УДК 539.3

Д.В. Левківський[1]
М.О. Янсонс[1]

[1]*Київский національний університет будівництва і архітектури, Київ*
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680

МЕТОД ПРЯМИХ У ЦИЛІНДРИЧНІЙ СИСТЕМІ КООРДИНАТ

В даній роботі розглядається плоска деформація товстої циліндричної оболонки, жорстко закріпленої по бічним граням. Для зниження вимірності вихідних диференціальних рівнянь використовується метод прямих у поєднанні з проекційним методом Бубнова-Гальоркіна-Петрова. В результаті редукції рівняння зводяться до системи однорідних диференціальних рівнянь першого порядку в частинних похідних. В подальшому система розв'язується чисельно, використовуючи метод дискретної ортогоналізації С.К. Годунова.

Ключові слова: метод прямих, товста циліндрична оболонка, теорія пружності, плоска деформація, напружено-деформований стан.

Основними вимогами до сучасних будівельних конструкцій, є їхня надійність та економічність. Вирішення цих проблем передбачає використання сучасних конструктивних форм, застосування нових матеріалів і новітніх технологій обробки матеріалів, для більш точного врахування реальних умов експлуатації конструкцій. Усе це потребує створення нових математичних моделей і використання сучасних чисельних методів їхньої реалізації.

Серед широкого різновиду сучасних конструктивних форм можна виділити об'єкти, що за геометричною формою нагадують сферу чи її частину та вісесиметричні відносно однієї з координат. У будівництві до них відносяться сферичні частини доменних та конверторних печей, частини захисних оболонок корпусів ядерних реакторів, тунелі метро, колектори, трубопроводи, оболонкові покриття будівель. Як правило, габаритні розміри таких об'єктів не дозволяють віднести їх до оболонок у класичному розумінні, крім того, їхній напружено-деформований стан є просторовим. Назвемо такі об'єкти товстими вісесиметричними сферичними та циліндричними оболонками.

У даній роботі розглядається згин товстої циліндричної оболонки, зображеної на (рис. 1).

Для спрощення приймається, що навантаження стале вздовж координати z. Тоді задача зводиться до плоскої задачі теорії пружності (плоска деформація) в циліндричній системі координат (рис. 2). Торцеві грані пластини певним чином взаємодіють з зовнішнім середовищем – це може бути жорстке закріплення, шарнір або пружна основа, в залежності від умов роботи конструкції. Така модель може бути використана при розрахунку тунелів метро під навантаженням від ґрунту та води, динамічним навантаженням від руху потягу; колекторів, труб під внутрішнім тиском рідини (вода, газ) та інші.

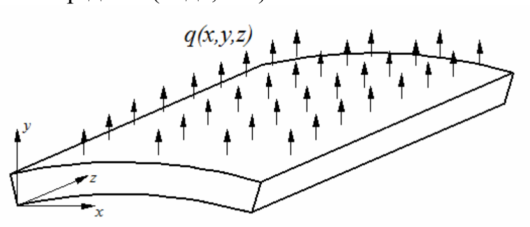

Рис. 1. Товста циліндрична оболонка

Ставиться задача визначити напружено-деформований стан товстої циліндричної оболонки під дією навантаження $q(x,s)$ при довільних умовах закріплення пластини по торцевим граням. Для зручності оболонка розглядається в системі координат $y0s$, що показано на (рис. 2.).

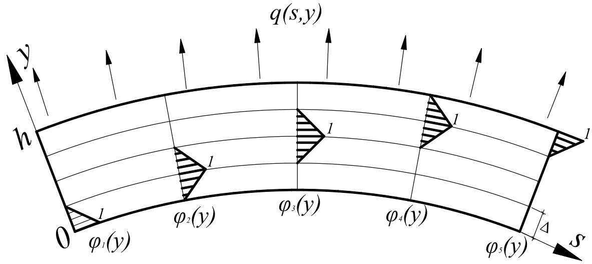

Рис. 2 Розрахункова модель (плоска деформація)

Диференціальні рівняння, що описують даний процес зручно записати у вигляді:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial U^*}{\partial s} = \tau_{\theta r} - \dfrac{\partial V^*}{\partial y} + \dfrac{V^*}{R_0 + y} \\ \dfrac{\partial V^*}{\partial s} = \sigma_\theta \dfrac{1-\nu_1}{2} - \dfrac{U^*}{R_0 + y} - \nu_1 \dfrac{\partial U^*}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \sigma_\theta}{\partial s} = -\dfrac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial y} - \dfrac{2\tau_{\theta r}}{R_0 + y} - \theta \\ \dfrac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial s} = -\dfrac{\partial \sigma_r}{\partial y} - \dfrac{\sigma_r - \sigma_\theta}{R_0 + y} - R \\ \sigma_r = \dfrac{2}{1-\nu_1}\dfrac{\partial U^*}{\partial y} - \dfrac{2\nu_1}{1-\nu_1}\dfrac{U^*}{R_0 + y} + \dfrac{2\nu_1}{1-\nu_1}\dfrac{\partial V^*}{\partial s}, \end{cases} \tag{1}$$

