Feodos'yev V.I.* Ob odnom novom sposobe reshenyya nelyneynykh zadach ustoychyvosty deformyruemykh system „A new technique for solving nonlinear problems of stability of deformable systems” / V.Y. Feodos'ev// PМM, #2, 1963.

Максимиук Ю.В.

АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ И УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ОБОЛОЧЕК СРЕДНЕЙ ТОЛЩИНЫ

Разработана методика, которая базируется на расчетных соотношениях МСКЭ и предложен алгоритм решения систем нелинейных уравнений упругого деформирования и потери устойчивости осесимметричных оболочек средней толщины неканонической формы, который позволяет получать достоверные результаты для широкого класса тонкостенных объектов.

Ключевые слова: метод конечных элементов, термоупругопластичность, геометрически нелинейное деформирование, по-шаговый алгоритм.

Максимуук Ю.В.

ALGORITHMS FOR SOLVING PROBLEMS OF NONLINEAR DEFORMATION AND STABILITY OF ELASTOPLASTIC AXISYMMETRICAL AVERAGE THICKNESS SHELLS.

The technique, which is based on the calculated ratios of moment scheme of finite element (MSFE), and the algorithm for solving nonlinear equations systems of elastoplastic deformation and loss of stability for rectangular axisymmetrical medium thickness shells has been developed. The reliability of results for a wide class of thin-walled objects confirmed.

Keywords: finite element method, thermoelastoplasticity, geometrically nonlinear deformation, step-by-step algorithm.