

УДК 539.3

В.А. Баженов¹, д-р техн. наук
О.С. Сахаров², д-р техн. наук
О.І. Гуляр¹, д-р техн. наук
С.О. Пискунов¹, д-р техн. наук
Ю.В. Максим'юк¹, канд. техн. наук

¹*Київський національний університет будівництва і архітектури,
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680*

²*Київський національний університет „КПІ”
проспект Перемоги, 37, м. Київ. 03056*

ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ МОМЕНТНОЇ СХЕМИ СКІНЧЕНИХ ЕЛЕМЕНТІВ (МССЕ) ПРИ НЕЛІНІЙНИХ РОЗРАХУНКАХ ОБОЛОНОК І ПЛАСТИН

На основі МССЕ створений оболонковий СЕ загального типу, який дозволяє проводити аналіз напружено-деформованого стану вісесиметричних оболонок і пластин в задачах фізичної і геометричної нелінійності. Наведені основні положення нелінійної теорії пружності, алгоритми розв'язання системи нелінійних рівняння для визначення температурних і пластичних деформацій.

Ключові слова: метод скінчених елементів, температурні деформації, деформації пластичності, геометрично нелінійне деформування.

Вступ. В роботі [3] основна увага спрямована на проблему використання СЕ, що базуються на співвідношеннях теорії пружності та їх конкретизацію для розрахунку вісесиметричних оболонок і пластин і обґрунтуванню достовірності і ефективності отриманих результатів на основі МССЕ. В даній роботі було розширено скінчену елементну базу і створено оболонковий СЕ загального типу для розв'язання задач фізичної і геометричної нелінійності вісесиметричних оболонок та пластин.

1. Основні положення нелінійної теорії пружності. При великих деформаціях можливі значні повороти частин конструкцій, які не повинні змінювати пружно-деформований стан тіла. В цьому випадку необхідно, щоб величини, які входять в визначальні співвідношення, задовольняли вимогам індиферентності. В зв'язку з цим в роботі використані тензор напружень Коші і міра деформацій Фінгера. Обидва тензора і їх інваріанти задовольняють властивості індиферентності [6].

Опис напружено-деформованого стану об'єктів в процесах, що супроводжуються великими подовженнями і поворотами, як правило, виконується в двох конфігураціях: відрахунковій початковій x_0^i і актуальній X^i (рис. 1).

Введемо проміжну перемінну відрахункову конфігурацію x^i (рис.1), компоненти метричного тензора якої позначимо через g^{ij} . Перемінну відрахункову конфігурацію приймаємо достатньо близькою до актуальної таким чином, щоб приріст компонент метричного тензора ΔG^{ij} був малою величиною порівняно з компонентами метричного тензору в актуальній конфігурації G^{ij} .

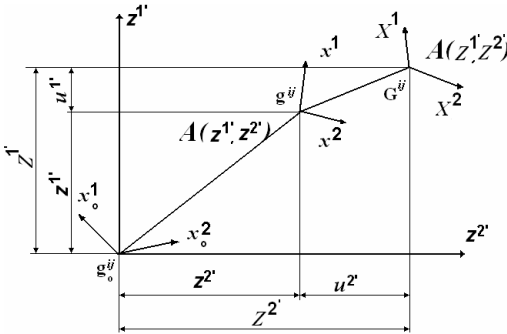


Рис. 1

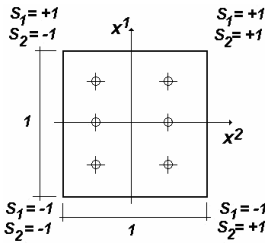


Рис. 2

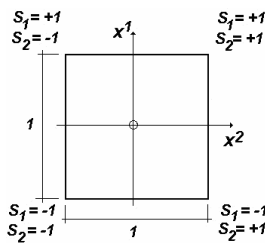


Рис. 3

Геометричні рівняння деформованого тіла для коваріантних компонент приросту деформації в актуальній конфігурації визначаються через переміщення відносно проміжної відрахункової конфігурації:

$$\Delta \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(z'_{,\alpha} u'_{,\beta} + z'_{,\beta} u'_{,\alpha} + u'_{,\alpha} u'_{,\beta}), \quad \Delta \varepsilon_{33} = \frac{1}{2}(2z' u' + (u')^2). \quad (1)$$

Лінійний тензор деформацій обчислюємо за формулою:

$$\Delta \hat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(z'_{,\alpha} u'_{,\beta} + z'_{,\beta} u'_{,\alpha}), \quad \Delta \hat{\varepsilon}_{33} = z' u'. \quad (2)$$

Коваріантні компоненти тензора приросту нелінійних деформацій в актуальній конфігурації (1) можна подати співвідношеннями аналогічними за формулою з (2):

$$\Delta \varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} (\bar{z}'_{,\beta} u'_{,\beta} + \bar{z}'_{,\beta} u'_{,\alpha}), \quad \Delta \varepsilon_{33} = \bar{z}'^2 u'^2. \quad (3)$$

