УДК 539.3

О.О. Шкриль[1]**,** канд. техн. наук

[1]*Київский національний університет будівництва і архітектури, Київ*
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680

ВИЗНАЧЕННЯ КОЕФІЦІЄНТІВ ІНТЕНСИВНОСТІ НАПРУЖЕНЬ В ДВОВИМІРНИХ ТІЛАХ ПРИ ТЕМПЕРАТУРНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

На основі моментної схеми скінченних елементів (МССЕ) реалізована методика визначення коефіцієнтів інтенсивності напружень (КІН) в двовимірних тілах при дії температурного навантаження. Результати розвязання тестових задач показують, що енергетичні методи визначення КІН є більш ефективними порівняно із прямим методом.

Ключові слова: Двовимірна задача, коефіцієнт інтенсивності напружень, температурне навантаження, метод скінченних елементів.

Вступ. Значна частина конструкцій енергетичних установок експлуатується в умовах дії температурного навантаження. З часом в деяких деталях таких конструкцій можуть виникати тріщини. Оцінка несучої здатності тіл з тріщинами виконується за величинами параметрів механіки руйнування. При дії температурних впливів, що супроводжуються лінійними деформаціями, серед таких параметрів найбільшого поширення здобув коефіцієнт інтенсивності напружень (КІН). При розвязанні задач із визначення КІН використовуються переважно чисельні методи Серед них найбільшого поширення здобув метод скінченних елементів (МСЕ). Як показали проведені дослідження [2, 10] ефективним варіантом МСЕ є моментна схема скінченних елементів (МССЕ) [10]. Тому актуальним є реалізація методики визначення КІН в двовимірних тілах під дією температурного навантаження на основі МССЕ. Для визначення КІН застосовуються переважно енергетичні або прямі методи. До енергетичних методів можна віднести метод піддатливості та *J*-інтеграла Черепанова-Райса.

Метод піддатливості. При деформуванні просторового тіла з початковою тріщиною, напружено-деформований стан (НДС) в околі вершини тріщини та можливість розвитку тріщини обумовлюється співвідношенням між роботою зовнішніх сил або потенційною енергією пружних деформацій, та поверхневою енергією тіла *П*. Передбачаючи, що робота зовнішніх сил повністю витрачується на утворення нової поверхні тріщини, для густини енергії деформації *G*, що звільнюється при розкритті тріщини на величину *dl*, можна записати [1, 8, 11, 12]:

$$G=-\frac{\partial\Pi}{\partial\ell}\,. \tag{1}$$

Скінченно-елементна реалізація методу піддатливості в МССЕ описана в роботі [2].

***J*-інтеграл Черепанова-Райса.** Як зазначено в роботі [11] при складанні балансу енергії для області навколо вершини тріщини, отримується різниця енергій тіла до і після малого прирощення довжини тріщини (рис. 1):

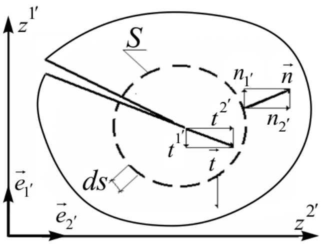


Рис. 1

$$J=\int_S\left(Wn_t-\vec{n}\cdot\hat{\sigma}\cdot(\hat{\nabla}u)^T\vec{t}\right)dS\,. \tag{2}$$

де W – величина повної енергії деформування, в загальному випадку $W=\int_0^{\hat{\varepsilon}}\hat{\sigma}\cdot\cdot d\hat{\varepsilon}$, при пружному деформуванні $W=\frac{1}{2}\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$; $\hat{\sigma}$ – тензор напружень, $\hat{\varepsilon}$ – тензор деформацій, $\vec{n}$ – зовнішня нормаль до поверхні інтегрування *F*; $\vec{t}$ – вектор, що визначає напрямок розвитку тріщини в точці фронта, де обчислюється *J*–інтеграл; n_t – проекція нормалі $\vec{n}$ на напрямок вектора $\vec{t}$; $\hat{\nabla}u$ – градієнт переміщень.

При наявності нерівномірного температурного поля, вираз інваріантного інтегралу набуває наступного вигляду [1, 9]:

$$J^*=J+\int_S\alpha\sigma_{ij}\delta_{ij}\frac{\partial T}{\partial x}dS\,, \tag{3}$$

де J – інтеграл вигляду (2). Детальне викладення методики визначення J – інтеграла в дискретних моделях МСЕ описано в роботах [3-6].

