УДК 539.3

В.П. Андрієвський[1], канд. техн. наук
Ю.В. Максим'юк[1], канд. техн. наук

[1]*Київский національний університет будівництва і архітектури*
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680

МЕТОДИКА РОЗВ'ЯЗАННЯ ВІСЕСИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ СТАЦІОНАРНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ТА ТЕРМОПРУЖНОСТІ НА ОСНОВІ МССЕ

Наведені основні розрахункові співвідношення вісесиметричних задач стаціонарної теплопровідності та термопружності в криволінійній системи координат. На базі основних положень моментної схеми скінченних елементів отримано співвідношення для визначення температурних деформацій. Проведені чисельні дослідження для обґрунтування достовірності результатів.

Ключові слова: теплопровідність, термопружність, вісесиметричні тіла, моментна схема скінченних елементів (МССЕ).

Вступ. Значна кількість відповідальних об'єктів сучасної техніки, таких як, ротори парових турбін і газотурбінних установок знаходяться під дією термосилового навантаження пов'язаного з нерівномірним розподілом температури. В значній кількості випадків їх експлуатація відбувається при усталених значеннях перелічених зовнішніх факторів. В цьому випадку визначення нерівномірних температурних полів потребує розв'язку стаціонарної вісесиметричної задачі теплопровідності. Розв'язувальні співвідношення задачі термопружності отримані на основі методики моментної схеми скінченних елементів [1].

1. Матриця теплопровідності для вісесиметричних тіл в місцевій криволінійній системі координат. При дослідженні температурних полів вісесиметричних тіл обертання на основі МСЕ доцільно використовувати дві системи координат: базисну і місцеву. Розглянемо вісесиметричне тіло (рис. 1) в базисній круговій циліндричній системі координат $z^{i'}$, вісь $z^{1'}$ якої співпадає з віссю обертання, а $z^{2'}$ спрямована вздовж радіуса. Вісі $z^{1'}$ та $z^{2'}$ базисної системи координат розташовані в площині меридіонального перетину тіла обертання, а вісь $z^{3'}$ орієнтована по окружній координаті. Базисна система координат призначена для завдання вихідної інформації про геометрію об'єкта та граничні умови. В свою чергу місцева система координат x^i призначена для виведення розрахункових співвідношень скінченного елемента (СЕ). Вона природньо пов'язана з геометрією меридіонального перетину досліджуваного об'єкта, при цьому вісь x^3 збігається за напрямком з $z^{3'}$.

Будемо вважати, що в кожній точці тіла відомі компоненти тензора перетворення $z^{i'}_{,j}$ місцевої та базисної систем координат [2]:

$$z^{i'}_{,j} = \frac{\partial z^{i'}}{\partial x^j}, \qquad z^{\alpha'}_{,3} = z^{3'}_{,\alpha} = 0 .$$

Тут і в подальшому всі індекси, позначені грецькими буквами, будуть приймати значення 1, 2, а позначені латинськими – 1, 2, 3.

Компоненти метричного тензору g_{mn} в місцевій системі координат подамо через компоненти метричного тензору базисної системи за формулою:

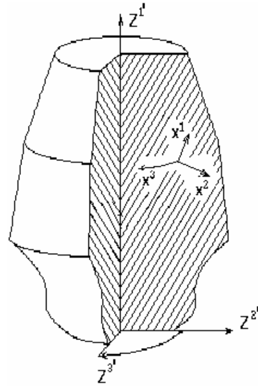


Рис. 1

$$g_{mn} = z^{i'}_{,m} z^{j'}_{,n} g_{i'j'} . \tag{1}$$

Для визначення розподілення температур із використанням МСЕ в якості вихідного взято варіаційне рівняння вісесиметричної задачі стаціонарної теплопровідності [3]:

$$\delta\chi = \int\limits_{x^1} \int\limits_{x^2} \lambda_T \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \delta T}{\partial x^\beta} \overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta} \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^1 dx^2 = 0 . \tag{2}$$

де $\overset{\circ}{g}$ - визначник матриці, побудованої з компонент метричного тензору; λ_T – коефіцієнт теплопровідності; T – функція, що описує розподілення температур в площині досліджуваного об’єкта.