де коефіцієнти перетворень подамо у вигляді:

$$\bar{z}'^{\nu'} = z'^{\nu'} + \frac{1}{2} u'^{\nu'}, \quad \bar{z}'_{,\beta} = z'_{,\beta} + \frac{1}{2} u'_{,\beta}, \quad (4)$$

Можна показати, що вираз (3) тотожно дорівнює (1):

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \left((z'_{,\alpha} + \frac{1}{2} u'_{,\alpha}) u'_{,\beta} + (z'_{,\beta} + \frac{1}{2} u'_{,\beta}) u'_{,\alpha} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (z'_{,\alpha} u'_{,\beta} + \frac{1}{2} u'_{,\alpha} u'_{,\beta} + z'_{,\beta} u'_{,\alpha} + \frac{1}{2} u'_{,\beta} u'_{,\alpha}) = \frac{1}{2} (z'_{,\alpha} u'_{,\beta} + z'_{,\beta} u'_{,\alpha} + u'_{,\alpha} u'_{,\beta}). \\ \Delta \varepsilon_{33} &= (z'^2 + \frac{1}{2} u'^2) u'^2. \end{aligned} \quad (5)$$

Аналогічно можна представити варіацію деформацій. Обчислимо варіацію приросту нелінійних деформацій (1):

$$\begin{aligned} \delta(\Delta \varepsilon_{\alpha\beta}) &= \frac{1}{2} (z'_{,\alpha} \delta u'_{,\beta} + z'_{,\beta} \delta u'_{,\alpha} + 2 \delta u'_{,\alpha} u'_{,\beta}), \\ \delta(\Delta \varepsilon_{33}) &= (z'^2 \delta u'^2 + u'^2 \delta u'^2). \end{aligned} \quad (6)$$

Представимо варіацію нелінійних деформацій аналогічно (3):

$$\begin{aligned} \delta(\Delta \varepsilon_{\alpha\beta}) &= \frac{1}{2} (Z'_{,\alpha} \delta u'_{,\beta} + Z'_{,\alpha} \delta u'_{,\alpha}), \\ \delta(\Delta \varepsilon_{33}) &= Z'^2 \delta u'^2, \end{aligned} \quad (7)$$

де

$$Z'^{\nu'} = z'^{\nu'} + u'^{\nu'}, \quad Z'_{,\beta} = z'_{,\beta} + u'_{,\beta}, \quad (8)$$

При їх підстановці в (7) отримаємо:

$$\begin{aligned} \delta(\Delta \varepsilon_{\alpha\beta}) &= \frac{1}{2} \left((z'_{,\alpha} + u'_{,\alpha}) \delta u'_{,\beta} + (z'_{,\beta} + u'_{,\beta}) \delta u'_{,\alpha} \right) = \\ &= \frac{1}{2} (z'_{,\alpha} \delta u'_{,\beta} + u'_{,\alpha} \delta u'_{,\beta} + z'_{,\beta} \delta u'_{,\alpha} + u'_{,\beta} \delta u'_{,\alpha}) = \frac{1}{2} (z'_{,\alpha} \delta u'_{,\beta} + z'_{,\beta} \delta u'_{,\alpha} + 2 u'_{,\beta} \delta u'_{,\alpha}), \\ \delta(\Delta \varepsilon_{33}) &= (z'^2 + u'^2) \delta u'^2 = (z'^2 \delta u'^2 + u'^2 \delta u'^2). \end{aligned} \quad (9)$$

2. Вихідні співвідношення двовимірної задачі термопружнопластичності. При наявності незворотних деформацій пластичності прирощення повних деформацій $d\varepsilon_{ij}$, обумовлених переходом від проміжної відрахункової конфігурації до актуальної, може бути подане сумою прирощень пружних деформацій $d\varepsilon_{ij}^e$, прирощень деформацій пластичності $d\varepsilon_{ij}^p$, та прирощень температурних деформацій $d\varepsilon_{ij}^T$ тобто:

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p + d\varepsilon_{ij}^T. \quad (10)$$

Матеріал пластично нестисливий і зміна його об'єму лінійно-пружна:

$$\varepsilon_{ii}^p = 0, \quad \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{ii}^e. \quad (11)$$

Для ізотропного матеріалу температурні складові компонент тензора деформацій визначаються за формулою [1]:

$$\varepsilon_{ij}^T = \alpha_T \Delta T g_{ij}, \quad (12)$$

де $\alpha_T = \alpha_T(z^k, T)$ – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу, $\Delta T = T - T_0$ – приріст температури в досліджуваній точці тіла відносно його вихідного стану при $T = T_0$.