Зв’язок КІН з величинами *J* та *G* за умов лінійного деформування визначається за формулою [1, 8, 12]:

$$G=J=kK_I^2\big/E\,. \tag{4},$$

де $k=1$ за умов плоского напруженого стану і $k=1-\nu^2$ для плоскої деформації, *E* – модуль Юнга.

Прямий метод. В загальному випадку термосилового навантаження звязок між напруженнями та коефіцієнтом інтенсивності напружень першого роду (КІН) K_I в пов’язаній з вершиною тріщини системі координат $y^{i''}$ ($i=1,2$) (рис. 2) визначається наступними формулами [1, 8, 12]:

$$\sigma^{1''1''} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}) ,$$
$$\sigma^{1''2''} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2} , \qquad (5)$$
$$\sigma^{2''2''} = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}) ,$$

де r, θ – полярні координати точки визначення КІН (рис. 2).

При постійній температурі T в околі вершини тріщини зв’язок між переміщеннями і K_I описується формулою [1, 8] :

$$u_i = \frac{K_I}{2G}\sqrt{\frac{r}{2\pi}}\cdot F_i(\theta)+\alpha'\cdot k\cdot T\, y^{i''} , \qquad (6)$$

де G – модуль зсуву; ν - коефіцієнт Пуасона; $\alpha'=\alpha$ - коефіцієнт лінійного розширення у випадку плоского напруженого стану, $\alpha'=\alpha(1+\nu)$ для плоскої деформації.

$$F_1(\theta)=\sin\frac{\theta}{2}\left(k+1-2\cos^2\frac{\theta}{2}\right),$$
$$F_2(\theta)=\cos\frac{\theta}{2}\left(k-1+2\sin^2\frac{\theta}{2}\right),$$

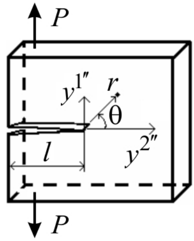


Рис. 2. Тріщина нормального відриву

де $k=3-4\nu$ для плоскої деформації, $k=(3-\nu)/(1+\nu)$ для плоского напруженого стану. Реалізація методики визначення КІН прямим методом в дискретних моделях МСЕ описана в монографії [2].

Тестові задачі. Апробація методики визначення коефіцієнта інтенсивності напружень (КІН) при наявності температурного навантаження спочатку була проведеною при розв’язанні задачі про визначення КІН для порожнистого циліндра з середнім радіусом $R_m=50\,см$, висотою $2h=100\,см$, товщиною стінки $t=10\,см$ та з зовнішньою кільцевою тріщиною глибиною $l=5\,см$, фронт якої збігається із середнім радіусом поперечного перерізу циліндра (рис. 3).

На внутрішній та зовнішній поверхнях циліндра підтримуються постійні температури. Розподіл температури по товщині стінки описується логарифмічним законом:

$$T(r)=\Delta T\cdot\ln\left(\frac{R_m+t/2}{r}\right)\Big/\ln\left(\frac{R_m+t/2}{R_m-t/2}\right), \qquad (7)$$

де $\Delta T=100°$ - перепад температури по товщині стінки.

Враховуючи геометричні розміри циліндра та значення перепаду температури формула (7) набуде вигляду:

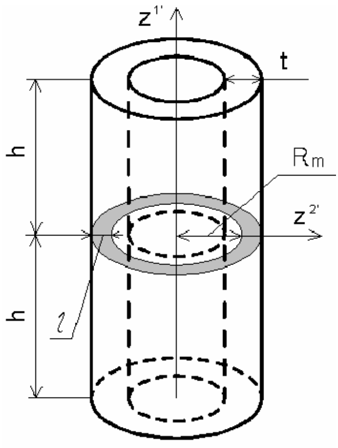


Рис. 3. Порожнистий циліндр з зовнішньою тріщиною

$$T(r)=100\cdot\ln(55/r)/\ln(11/9)\ .$$

Визначення КІН прямим методом виконується за значеннями переміщень в околі вершини тріщини:

$$K_I=\frac{u_1-\alpha\cdot(1+\nu)\cdot T\cdot x^1}{\sin\frac{\theta}{2}(2-4\nu+\cos\theta)}\sqrt{\frac{2\pi}{r}}\cdot 2G\ . \quad (8)$$

Значення температури T визначається за формулою (7), а x^1 є координатою точки визначення КІН в системі координат тріщини.