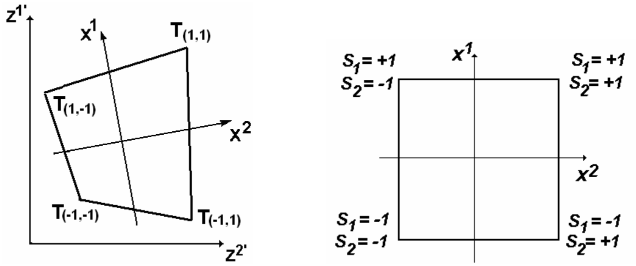
При скінченноелеметній апроксимації досліджуваного об’єкта для системи з N СЕ зазначене рівняння (2) набуває вигляду:

$$\delta\chi = \sum_{n=1}^{N} \delta\chi_n = \sum_{n=1}^{N} \int\limits_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2} \int\limits_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} \lambda_T \left(\frac{\partial T}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \delta T}{\partial x^\beta} \overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta} \right) \sqrt{\overset{\circ}{g}} dx^1 dx^2 = 0 . \tag{3}$$

Для чисельного розв’язання задач теплопровідності розроблений вісесиметричний скінченний елемент, загальний вигляд якого в базисній (а) і місцевій (б) системах координат наведений на рис. 2.

В межах СЕ передбачається, що коефіцієнт теплопровідності λ_T та значення компонент метричного тензору g^{ij} несуттєво змінюється в площини СЕ і приймаються рівними їх відповідним значенням в центрі:

$$\lambda_T = \overset{\circ}{\lambda}_T = \lambda_T \big|_{x^\alpha=0} , \qquad g^{ij} = \overset{\circ}{g}{}^{ij} = g^{ij} \Big|_{x^\alpha=0} .$$



а *б*

Рис. 2

В якості невідомих при розв’язанні задачі стаціонарної теплопровідності приймається значення температури в вузлах елемента $T_{(S_1,S_2)}$.

Розподілення температури у межах СЕ описується білінійним законом:

$$T=\sum_{S_1=\pm1}\ \sum_{S_2=\pm1} T_{(S_1S_2)}\left(\frac{1}{2}S_1x^1+\frac{1}{2}S_2x^2+S_1S_2x^1x^2+\frac{1}{4}\right), \tag{4}$$

де $T_{(S_1S_2)}$ – вузлові значення температури.

Вирази для похідних від температури мають вигляд:

$$T,_\alpha=\sum_{S_1=\pm1}\ \sum_{S_2=\pm1} T_{(S_1S_2)}\left(\frac{1}{2}+S_{(3-\alpha)}x^{(3-\alpha)}\right)S_\alpha . \tag{5}$$

Після підстановки в (3) значень температури (4) та її похідних (5) отримаємо:

$$\delta\chi_n=\int\limits_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2}\ \int\limits_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2}\lambda_T\left[\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2\pm1}\left(T_{(S_1S_2)}\left(\frac{1}{2}+S_{(3-\alpha)}x^{(3-\alpha)}\right)S_\alpha\right)\times\right.$$

$$\left.\times\sum_{P_1=\pm1}\sum_{P_2=\pm1}\left(\delta T_{(P_1P_2)}\left(\frac{1}{2}+P_{(3-\beta)}x^{(3-\beta)}\right)P_\beta\right)\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta}\right]\sqrt{\overset{\circ}{g}}\,dx^1dx^2 . \tag{6}$$

Ґрунтуючись на введених гіпотезах про постійність теплофізичних і геометричних характеристик в межах поперечного перерізу СЕ, а також після обчислення наступних інтегралів по площі СЕ:

$$\int\limits_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2}\ \int\limits_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} dx^1dx^2=1,\quad \int\limits_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2}\ \int\limits_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} x^\alpha dx^1dx^2=0,$$

$$\int\limits_{x^1=-1/2}^{x^1=1/2}\ \int\limits_{x^2=-1/2}^{x^2=1/2} x^\alpha x^\beta dx^1dx^2=\begin{cases}0, & \alpha\neq\beta\\ \frac{1}{12}, & \alpha=\beta\end{cases}, \tag{7}$$