Передбачається, що пружні деформації є малими. Повні напруження σ^{ij} визначаються через компоненти тензора пружних констант відповідно до узагальненого закону Гука [4]:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl}^e. \quad (13)$$

Для ізотропного тіла тензор пружних констант C^{ijkl} визначається через коефіцієнти Ляме λ та μ :

$$C^{ijkl} = \mu(g^{jl}g^{ik} + g^{il}g^{jk}) + \lambda g^{ij}g^{kl}, \quad (14)$$

які можуть бути подані через коефіцієнт Пуассона ν і модуль пружності матеріалу (модуль Юнга) E :

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad (15)$$

При наявності деформацій пластичності зв'язок між напруженнями і деформаціями визначається співвідношеннями теорії пластичної течії для ізотропного зміцнення матеріалу [5]. Область пружних деформацій обмежена поверхнею течії, рівняння якої в просторі напружень має вигляд:

$$f_p(\sigma^{ij}, \vartheta_p) = 0, \quad (16)$$

де $\vartheta_p = \int_{\varepsilon_{ij}^p} \sqrt{\frac{2}{3} d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}$ – параметр зміцнення Одквіста.

У відповідності до асоційованого закону пластичної течії, пластичні деформації розвиваються по нормалі до поверхні течії [1]:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda_p \frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} = d\lambda_p s_{ij}, \quad (17)$$

де f_p – функція текучості; $s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_0 \delta_{ij}$ – компоненти девіатора напружень, а $\sigma_0 = \sigma^{ij} g_{ij} / 3$.

Для ізотропного зміцнюваного матеріалу при умові текучості Мізеса поверхня текучії описується рівнянням:

$$f_p = \frac{1}{2} s_{ij} s^{ij} - \tau_s^2 (\vartheta_p) = 0, \quad (18)$$

де $\tau_s(\vartheta_p)$ – межа течії при чистому зсуві, яка є функцією параметра зміцнення Одквіста.

Виконуючи диференціювання виразу (13), встановлюємо взаємозв'язок між прирощеннями напружень і прирощеннями пружних деформацій в актуальній конфігурації:

$$d\sigma^{ij} = [\mu(g^{jl}g^{ik} + g^{il}g^{jk}) + \lambda g^{ij}g^{kl}] d\varepsilon_{kl}^e. \quad (19)$$

Для визначення зв'язку між прирощеннями напружень і деформацій при наявності пластичності запишемо рівняння [2]:

$$df_p = \frac{\partial f_p}{\partial s^{ij}} ds^{ij} + \frac{\partial f_p}{\partial \vartheta_p} d\vartheta_p = 0. \quad (20)$$

Для прийнятої поверхні течії (18) маємо:

$$df_p = s_{ij} ds^{ij} - 2\tau_s \frac{\partial \tau_s}{\partial \vartheta_p} = 0. \quad (21)$$

Приймаючи до уваги, що $s_{ij} ds^{ij} = s_{ij} d\sigma^{ij}$, а прирости компонент тензора напружень:

$$d\sigma^{ij} = C^{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p), \quad (22)$$

перепишемо рівняння (21) у вигляді:

$$S_{ij} [C^{ijkl} (d\varepsilon_{kl} - d\varepsilon_{kl}^p)] = 2\tau_s \frac{\partial \tau_s}{\partial \vartheta_p} \frac{\sqrt{2d\varepsilon_{ij}^p \varepsilon_p^{ij}}}{\sqrt{3}}. \quad (23)$$

Виразивши в (23) прирощення пластичних деформацій через компоненти девіатора напружень у відповідності з (17):

$$S_{ij} C^{ijkl} d\varepsilon_{kl} = \left(S_{ij} C^{ijkl} S_{kl} + \frac{4}{\sqrt{3}} \tau_s^2 \frac{\partial \tau_s}{\partial \vartheta_p} \right) d\lambda_p \quad (24)$$

і врахувавши, що для ізотропного матеріалу $S_{ij} C^{ijkl} = 2GS^{kl}$, де G – модуль зсуву, знайдемо невизначений множник $d\lambda_p$:

$$d\lambda_p = \frac{S_{ij} C^{ijkl} d\varepsilon_{kl}}{\gamma_p}, \quad (25)$$

де

$$\gamma_p = 4\tau_s^2 \left(G + \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\partial \tau_s}{\partial \vartheta_p} \right).$$

Виключивши прирощення пластичних деформацій в виразі (22), напишемо зв'язок між прирощенням напружень і деформацій у вигляді:

$$d\sigma^{ij} = C_e^{ijkl} d\varepsilon_{kl}, \quad (26)$$

$$C_e^{ijkl} = C^{ijkl} - \frac{4G^2 S^{ij} S^{kl}}{\gamma_p}.$$

Тут C_e^{ijkl} – тензор миттєвих жорсткостей пружно-пластичного матеріалу.

3. Матриця жорсткості геометрично нелінійного оболонкового SE загального типу. Формула для визначення вузлових реакцій в актуальній конфігурації геометрично нелінійного SE загального типу (рис. 2) за формою співпадає з виразом для визначення вузлових реакцій в лінійній постановці [3]:

$$\{r_\sigma\} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[[B]^T \{\sigma\} \sqrt{g} H_i H_j \right]_{(x_i^1, x_j^2)}, \quad (27)$$

де I, J - кількість точок інтегрування по x^1, x^2 відповідно, H_i, H_j - вагові функції, x_i^1, x_j^2 - координати точок інтегрування.