В якості еталонного прийнято результати наведені в [8], де величина КІН подається із використанням безрозмірного множника $F=\dfrac{K_I}{\alpha\cdot\Delta T\cdot E\cdot\sqrt{\pi\cdot l}}$, який залежить від відносної глибини тріщини і в розглядуваному випадку при $l/t=0{,}5$ становить 0.55.

$$K_I^{em}=F\cdot\alpha\cdot\Delta T\cdot E\cdot\sqrt{\pi\cdot l}=0.55\cdot 1\cdot 10^{-5}\cdot 100\cdot 1\cdot\sqrt{3.14\cdot 5}=2.179\cdot 10^{-3}\,\text{кг}/\text{см}^{3/2}\ .$$

Скінченно-елементна модель (СЕМ) побудована в осях $z^{1'}-z^{2'}$ та складається з чотирьох сіткових фрагментів (рис. 4,*а*). Згідно із наданими в [2] рекомендаціями при побудові дискретної моделі розміри СЕ привершинної області прийняті 1/10 довжини тріщини (СЕМ №1). Число скінчених елементів – 230, кількість невідомих складає 528. Для забезпечення збіжності НДС в другій дискретній моделі розміри скінченних елементів в привершинній області було зменшено до 1/20 довжини тріщини (СЕМ №2, рис. 4,*б*). Кількість невідомих СЕМ №2 становить 1320, число скінчених елементів – 602. Результати визначення $K_I(u)$ [7] як по області так і по вузлу, що є найближчім до вершини тріщини. добре узгоджуються з результатами, отриманими іншими авторами [8] (табл. 1).

Таблиця 1

	СЕМ №1	СЕМ №2
$K_I^{обл}(u)$ ($кг/см^{3/2}$)	2.0172×10^{-3}	1.98×10^{-3}
$K_I(u)$	2.1313×10^{-3}	2.0892×10^{-3}

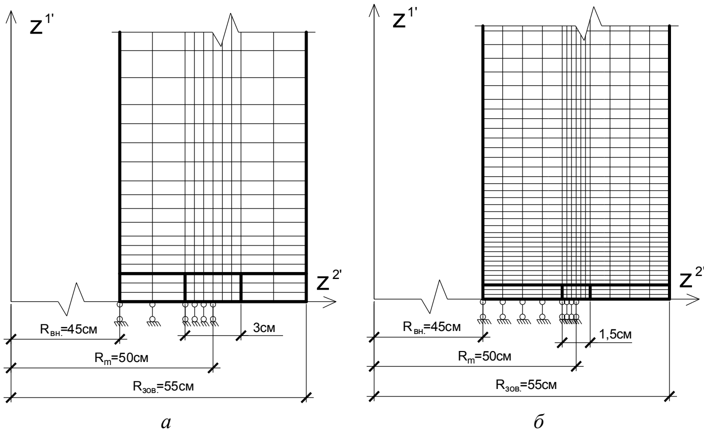


Рис. 4. СЕМ №1(а) і №2 (б) для розрахунку КІН в порожнистому циліндрі

Наступним тестовим прикладом була задача про деформування довгого товстостінного циліндра із поперечною тріщиною (рис. 5).

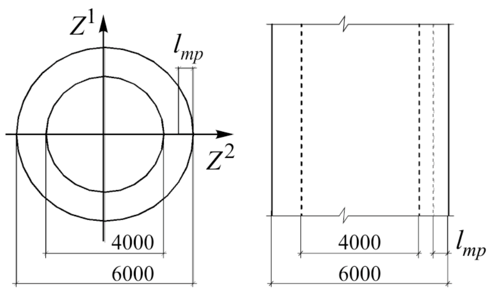


Рис. 5. Геометрична схема товстостінного циліндра із поперечною тріщиною

Матеріал циліндра виготовлений зі сталі 38ХН3МФА, для якої модуль пружності $E=210\,ГПа$, коефіцієнт Пуасона $\nu=0.3$, коефіцієнт лінійного розширення $\alpha=13.5\cdot10^{-6}\,град^{-1}$. Радіальний розподіл температури описується логарифмічним законом:

$$T=T_1+(T_2-T_1)\frac{\ln(r/r_1)}{\ln(r/r_2)},$$

де T, r - температура та радіус поточної точки; T_1, r_1, T_2, r_2 - температури та радіуси відповідно внутрішньої та зовнішньої поверхонь циліндра. $T_1=100\,град$, $T_2=0$, $r_1=2\,м$, $r_2=3\,м$. Довжина тріщини $l_{тр}=0.5\,м$.