отримаємо:

$$\delta\chi_n = \lambda_T \sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\sum_{P_1=\pm1}\sum_{P_2=\pm1}\left[T_{(S_1,S_2)}\delta T_{(P_1,P_2)}\left(\frac{1}{4}S_\alpha P_\beta \overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta}+\frac{1}{12}S_1S_2P_1P_2\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\alpha}\right)\right]\sqrt{\overset{\circ}{g}}$$

або в матричному вигляді:

$$\delta\chi_n = \sum_{l=1}^{L}\sum_{m=1}^{L}\left[\delta\{T\}^T[A]\{T\}\right]_l \, , \tag{8}$$

де $\{T\}^T = \{T_{(-1;-1)}\ \ T_{(1;-1)}\ \ T_{(-1;1)}\ \ T_{(1;1)}\}$ – вектор температури; $[A]$ – матриці теплопровідності вісесиметричного СЕ, що обчислюються за формулою:

$$[A]_l = \left(\frac{1}{4}S_\alpha P_\beta \overset{\circ}{g}{}^{\alpha\beta}+\frac{1}{12}S_1S_2P_1P_2\overset{\circ}{g}{}^{\alpha\alpha}\right)\sqrt{\overset{\circ}{g}}\,\lambda_l \, . \tag{9}$$

З метою доведення достовірності результатів розв’язку задачі стаціонарної теплопровідності із використанням отриманих співвідношень розглянуто тестову задачу про теплопровідність нескінченого циліндру. Дискретна модель МСЕ наведена на рис. 3.

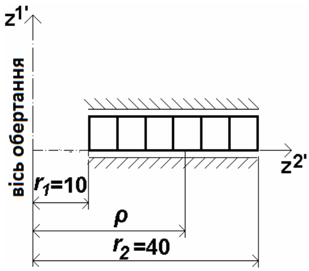


Рис. 3

Вихідні дані: $r_1 = 10$ *мм*, $r_2 = 40$ *мм*, температура на внутрішній поверхні стінки $T_1 = 100^\circ C$, температура на зовнішній поверхні стінки $T_2 = 400^\circ C$. Поверхні вздовж осі $z^{2'}$ абсолютно теплоізольовані. В якості еталонного прийнятий аналітичний розв’язок отриманий в роботі [4]. Як видно, отримані результати (табл. 1) майже повністю збігаються із еталонним розв’язком.

Таблиця 1

ρ, *мм*	Температура $T, ^\circ C$		Похибка, %
	Аналітично [4]	МССЕ	
10	100	100	0
15	187,74	186,62	0,60
20	250	247,87	0,85
25	298,27	296,12	0,72
30	337,74	336,62	0,33
35	371,10	370,33	0,21
40	400	400	0

2. Визначення параметрів напружено-деформованого стану при температурному навантаженні. При термопружному деформуванні напруження визначаються згідно узагальненого закону Гука:

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl}\varepsilon_{kl}^{e} . \qquad (10)$$

Компоненти тензора пружних сталих C^{ijkl} для ізотропного тіла знаходимо з співвідношення:

$$C^{ijkl} = \lambda g^{ij} g^{kl} + \mu (g^{jl} g^{ik} + g^{il} g^{jk}) ,$$

де коефіцієнти Ляме λ та μ визначаються через коефіцієнт Пуассона $\nu = \nu(z^{i'}, T)$ і модуль пружності матеріалу (модуль Юнга) $E = E(z^{i'}, T)$:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)} .$$

При термопружному деформуванні вісесиметричних тіл компоненти повної деформації ε_{ij} можуть бути подані сумою пружних деформацій ε_{ij}^{e} та температурних деформацій ε_{ij}^{T}, тобто:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{e} + \varepsilon_{ij}^{T} . \qquad (11)$$

Для ізотропного матеріалу температурні складові компонент тензора деформацій визначаються за формулою:

$$\varepsilon_{ij}^{T} = \alpha_T \Delta T g_{ij} , \qquad (12)$$

де $\alpha_T = \alpha_T(z^{k'}, T)$ – коефіцієнт лінійного розширення матеріалу, $\Delta T = T - T_0$ – приріст температури в досліджуваній точці тіла відносно його вихідного стану при $T = T_0$.