В формулі (27) при визначенні напружень використовується матриця $[\bar{B}]$, яка пов'язує переміщення і нелінійні деформації в актуальній конфігурації:

$$[\bar{B}]^{(s_1, s_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \bar{z}'_{,1} S_1 + (\bar{z}'_{,12} S_1 + 2\bar{z}'_{,1} S_1 S_2) x^2 & \frac{1}{2} \bar{z}'_{,1} S_1 + (\bar{z}'_{,12} S_1 + 2\bar{z}'_{,1} S_1 S_2) x^2 \\ \frac{1}{4} (\bar{z}'_{,1} S_2 + \bar{z}'_{,2} S_1) & \frac{1}{4} (\bar{z}'_{,1} S_2 + \bar{z}'_{,2} S_1) \\ \frac{1}{2} \bar{z}'_{,2} S_2 + (\bar{z}'_{,12} S_2 + 2\bar{z}'_{,2} S_1 S_2) x^1 & \frac{1}{2} \bar{z}'_{,2} S_2 + (\bar{z}'_{,12} S_2 + 2\bar{z}'_{,2} S_1 S_2) x^1 \\ 0 & \frac{1}{4} \bar{z}'_{,2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\bar{z}'_{,2}}{2} u_{2'(s_1, s_2)} + \bar{z}'_{,2} u_{2'(s_1, s_2)} S_\alpha \right) x^\alpha \end{bmatrix}$$

де $\bar{z}'_{,v'}$, $\bar{z}'_{,\beta}$ - обчислюються по формулам (4).

Матриця $[B]$ в формулі (27) визначається за допомогою виразу:

$$[B]^{(s_1, s_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} Z'_{,1} S_1 + (Z'_{,12} S_1 + 2Z'_{,1} S_1 S_2) x^2 & \frac{1}{2} Z'_{,1} S_1 + (Z'_{,12} S_1 + 2Z'_{,1} S_1 S_2) x^2 \\ \frac{1}{4} (Z'_{,1} S_2 + Z'_{,2} S_1) & \frac{1}{4} (Z'_{,1} S_2 + Z'_{,2} S_1) \\ \frac{1}{2} Z'_{,2} S_2 + (Z'_{,12} S_2 + 2Z'_{,2} S_1 S_2) x^1 & \frac{1}{2} Z'_{,2} S_2 + (Z'_{,12} S_2 + 2Z'_{,2} S_1 S_2) x^1 \\ 0 & \frac{1}{4} Z'_{,2} + \frac{1}{2} \left(\frac{Z'_{,2}}{2} u_{2'(s_1, s_2)} + Z'_{,2} u_{2'(s_1, s_2)} S_\alpha \right) x^\alpha \end{bmatrix}$$

де $Z'_{,v'}$, $Z'_{,\beta}$ - обчислюються по формулам (8).

Матриця жорсткості геометрично нелінійного оболонкового СЕ загального типу обчислюється за формулою:

$$[k] = \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^J \left[[b]^T [D] [b] \sqrt{g} H_i H_j \right]_{(x_i^1, x_j^2)}. \quad (28)$$

де I, J - кількість точок інтегрування по x^1, x^2 відповідно, H_i, H_j - вагові функції, x_i^1, x_j^2 - координати точок інтегрування.

$$[b]^{(s_1, s_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} z'_{,1} S_1 + (z'_{,12} S_1 + 2z'_{,1} S_1 S_2) x^2 & \frac{1}{2} z'_{,2} S_1 + (z'_{,12} S_1 + 2z'_{,1} S_1 S_2) x^2 \\ \frac{1}{4} (z'_{,1} S_2 + z'_{,2} S_1) & \frac{1}{4} (z'_{,1} S_2 + z'_{,2} S_1) \\ \frac{1}{2} z'_{,2} S_2 + (z'_{,12} S_2 + 2z'_{,2} S_1 S_2) x^1 & \frac{1}{2} z'_{,2} S_2 + (z'_{,12} S_2 + 2z'_{,2} S_1 S_2) x^1 \\ 0 & \frac{1}{4} z'_{,2} + \frac{1}{2} \left(\frac{z'_{,2}}{2} u_{2'(s_1, s_2)} + z'_{,2} u_{2'(s_1, s_2)} S_\alpha \right) x^\alpha \end{bmatrix}$$

Матриця $[b]$ обчислена в проміжній відрахунковій конфігурації.

4. Алгоритм розв'язання систем нелінійних рівнянь.