Дискретні моделі із врахуванням симетрії розроблені для половини циліндру. Як і в попередній тестовій задачі, в околі вершини тріщини СЕ являють собою квадрати із розмірами $l_{ел}=l_{тр}/10$ (рис. 6,*а*) та $l_{ел}=l_{тр}/20$ (рис. 6,*б*).

На відміну від попередньої задачі обчислення КІН проводилось як прямим методом так і енергетичним (методом піддатливості [2], та через величини J-інтеграла [3-6]):

Значення КІН обчислене методом піддатливості для сітки із розмірами СЕ в околі вершини тріщини $l_{ел} = l_{тр} / 20$ було прийнятим за еталонне. Як можна побачити із результатів (табл. 2) три метода дають майже однакові значення КІН.

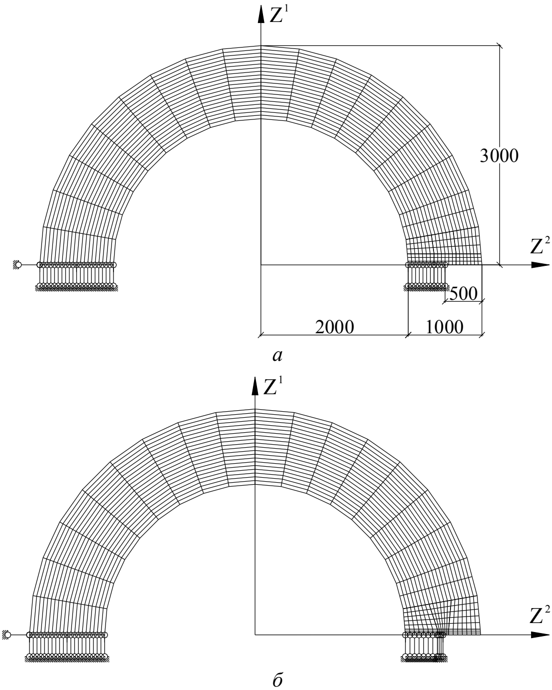


Рис. 6. Дискретні моделі циліндра з розмірами елементів в привершинній зоні $l_{ел} = l_{тр} / 10$ (а), $l_{ел} = l_{тр} / 20$ (б)

Таблиця 2

$\dfrac{l_{тр}}{l_{ел}}$	Прямий метод $K_I(u)$ $(МПа\sqrt{м})$				Метод реакцій		Метод піддатливості
	по обл. $K_I(u)$	δ(%)	по 1 т. $K_I(u)$	δ(%)	$K_I(J)$	δ(%)	$K_I(G)$
10	248	4.4	234.7	1.2	235.4	0.9	235.9
20	238.4	0.4	231.6	2.5	237.4	0.1	237.6

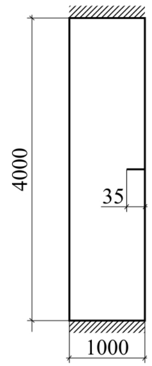
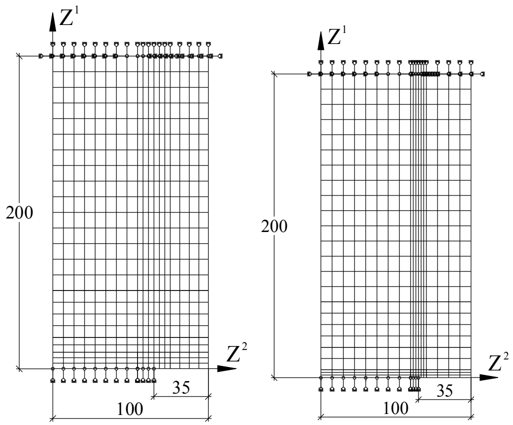


Рис. 7

Наступною тестовою задачею була прямокутна пластина з боковим надрізом жорстко защемлена по краям, що рівномірно охолоджується на величину перепаду температур $\Delta T = 100\,град$ (рис. 7).