Фізичні компоненти тензора температурних деформацій в місцевій системі координат визначаються виразом:

$$\tilde{\varepsilon}_{ij}^{T} = \frac{\varepsilon_{ij}^{T}}{\sqrt{g_{(ii)} g_{(jj)}}} . \qquad (13)$$

У відповідності до МССЕ [1] в поперечному перетині температурні деформації подамо відрізками ряду Маклорена:

$$\tilde{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}^{T} = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}{}_{\alpha(\alpha)}^{T} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}{}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}^{T} x^{(3-\alpha)} ;$$

$$\tilde{\varepsilon}_{12}^{T} = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}{}_{12}^{T} ; \quad \tilde{\varepsilon}_{33}^{T} = \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}{}_{33}^{T} + \overset{\circ}{\tilde{\varepsilon}}{}_{33,\beta}^{T} x^{\beta} . \qquad (14)$$

Запишемо коефіцієнти розкладання компонент фізичних температурних деформацій в ряд Маклорена з урахуванням їх подання в місцевій системі координат:

$$\mathring{\tilde{\varepsilon}}^{T}_{\alpha(\alpha)}=\frac{1}{\mathring{g}_{\alpha(\alpha)}}\mathring{\varepsilon}_{\alpha(\alpha)}=\mathring{\alpha}_T\,\Delta\mathring{T};$$

$$\mathring{\tilde{\varepsilon}}^{T}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}=\frac{\partial\tilde{\varepsilon}^{T}_{\alpha(\alpha)}}{\partial x^{(3-\alpha)}}=\frac{\partial(\alpha_T\Delta T)}{\partial x^{(3-\alpha)}}=\mathring{\alpha}_T\,\Delta\mathring{T}_{,(3-\alpha)};$$

$$\mathring{\tilde{\varepsilon}}^{T}_{12}=\frac{1}{\sqrt{\mathring{g}_{11}\,\mathring{g}_{22}}}\mathring{\varepsilon}^{T}_{12}=\mathring{\alpha}_T\,\Delta\mathring{T}\frac{\mathring{g}_{12}}{\sqrt{\mathring{g}_{11}\,\mathring{g}_{22}}};$$

$$\mathring{\tilde{\varepsilon}}^{T}_{33}=\frac{1}{\mathring{g}_{33}}\mathring{\varepsilon}_{33}=\mathring{\alpha}_T\,\Delta\mathring{T};$$

$$\mathring{\tilde{\varepsilon}}^{T}_{33,\beta}=\frac{\partial\tilde{\varepsilon}^{T}_{33}}{\partial x^{\beta}}=\frac{\partial\left(\alpha_T\Delta T\right)}{\partial x^{\beta}}=\mathring{\alpha}_T\,\Delta\mathring{T}_{,\beta},\qquad(15)$$

де $\mathring{\varepsilon}^{T}_{ij}=\varepsilon^{T}_{ij}\Big|_{x^{\alpha}=0}$, $\quad\mathring{\varepsilon}^{T}_{ij,\beta}=\dfrac{\partial\varepsilon^{T}_{ij}}{\partial x^{\beta}}\Bigg|_{x^{\beta}=0}$.