де $U^* = U\cdot\mu$, $V^* = V\cdot\mu$ - переміщення відповідно в напрямку s та y; $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$ - напруження; $\nu_1 = \dfrac{\nu}{1-\nu}$, ν - коефіцієнт Пуассона; R_0 - радіус кривизни нижньої поверхні оболонки.

Для зниження вимірності системи вихідних диференціальних рівнянь (1) скористаємось узагальненим методом прямих [5]. По координаті y оболонка розбивається лініями з сталим кроком Δ (рис. 1), на лініях обирається система локальних базисних функцій $\varphi_i(y)$, $i = 1,...,n$, значення функцій на i-й прямій дорівнює 1, на всіх інших 0.

Домножаючи систему (1) на базисні функції та інтегруючи на проміжку $[0, h]$ отримаємо систему однорідних диференціальних рівнянь першого порядку в частинних похідних, процес редукції детально описано в роботах [1, 2, 4, 5]:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial U_i^*}{\partial s} = \tau_{\theta ri} + (C_{1ij} g^{j\alpha} - b_{ij} g^{j\alpha}) V_\alpha^* \\
&\frac{\partial V_i^*}{\partial s} = -(C_{1ij} g^{j\alpha} + \nu_1 b_{ij} g^{j\alpha}) U_\alpha^* + \left(\frac{1-\nu_1}{2}\right)\sigma_{\theta i} \\
&\frac{\partial \sigma_{\theta i}}{\partial s} = [\tau_{r\theta}^1 - \tau_{r\theta}^n] + (b_{ji} g^{j\alpha} - 2C_{1ij} g^{j\alpha})\tau_{\theta r\alpha} \\
&\frac{\partial \tau_{r\theta i}}{\partial s} = [\sigma_r^1 - \sigma_r^n] + \left[\left(\frac{2}{1-\nu_1} - \frac{2\nu_1^2}{1-\nu_1}\right)\left(b_{ji} g^{jk} b_{k\beta} g^{\beta\alpha} - C_{1ij} g^{jk} b_{k\beta} g^{\beta\alpha}\right)\right] U_\alpha^* + \\
&\qquad + (\nu_1 b_{ji} g^{j\alpha} - \nu_1 C_{1ij} g^{j\alpha} + C_{1ij} g^{j\alpha})\sigma_{\theta\alpha},
\end{aligned}\right. \tag{2}$$

де $\{g_{ij}\} = (\varphi_i(y), \varphi_j(y))$ - двічі коваріантний метричний тензор; $\{g^{ij}\} = \{g_{ij}\}^{-1} = (\varphi^i(y), \varphi^j(y))$ - двічі контраваріантний метричний тензор; $\{b_{ij}\} = (\varphi_i(y), \varphi_j'(y))$ - скалярний добуток базису на його похідну; $\{C_{1ij}\} = \int\limits_{R_0}^{h+R_0} \varphi_i(y)\cdot\varphi_j(y)\cdot\dfrac{1}{y+R_0}dy$.

Компоненти системи диференціальних рівнянь (2) записані в моментах, що дає змогу зручно враховувати навантаження та граничні умови.

Граничні умови по поверхні оболонки моделюються, використовуючи вертикальні та горизонтальні пружні в’язі. Змінюючи жорсткість в’язей можна задати пружну основу, шарнірне та жорстке закріплення, осадку опори, граничні умови враховуються по аналогії з роботою [1].

При $y = R_0$:

$$\sigma_r^1 = -q_r^1 - k_{rr1}(\Delta_r^1 - V^1),$$
$$\tau_{\theta r}^1 = -q_{\theta r}^1 - k_{\theta r1}(\Delta_{\theta r}^1 - U^1), \tag{3}$$

при $y = h + R_0$:

$$\sigma_r^n = q_r^n k_{rrn}(\Delta_r^n - V^n),$$
$$\tau_{\theta r}^n = -q_{\theta r}^n - k_{\theta r1}(\Delta_{\theta r}^n - U^n), \tag{4}$$

при $x = 0$:

$$\sigma_{ri}(0) = -q_{s0i} - k_{ss0}(\Delta_{s0i} - V_i(0)),$$
$$\tau_{\theta ri}(0) = -q_{sr0i} - k_{sr0}(\Delta_{sr0i} - U_i(0)), \tag{5}$$

при $x = l$:

$$\sigma_{ri}(l) = -q_{sli} - k_{ssl}(\Delta_{sli} - V_i(l)),$$
$$\tau_{\theta ri}(l) = -q_{srli} - k_{srl}(\Delta_{srli} - U_i(l)), \tag{6}$$

Гранична задача для системи звичайних диференціальних рівнянь (2)-(6) розв’язується чисельно за допомогою метода дискретної ортогоналізації С.К.Годунова [3].