Розв'язання систем нелінійних рівнянь. У загальному випадку при розв'язку нелінійних задач використано кроковий алгоритм за параметрами навантаження і часу в поєднанні з ітераційною процедурою Ньютона-Кантаровича по формулі:

$$\{u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + \{\Delta u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + [K^*]^{-1} \left(\{Q\}_n^m - \{R\}_n^m \right), \quad (29)$$

де $[K^*]$ - лінералізована матриця жорсткості в системі рівнянь МСЕ, обчислена в проміжній відрахунковій конфігурації з урахуванням корекції тензора пружних констант згідно формули (тензор миттєвих констант) і координат вузлів дискретної моделі по формулі $z_m^\alpha = z_{m-1}^\alpha + \Delta u_m^\alpha$; $\{Q\}_n^m, \{R\}_n^m$ - вектори вузлових зусиль і реакцій, визначені в актуальній конфігурації. Компоненти вектора вузлових реакцій обчислюються з урахуванням, як фізичної так і геометричної нелінійності.

Обчислення здійснюються до виконання умови:

$$\left\| \{Q\}_n^m \right\| - \left\| \{R\}_n^m \right\| \leq \zeta \left\| \{Q\}_n^m \right\|, \quad (30)$$

де ζ - параметр точності розв'язання системи нелінійних рівнянь; $\left\| \{Q\}_n^m \right\|$ - сума квадратів вузлових зусиль СЕМ; $\left\| \{R\}_n^m \right\|$ - сума квадратів реакцій СЕМ.

Для зменшення обчислюваних витрат при розв'язанні задач пружно-пластичності, пов'язаних з необхідністю перерахунку на кожному кроці коефіцієнтів матриці жорсткості, широко використовується спрощений алгоритм (31), з матрицею жорсткості, елементи якої обчислюються без урахування корекції тензора пружних сталей. Тоді формулу (39) можна записати у вигляді:

$$\{u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + \{\Delta u\}_n^m = \{u\}_{n-1}^m + [K]^{-1} (\{Q\}_n^m - \{R\}_n^m), \quad (31)$$

де матриця $[K]$ обчислюється один раз на першому кроці з використанням тензора пружних констант C^{ijkl} .

Визначення температурних деформацій. Фізичні компоненти тензора температурних деформацій в місцевій системі координат визначаються виразом:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^T = \frac{\varepsilon_{ij}^T}{\sqrt{g_{(ii)}g_{(jj)}}}. \quad (32)$$

У відповідності до МССЕ [7] в поперечному перетині, що відповідає точці інтегрування температурні деформації, подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T = \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T + \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T x^{(3-\alpha)}; \quad \tilde{\varepsilon}_{12}^T = \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T; \quad \tilde{\varepsilon}_{\alpha 3}^T = 0; \quad \tilde{\varepsilon}_{33}^T = \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T + \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta}^T x^\beta. \quad (33)$$

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент фізичних температурних деформацій в ряд Маклорена з урахуванням їх подання в місцевій системі координат за (12):

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \frac{1}{g_{\alpha(\alpha)}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T; & \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T &= \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \frac{\partial (\alpha_T \Delta T)}{\partial x^{(3-\alpha)}} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T_{,(3-\alpha)}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T &= \frac{1}{\sqrt{g_{11} g_{22}}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{12} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}; & \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T &= \frac{1}{g_{33}} \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta}^T &= \frac{\partial \tilde{\varepsilon}_{33}^T}{\partial x^\beta} = \frac{\partial (\alpha_T \Delta T)}{\partial x^\beta} = \overset{\circ}{\alpha}_T \Delta T_{,\beta}; \end{aligned} \quad (34)$$

$$\text{де } \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}^T = \varepsilon_{ij}^T \Big|_{x^\alpha=0}, \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{ij,\beta}^T = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^T}{\partial x^\beta} \Big|_{x^\beta=0}.$$

Коефіцієнтом розкладання $\frac{\partial^2 \varepsilon_{33}^T}{\partial x^1 \partial x^2} \Big|_{x^\alpha=0}$ нехтуємо, як величиною більш

високого порядку малості.

Згідно формули (32) та підставляючи (34) знаходимо:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta} T \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} = \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta} T_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{12} \sqrt{\overset{\circ}{g}_{11} \overset{\circ}{g}_{22}} = \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta} T \overset{\circ}{g}_{12}; \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T = \overset{\circ}{\varepsilon}_{33} \overset{\circ}{g}_{33} = \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta} T \overset{\circ}{g}_{33}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta}^T &= \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta} \overset{\circ}{g}_{33} = \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{\Delta} T_{,\beta} \overset{\circ}{g}_{33}.\end{aligned}\quad (35)$$

Подамо коефіцієнти розкладення компонент температурних деформацій через вузлові температури та їх похідні:

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \overset{\circ}{\Delta} T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \overset{\circ}{\Delta} T_{(S_1 S_2)} 2S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \overset{\circ}{\Delta} T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{12}; \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T = \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \overset{\circ}{\Delta} T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{33}; \\ \overset{\circ}{\varepsilon}_{33,\beta}^T &= \frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4} \sum_{S_1=\pm 1} \sum_{S_2=\pm 1} \overset{\circ}{\Delta} T_{(S_1 S_2)} \overset{\circ}{g}_{33} 2S_{\beta}.\end{aligned}\quad (36)$$