Згідно формули (13) та підставляючи (15) знаходимо:

$$\mathring{\varepsilon}^{T}_{\alpha(\alpha)}=\mathring{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha)}\,\mathring{g}_{\alpha(\alpha)}=\mathring{\alpha}_T\,\Delta\mathring{T}\,\mathring{g}_{\alpha(\alpha)};$$

$$\mathring{\varepsilon}^{T}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}=\mathring{\tilde{\varepsilon}}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}\,\mathring{g}_{\alpha(\alpha)}=\mathring{\alpha}_T\,\Delta\mathring{T}_{,(3-\alpha)}\,\mathring{g}_{\alpha(\alpha)};$$

$$\mathring{\varepsilon}^{T}_{12}=\mathring{\tilde{\varepsilon}}_{12}\sqrt{\mathring{g}_{11}\,\mathring{g}_{22}}=\mathring{\alpha}_T\,\Delta\mathring{T}\,\mathring{g}_{12};$$

$$\mathring{\varepsilon}^{T}_{33}=\mathring{\tilde{\varepsilon}}_{33}\,\mathring{g}_{33}=\mathring{\alpha}_T\,\Delta\mathring{T}\,\mathring{g}_{33};$$

$$\mathring{\varepsilon}^{T}_{33,\beta}=\mathring{\tilde{\varepsilon}}_{33,\beta}\,\mathring{g}_{33}=\mathring{\alpha}_T\,\Delta\mathring{T}_{,\beta}\,\mathring{g}_{33}.\qquad(16)$$

Подамо коефіцієнти розкладення компонент температурних деформацій через вузлові температури (4) та їх похідні (5):

$$\mathring{\varepsilon}^{T}_{\alpha(\alpha)}=\frac{\mathring{\alpha}_T}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\Delta T_{(S_1S_2)}\,\mathring{g}_{\alpha(\alpha)};$$

$$\mathring{\varepsilon}^{T}_{\alpha(\alpha),(3-\alpha)}=\frac{\mathring{\alpha}_T}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\Delta T_{(S_1S_2)}\,2S_{(3-\alpha)}\mathring{g}_{\alpha(\alpha)};$$

$$\mathring{\varepsilon}^{T}_{12}=\frac{\mathring{\alpha}_T}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\Delta T_{(S_1S_2)}\,\mathring{g}_{12};$$

$$\mathring{\varepsilon}^{T}_{33}=\frac{\mathring{\alpha}_T}{4}\sum_{S_1=\pm1}\sum_{S_2=\pm1}\Delta T_{(S_1S_2)}\,\mathring{g}_{33};$$

$$\overset{\circ}{\varepsilon}{}^{T}_{33,\beta}=\frac{\overset{\circ}{\alpha}_T}{4}\sum_{S_1=\pm 1}\sum_{S_2=\pm 1}\Delta T_{(S_1 S_2)}\,\overset{\circ}{g}_{33}\,2S_\beta\,. \tag{17}$$

Співвідношення (17), що описують залежність між коефіцієнтами розкладення деформацій у ряд Маклорена і температурою, у матричній формі мають наступний вигляд:

$$\{\overset{\circ}{\varepsilon}{}^{T}\}=[\overset{\circ}{B}{}^{T}]\{T\},\quad \{\overset{\circ}{\varepsilon}{}^{T}_{,\alpha}\}=[\overset{\circ}{B}{}^{T}_{,\alpha}]\{T\}\,, \tag{18}$$

де

$$\{T\}^T=\left\{T_{(-1;-1)}\;T_{(1;-1)}\;T_{(-1;1)}\;T_{(1;1)}\right\};$$

$$\{\overset{\circ}{\varepsilon}{}^{T}\}^T=\{\overset{\circ}{\varepsilon}{}^{T}_{11}\;\overset{\circ}{\varepsilon}{}^{T}_{12}\;\overset{\circ}{\varepsilon}{}^{T}_{22}\;\overset{\circ}{\varepsilon}{}^{T}_{33}\};$$

$$\{\overset{\circ}{\varepsilon}{}^{T}_{,\alpha}\}^T=\{\overset{\circ}{\varepsilon}{}^{T}_{(3-\alpha)(3-\alpha),\alpha}\;\overset{\circ}{\varepsilon}{}^{T}_{33,\alpha}\}\,.$$

$$[\overset{\circ}{B}{}^{T}]=\left[[\overset{\circ}{B}{}^{T}]^{(-1;-1)}\;[\overset{\circ}{B}{}^{T}]^{(1;-1)}\;[\overset{\circ}{B}{}^{T}]^{(-1;1)}\;[\overset{\circ}{B}{}^{T}]^{(1;1)}\right];$$

$$[\overset{\circ}{B}{}^{T}_{,\alpha}]=\left[[\overset{\circ}{B}{}^{T}_{,\alpha}]^{(-1;-1)}\;[\overset{\circ}{B}{}^{T}_{,\alpha}]^{(1;-1)}\;[\overset{\circ}{B}{}^{T}_{,\alpha}]^{(-1;1)}\;[\overset{\circ}{B}{}^{T}_{,\alpha}]^{(1;1)}\right]. \tag{19}$$