З метою дослідження збіжності результатів розглянуто приклад:

Задано оболонку розмірами: $h = 0,2\ м$, $l = 1\ м$, $R_0 = 100\ м$, з фізико-механічними характеристиками: $\nu = 0,3$, $E = 5 \cdot 10^7\ кН/м^2$, $q_r^n = -20\ кН/м$. Оболонка жорстко закріплена по бічним граням. На графіках приведені напруження та переміщення серединної лінії оболонки (рис. 3-5).

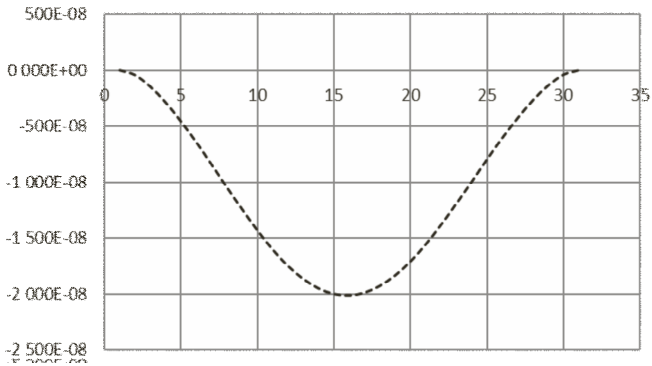

Рис. 3. Вертикальне переміщення в перерізі $y = 0,1\ м$

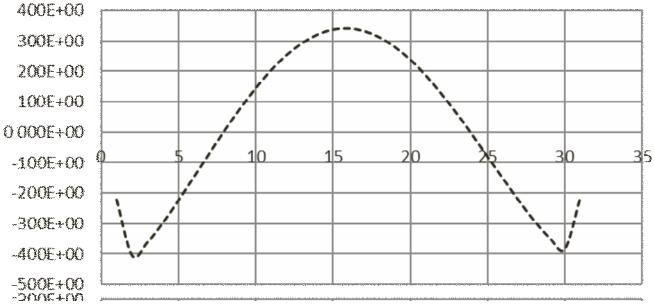

Рис. 4. σ_θ в перерізі $y = 0,1$ *м*

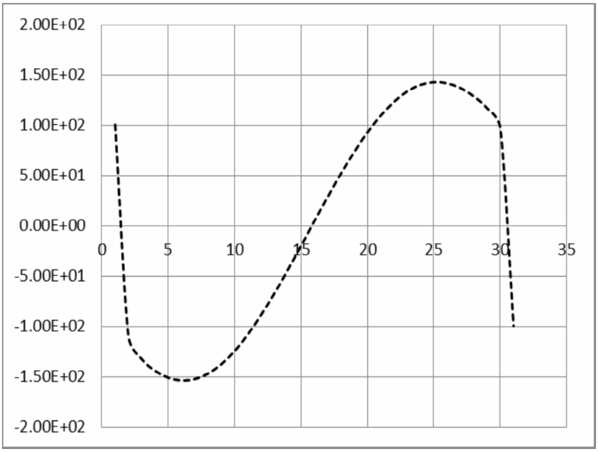

Рис. 5. $\tau_{\theta r}$ в перерізі $y = 0,1$ *м*

Висновок

Отримані результати показали високу збіжність, що підтверджується наведеним графіками.

Слід зазначити, що в зоні опирання, а йдеться про защемлення, як відомо, з'являються місцеві дефекти, які порушують виконання умов теорії пружності.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Станкевич А. М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т., Левківський Д.В.* До зниження вимірності граничних задач теорії пружності за методом прямих // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 36 – К.: КНУБА, 2010 – с.413-423.

2. *Чибіряков В.К., Станкевич А.М., Левківський Д.В.* Особливості зниження вимірності рівнянь теорії пружності узагальненим методом прямих // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. Збірник. – Вип. 46 – К.: КНУБА, 2013 – с.613-624.
3. *Годунов С.К.* О численном решении краевых задач для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Успехи математических наук. – 1961. – т.16 – вып.3. – с.171-174.
4. *Станкевич А.М., Чибіряков В.К., Шкельов Л.Т.* Метод прямих у просторовій задачі теорії пружності // Науково-технічний збірник «Опір матеріалів і теорія споруд» - 2011 – випуск №86, - с. 109-117.
5. *Станкевич А.М., Левківський Д.В.* Три варіанти редукції рівнянь плоскої задачі теорії пружності методом прямих // Містобудування та територіальне планування: Наук.-техн. збірник. – Вип. 49 – К.: КНУБА, 2013 – с. 509-521.

6. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Солодей І.І.* Напіваналітичний кільцевий скінченний елемент для моделювання просторового напруженого стану армованих тіл з тріщинами // Опір матеріалів і теорія споруд. –К.:КНУБА, Вип.91, 2013.-с.147-156.

REFERENCES

1. *Stankevich A.M., Chibiryakov V.K., Shkelev L.T., Levkivskiy D.V.* Do znyzhennya vymirnosti granychnyh zadach teorii’ pruzhnosti za metodom pryamih // Mistobuduvannya ta terytorial’ne planuvannya: Nayk.-tehn. Zbirnyk. – Vyp.36 – K.KNUBA, 2010 s.413-423. // To the decline of measurableness maximum tasks of theory of resiliency after the method of lines // Town-planning and territorial planning: scientific and technical collection number 36, Kiev: KNUBA year 2010, pages 413-423.
2. *Chibiryakov V.K., Stankevich A.M., Levkivskiy D.V.* Osoblyvosti znyzhennya vymirnosti rivnyan’ teorii’ pruzhnosti uzagal’nenym metodom pryamyh // Mistobuduvannya ta terytorial’ne planuvannya: Nayk.-tehn. Zbirnyk. – Vyp.46 – K.KNUBA, 2013 s.613-424. // Features of decline of measurableness of equalizations of theory of resiliency by the generalized method of lines // Town-planning and territorial planning: scientific and technical collection number 46, Kiev: KNUBA year 2013, pages 613-424.
3. *Godunov S.K.* O chislennom reshenii kraevyh zadach dlya sistem linejnyh obyknovennyh differencial’nyh uravnenij // Uspehi matematicheskih nauk. – 1961 – t.16 – vyp.3 – s.171-174 // About the numeral decision of regional tasks for the systems of linear usual differential equalizations // Successes of mathematical sciences. year 1961, volume 16, number 3, pages 171-174.
4. *Stankevich A.M., Chibiryakov V.K., Shkelev L.T.* Metod pryamih u prostorovij zadachi teorii’ pruzhnosti // Naukovo-tehnichnyj zbirnyk «Opir materialiv i teoriya sporud» - 2011 – vypusk №86, - s. 109-117 // A method of lines is in the spatial task of theory of resiliency // Scientific and technical collection is «Resistance of materials and theory of buildings», year 2011, number 86, pages 109-117.
5. *Stankevich A.M., Levkivskiy D.V.* Try varianty redukcii’ rivnyan’ ploskoi’ zadachi teorii’ pruzhnosti metodom pryamih // Mistobuduvannya ta terytorial’ne planuvannya: Nayk.-tehn. Zbirnyk. – Vyp.49 – K.KNUBA, 2013 s.509-521. // Three variants of reduction of equalizations of flat task of theory of resiliency by the method of lines. // Town-planning and territorial planning: scientific and technical collection number 49, Kiev: KNUBA year 2013, pages 509-521.

Стаття надійшла до редакції 29.04.2014 р.

Левковский Д.В., Янсонс М.О.

МЕТОД ПРЯМЫХ В ЦИЛИНРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

В данной работе рассматривается плоская деформация толстой цилиндрической оболочки, жестко закрепленной по боковым граням. Для снижения размерности исходных дифференциальных уравнений используется метод прямых в сочетании с проекционным методом Бубнова-Галеркина-Петрова. В результате редукции уравнения сводятся к системе однородных дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных. В дальнейшем система решается численно, используя метод дискретной ортогонализации С.К.Годунова.

Ключевые слова: метод прямих, товста циліндрична оболонка, теорія пружності, плоска деформація, напружено-деформований стан.

Levkivskiy D.V., Yansons M.O.

THE METHOD OF LINES IN A CYLINDRICAL COORDINATE SYSTEM

In this paper the plane strain thick cylindrical shell is rigidly attached to the side faces. To reduce the dimension of initial differential equation method is used in combination with the direct projection of the Bubnov-Galerkin-Petrov. As a result of the reduction equations are reduced to a system of homogeneous first order differential equations in partial derivatives. In the future, the system is solved numerically using the method of discrete orthogonalization S.K.Hodunova.

Keywords: method of lines, thick cylinder shell, theory of resiliency, flat deformation, tensely deformed the state.