Співвідношення (36), що описують залежність між коефіцієнтами розкладення деформацій у ряд Маклорена і температурою, у матричній формі мають наступний вигляд:

$$\{\overset{\circ}{\varepsilon}^T\} = [B^T] \{T\} \quad (37)$$

де

$$\begin{aligned}\{T\}^T &= \{T_{(-1,-1)} \quad T_{(1,-1)} \quad T_{(-1,1)} \quad T_{(1,1)}\}; \\ \{\overset{\circ}{\varepsilon}^T\}^T &= \{\overset{\circ}{\varepsilon}_{11}^T \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{12}^T \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{22}^T \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{23}^T \quad 2\overset{\circ}{\varepsilon}_{13}^T \quad \overset{\circ}{\varepsilon}_{33}^T\}; \\ [B^T] &= \left[[B^T]^{(-1,-1)} \quad [B^T]^{(1,-1)} \quad [B^T]^{(-1,1)} \quad [B^T]^{(1,1)} \right].\end{aligned}\quad (38)$$

Значення компонент підматриць $[B^T]^{(S_1, S_2)}$, у виразі (38) для неоднорідних призматичних тіл визначаються відповідно до формул (36) з урахуванням обчислених за (11) значеннями компонент метричного

тензору для призматичних тіл:

$$[B^T]^{(S_1, S_2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{4} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{11} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{\alpha}_T S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} x^2 \\ \frac{1}{2} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{12} \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{22} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{\alpha}_T S_{(3-\alpha)} \overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)} x^1 \\ \frac{1}{4} \overset{\circ}{\alpha}_T \overset{\circ}{g}_{33} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{\alpha}_T S_{\alpha} \overset{\circ}{g}_{33} x^{\alpha} \end{bmatrix}$$

Визначення деформацій пластичності. В загальному випадку при розв'язанні системи нелінійних рівнянь, на початку кожної ітерації n кроку m компоненти тензора напружень $(\tilde{\sigma}^{ij})_n^m$, що входять до використовуваного в (29) вектора вузлових реакцій, обчислюються за формулою:

$$(\tilde{\sigma}^{ij})_n^m = (\tilde{\sigma}^{ij})_{n-1}^m + (\Delta \tilde{\sigma}^{ij})_n^m, \quad (39)$$

де $(\tilde{\sigma}^{ij})_n^m$ – приращення напружень, які визначаються згідно з законом Гука (19) за величиною приращення повних деформацій.

Дійсні значення напружень $(\tilde{\sigma}^{ij})_n^m$, при наявності фізично нелінійних деформацій, що використовуються для визначення компонент вектора вузлових реакцій $\{R\}_n^m$, обчислюються за формулою:

$$(\tilde{\sigma}^{ij})_n^m = \frac{1}{3} \delta^{ij} (\tilde{\sigma}^{ij})_n^m + \overline{(s^{ij})}_n^m = (\sigma_o)_n^m + \overline{(s^{ij})}_n^m, \quad (40)$$

де $\overline{(s^{ij})}_n^m$ – компоненти девіатора напружень, що враховують наявність деформацій пластичності або повзучості.

Визначення компонент девіатора $\overline{(s^{ij})}_n^m$ тензора дійсних напружень, що входять до формули (40), при розв'язку задачі пластичності, здійснюється з урахуванням поточних значень межі текучості τ_s [9]:

$$\overline{(s^{ij})}_n^m = (s^{ij})_n^m \frac{\tau_s}{\tau} \quad (41)$$

де $\tau = \sqrt{s_{ij} s^{ij}} / 2$ – поточне значення інтенсивності дотичних напружень.

Пластичне течіння описується шляхом зберігання девіатора напружень на границі пружності. На рис. 4 показані напруження в

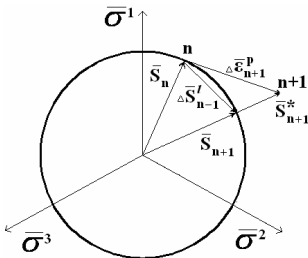


Рис. 4

стані n . В просторі головні напруження $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3$ у відповідно з умовою текучості Мізеса поверхню текучості являє собою прями́й круговий циліндр, слід якого на девіаторній площині ($S_1+S_2+S_3=0$, де S_1, S_2, S_3 - девіатори головних напружень) - коло радіусом τ_s .

Після збільшення деформацій напружень змінюються і переходять у стан $(n+1)$. Проте стан $(n+1)$ знаходиться за колом текучості і у відповідності з прийнятою умовою текучості досягатися не може. Замість цього в матеріалі відбувається пластичне течіння, а напруження перебувають на межі пружності, тобто на колі текучості.

Пластична частина деформацій перпендикулярна до кривої текучості і необхідно обмежити саме ті напруження, які пов'язані з цією частиною деформацій. Тому новий напружений стан замість стану $(n+1)$ відповідатиме точці, яка знаходиться на перпендикулярі до окружності, проведеному з точки, що відповідає стану $(n+1)$.