Значення компонент підматриць $[\overset{\circ}{B}{}^{T}]^{(S_1,S_2)}$, $[\overset{\circ}{B}{}^{T}_{,\alpha}]^{(S_1,S_2)}$ у виразі (19) для вісесиметричних тіл визначаються відповідно до формул (17) з урахуванням обчислених за (1) значеннями компонент метричного тензору для вісесиметричних тіл:

$$[\overset{\circ}{B}{}^{T}]^{(S_1,S_2)}=\begin{bmatrix}\frac{1}{4}\overset{\circ}{\alpha}_T\,\overset{\circ}{g}_{11}\\ \frac{1}{4}\overset{\circ}{\alpha}_T\,\overset{\circ}{g}_{12}\\ \frac{1}{4}\overset{\circ}{\alpha}_T\,\overset{\circ}{g}_{22}\\ \frac{1}{4}\overset{\circ}{\alpha}_T\,\overset{\circ}{g}_{33}\end{bmatrix};\qquad [\overset{\circ}{B}{}^{T}_{,\alpha}]^{(S_1,S_2)}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\overset{\circ}{\alpha}_T\,S_{(3-\alpha)}\,\overset{\circ}{g}_{\alpha(\alpha)}\\ \frac{1}{2}\overset{\circ}{\alpha}_T\,S_\alpha\,\overset{\circ}{g}_{33}\end{bmatrix}.$$

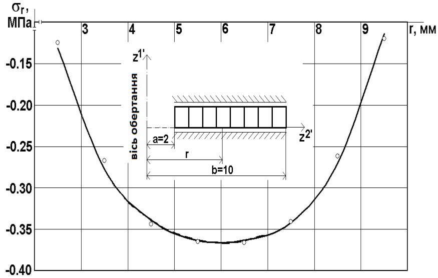
Матриця жорсткості та формули для визначення вузлових реакцій наведені в роботі [5].

Термопружне деформування товстостінної труби. Розглядається напружено деформований стан товстостінної труби нерівномірно нагрітої вздовж радіусу r (рис. 4).

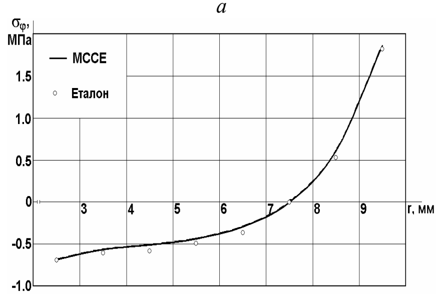
Температурне поле описується законом:

$$T=-71.66\cdot(\rho-0.2)^{1.6}\,,\quad \rho=\frac{r}{b}\,.$$

Розв’язок задачі здійснювався при наступних значеннях фізико-механічних характеристик матеріалу: коефіцієнт Пуассона $\nu = 0.3$, коефіцієнт лінійного теплового розширення $\alpha_T = 1 \cdot 10^{-4}$ *град*$^{-1}$, залежність модуля пружності від температури визначається формулою $E = 10^3 \cdot e^{-0.04606 T}$.



а



б

Рис. 4

Результати розрахунків та дискретна модель представлені на рис. 4 у вигляді епюр радіальних σ_r (рис. 4,*а*) і колових σ_φ (рис. 4,*б*) напружень. Як видно, отримані результати повністю збігаються із еталонним розв’язком отриманим в роботі [6].