Порядок виконання операцій при вирішенні завдання пластичного деформування з урахуванням великих переміщень, в основному, збігається з порядком вирішення геометрично нелінійної задачі, описаним раніше. Додатковою операцією є корекція напружень відповідно до формули (41). Корекція проводиться на кожній ітерації тільки в тих випадках, коли виконується умова

$$\tau_s < T. \quad (42)$$

Далі проводиться обчислення дійсних значень прирощень деформацій пластичності $(\Delta \varepsilon_{ij}^p)_m$:

$$(\varepsilon_{ij}^p)_m = (\varepsilon_{ij}^p)_{m-1} + (\Delta \varepsilon_{ij}^p)_m = (\varepsilon_{ij}^p)_{m-1} + \left(1 - \frac{\tau_s}{\tau_i}\right) (\bar{s}_{ij})_m / G_1. \quad (43)$$

Для з'ясування можливості визначення розвитку зон пластичності в тонкостінних конструкціях, апроксимуючи по товщині одним скінченим елементом, виконаний пружно-пластичний розрахунок шарнірно опертої балки завантаженої рівномірно розподіленим навантаженням (рис. 5) при наступних механічних характеристиках: $E=1.0$; $\nu=0.3$. За товщиною скінченого елемента приймалося п'ять Гаусових точок інтегрування.

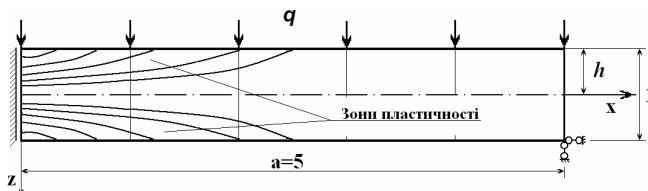


Рис. 5

Аналітичне рішення задачі наведене в роботі [8], де зв'язок координат між зонами пластичності з інтенсивністю заданого розподіленого навантаження q представлена у вигляді:

$$Z^2 - 3h^2 = 2h^2 \frac{q}{q_0} \left(\frac{x^2}{a^2} - 1 \right). \quad (44)$$

Тут h - половина висоти балки; a - половина довжини балки; q_0 - величина розподіленого навантаження, при якій з'являються пластичні деформації,

$$q_0 = \frac{4M}{3a^2},$$

де M - значення згинального моменту.

На рис. 6 зображена отримана за допомогою рівності (44) крива

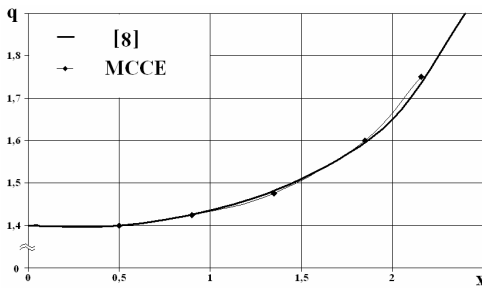


Рис. 6

залежності абсциси X зони пластичності від величини інтенсивності навантаження q при фіксованих значеннях ординати Z , рівним 0.4531 (координата Гаусової точки). Ромбиками нанесені результати MCCE рішення.

На рис. 7 зображені графіки напруг σ залежно від X по перетину $Z=0.4531$ при різних значеннях навантаження q . Гранична величина σ відповідна $q_0=1.267$, що не викликає пластичних деформацій дорівнює 95.

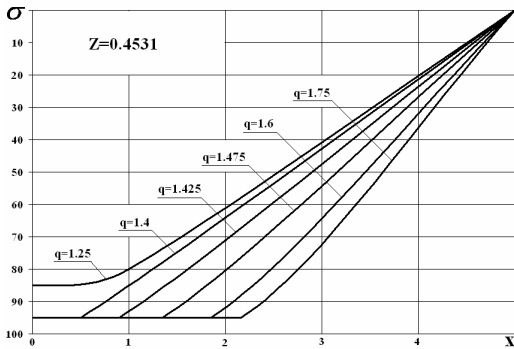


Рис. 7

На графіку видно хорошу узгодженість рішення за пропонованою методикою МССЕ та аналітичних результатів.

Висновок. Розроблена методика дозволяє з високою точністю визначати напружено-деформований стан тонкостінних конструкцій у фізичній і геометрично нелінійних постановках при використанні одного СЕ по товщині.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Сахаров А.С., Топор А.Г.* Полуаналитический метод конечных элементов в механике деформируемых тел – К. : НИИСМ, 1993. – 376 с.
2. *Баженов В. А., Гуляр О.И., Сахаров О.С., Пискунов С.О.* Напіваналітичний метод скінчених елементів в задачах руйнування просторових тіл : Монографія – К. : КНУБА, 2005. – 298 с.
3. *Пискунов С. О.* Особливості використання моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) при лінійних розрахунках оболонок і пластин / С. О. Пискунов, І. І. Солодей, Ю. В. Максим'юк, А. Д. Солоденко // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2013. – Вип. 91. – С. 59-75.
4. *Блох В.И.* Теория упругости / В. И. Блох. – Х. : Изд. Харьковск. Гос. Университета, 1964. – 484 с.
5. *Качанов Л.М.* Основы теории пластичности / Л. М. Качанов. – М. : Физматгиз, 1960. – 456 с.
6. *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости/ А. И. Лурье. – М. : Наука, 1980. – 512с.
7. *Сахаров А.С.* Метод конечных элементов в механике твердых тел / А. С. Сахаров, В. Н. Кислоокий, В. В. Киричевский. – К. : Вища шк., 1982. – 480 с.
8. *Соколовский В.В.* Теория пластичности / В. В. Соколовский. – М. : Высш. шк., 1969. – 608 с.
9. *Уилкинс М.Л.* Расчет упруго-пластических течений / М. Л. Уилкинс // Вычислительные методы в гидротехнике. – М. : Мир, 1967. – С. 212–263.

REFERENCES

1. *Bazhenov V.A., Hulyar A.Y., Sakharov A.S., Topor A.H.* Poluanalytycheskyy metod konechnykh elementov v mekhanyke deformyruemykh tel (Semi-analytical finite element method in the mechanics of deformable bodies) – K. : NYYSM, 1993. – 376s.
2. *Bazhenov V. A., Hulyar O.I., Sakharov O.S., Pyskunov S.O.* Napivanalitychnyy metod skinchennykh elementiv v zadachakh ruynuvannya prostorovykh til: Monohrafiya – K. : KNUBA, 2005. – 298 s.
3. *Pyskunov S.O.* Osoblyvosti vykorystannya momentnoyi skhemy skinchennykh elementiv (MSSE) pry liniynykh rozrakhunkakh obolonok i plastyn (Features of torque finite element scheme (MSSE) with linear calculations of shells and plates) / S.O. Pyskunov, I.I. Solodey, Yu.V. Maksym"yuk, A.D. Solodenko // Opir materialiv i teoriya sporud. 2013. – Vyp. 91. – S. 59 75.
4. *Blokh V.Y.* Teoryya upruhosti „Theory of elasticity” / V.Y. Blokh. – Kh.: Yzd. Khar'kovsk. Hos. Unyversyteta, 1964. – 484 s
5. *Kachanov L.M.* Osnovy teoryu plastychnosti (Fundamentals of the theory of plasticity) / L. M. Качанов. – М.: Fyzmathyz, 1960. – 456 s.
6. *Lur'e A.Y.* Nelyneynaya teoryya upruhosti (Nonlinear theory of elasticity) / A.Y. Lur'e. – М.: Nauka, 1980. – 512s.

7. *Sakharov A.S.* Metod konechnykh elementov v mekhanyke tverdykh tel (The Finite Element Method in Mechanics of Solids) / A.S. Sakharov, V.N. Kyslookyy, V.V. Kyrychevskyy. – К.: Vyshcha shk., 1982. – 480 s.
8. *Sokolovskyy V.V.* Teoryya plastychnosti (Theory of Plasticity) / V.V. Sokolovskyy. – М.: Vyssh. shk., 1969. – 608 s.
9. *Uylkyns M.L.* Raschet upruho-plastycheskykh techeny / M.L. Uylkyns // Vychyslytel'nye metody v hidrotekhnike (Calculation of elastic-plastic flows) – М.: Мур, 1967. – S. 212–263.

Стаття надійшла до редакції 03.12.2013 р.

Bazhenov V.A., Sacharov A.S., Guliar A.I., Pyskunov S.O., Maksymiuk Y.V.

ОСОБЕННОСТИ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МОМЕНТНОЙ СХЕМЫ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ (МСКЭ) ПРИ НЕЛИНЕЙНЫХ РАСЧЕТАХ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН

На основе МСКЭ создан оболочечный КЭ общего типа, который позволяет проводить анализ напряженно-деформированного состояния осесимметричных оболочек и пластин в задачах физической и геометрической нелинейности. Приведены основные положения нелинейной теории упругости, алгоритмы решения системы нелинейных уравнения для определения температурных и пластических деформаций.

Ключевые слова: метод конечных элементов, температурные деформации, деформации пластичности, геометрически нелинейное деформирование.

Bazhenov V.A., Sacharov A.S., Guliar A. I., Pyskunov S.O., Maksymiuk Y.V.,

FEATURES APPLICATION CIRCUIT MOMENT FINITE ELEMENT (MSSE) NONLINEAR CALCULATIONS OF PLATES AND SHELLS

Based MSSE created shell CE general type, which allows you to analyze the stress-strain state of axisymmetrical shells and plates in problems of physical and geometric nonlinearity. The principal nonlinear elasticity theory, algorithms for solving systems of nonlinear equations for determining the temperature and plastic deformation.

Keywords: finite element method, temperaturational strain, plastic strain, geometrically nonlinear deformation.