Таким чином розроблена методика дозволяє отримувати достовірні результати при розв’язку вісесиметричних задач стаціонарної теплопровідності та термопружності.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Сахаров А.С.* Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров, В.Н. Кислоокий, В.В. Киричевский. – К. : Вища шк., 1982. – 480 с.
2. *Блох В. И. Теория упругости / В. И. Блох. – Х. : Изд. Харьковск. Гос. Университета,* 1964. – 484 с.
3. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости / А. Д. Коваленко. – К. : Наук. думка, 1970. – 204 с.

4. *Димніч А. Х.* Теплопровідність : [навч. посібник] / А. Х. Димніч, О. А. Троянський – Донецьк, 2003. – 370 с.
5. *Гуляр О.І.* Ефективність моментної схеми скінчених елементів (МССЕ) в задачах згину та з концентраторами напружень / О. І. Гуляр, І. І. Солодей, Ю. В. Максим’юк // Опір матеріалів і теорія споруд. - 2012. – Вип. 89. – С. 38-52.
6. *Рассказов А. О.* Расчёт многослойной ортотропной пологой оболочки методом конечных элементов / А. О. Рассказов // Прикл. механика.– 1978. – 14, № 8. – С. 51−56.

REFERENCES

1. *Saharov A.S.* Metod konechnyh jelementov v mehanike tverdyh tel. “The Finite Element Method in Mechanics of Solids” / A.S. Saharov, V.N. Kislookij, V.V. Kirichevskij. – K. : Vishha shk., 1982. – 480 s.
2. *Bloh V.I.* Teorija uprugosti. “Theory of Elasticity” / V. I. Bloh. – H. : Izd. Har'kovsk. Gos. Universiteta, 1964. – 484 s.
3. *Kovalenko A.D.* Osnovy termouprugosti. “Basics thermoelasticity” / A. D. Kovalenko. – K. : Nauk. dumka, 1970. – 204 s.
4. *Dymnich A.Kh.* Teploprovidnist : [navch. posibnyk]. “Thermal conductivity [teach. user]”/ A. Kh. Dymnich, O.A. Troianskyi – Donetsk, 2003. – 370 s.
5. *Huliar O.I.* Efektyvnist momentnoi skhemy skinchenykh elementiv (MSSE) v zadachakh zghynu ta z kontsentratoramy napruzhen. “The efficiency of moment scheme finite element (MSFE) in problems of bending and stress concentrators” / O. I. Huliar, I. I. Solodei, Iu. V. Maksym’iuk // Opir materialiv i teoriia sporud. 2012. – Vyp. 89. – S. 38 52.
6. *Rasskazov A.O.* Raschjot mnogoslojnoj ortotropnoj pologoj obolochki metodom konechnyh jelementov. “Calculation of multilayer orthotropic shallow shell with the finite element method” / A. O. Rasskazov // Prikl. mehanika.– 1978. – 14, № 8. – S. 51−56.

Стаття надійшла до редакції 23.12.2013 р.

Андриевский В.П., Максимюк Ю.В.

МЕТОДИКА РЕШЕНИЯ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЗАДАЧ СТАЦИОНАРНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ТЕРМОУПРУГОСТИ НА ОСНОВЕ МСКЭ

Приведены основные расчетные соотношения осесимметричных задач стационарной теплопроводности и термоупругости в криволинейной системе координат. На основании основных положений моментной схемы конечных элементов (МСКЭ) получены соотношения для определения температурных деформаций. Проведены численные исследования для подтверждения достоверности результатов.

Ключевые слова: теплопроводность, термоупругость, осесимметричные тела, моментная схема конечных элементов.

Andriievskyi V., Maximjuk Yu.

METHOD OF SOLUTION OF AXISYMMETRIC STATIONARY HEAT CONDUCTION AND THERMOELASTICITY PROBLEM BASED ON MSFE

The basic design formulas in a curvilinear coordinate system for axisymmetric stationary heat conduction and thermoelasticity problems are given. A relations for the thermal deformations determination are obtained on the basis of the moment finite element scheme (MSFE) main provisions. Numerical studies to results validation are made.

Keywords: thermal conductivity, thermoelasticity, axisymmetric body , the moment scheme of finite elements.