Фізико-механічні властивості аналогічні попередній тестовій задачі. Із врахуванням симетрії дискретні моделі розроблені для половини пластини. На рис. 8 показані дискретні моделі в яких розміри СЕ в околі вершини тріщини складають відповідно $l_{ел} = l_{тр}/10$ та $l_{ел} = l_{тр}/20$. Результати розрахунку показують, що як і в попередній задачі метод піддатливості та метод реакцій дають практично однаковий результат. Відмінність результатів прямого методу знаходиться в межах 5 відсотків. В роботі [8] наведений розвязок даної задачі аналітичним методом та із застосуванням СЕ бази ANSYS. В ANSYS обчислення КІН виконувалось прямим методом за величиною переміщення у вузлі, що є найближчим від вершини тріщини, та енергетичним методом – за величиною J-інтеграла. Отримані результати відрізняються від наведених в табл. 3 в межах 3%.



а *б*

Рис. 8. Дискретні моделі пластини з боковим надрізом

Таблиця 3

$\frac{l_{тр}}{l_{ел}}$	Прямий метод $K_I(u)$ $(МПа\sqrt{м})$				Метод реакцій		Метод піддатливості
	по обл. $K_I(u)$	δ(%)	по 1 т. $K_I(u)$	δ(%)	$K_I(J)$	δ(%)	$K_I(G)$
10	519.8	4.8	515.8	5.6	543.4	0.5	543.1
20	520.6	4.7	533.4	2.4	546.2	0	546.3

Отримані результати показують високу ефективність розробленої методики визначення КІН в тілах з тріщинами під дією температурного навантаження. Енергетичний метод визначення КІН виявився більш ефективним порівняно із прямим методом.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Атлури С.* Вычислительные методы в механике разрушения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 392 с.
2. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Сахаров О.С.* Напіваналітичний метод скінченних елементів в задачах руйнування просторових тіл: Монографія – К.: КНУБА, 2005. – 298 с.
3. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Пискунов С.О., Сахаров А.С., Шкрыль А.А., Максимюк Ю.В.* Решение линейных и нелинейных пространственных задач механики разрушения на основе полуаналитического метода конечных элементов. Сообщение 1. Теоретические основы и исследование эффективности конечно-элементной методики решения пространственных задач механики разрушения // Проблемы прочности, 2011. – №1.– С. 27–39.
4. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Пискунов С.О., Сахаров А.С., Шкрыль А.А., Максимюк Ю.В.* Решение линейных и нелинейных пространственных задач механики разрушения на основе полуаналитического метода конечных элементов. Сообщение 2. Методика определения инвариантного *J*-интеграла в дискретных моделях МКЭ // Проблемы прочности, 2011. – №2.– С.17–32.
5. *Баженов В.А., Гуляр А.И., Пискунов С.О., Сахаров А.С., Шкрыль А.А.* Метод определения инвариантного J-интеграла в конечно-элементных моделях призматических тел // Прикладная механика. 2008, 44, №12– с.70-82.
6. *Баженов В.А., Гуляр О.І., Пискунов С.О., Шкриль О.О., Богдан Д.В.* Модифікований метод реакцій для визначення J-інтеграла в задачах пружнопластичного деформування просторових призматичнсих тіл //Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2011. – Вип. 88. – С.18-23
7. *Пискунов С.О., Гречух Н.А., Остапенко Р.М.* Обчислення КІН в просторових тілах обертання при температурному навантаженні //Опір матеріалів і теорія споруд: наук.-тех. збірн. – К.: КНУБА, 2006. – Вип. 80. – С.38-53
8. *Морозов Е.М., Никишков Г.П.* Метод конечных элементов в механике разрушения. – М.: “Наука”, 2007. – 256 с.
9. *Морозов Е.М., Муйземнек А.Ю., Шадский А.С.* ANSYS в руках инженера: Механика разрушения. – М.: Ленанд, 2008.-456с.
10. *Сахаров А.С.* Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров, В.Н. Кислоокий, В.В. Киричевский. – К. : Вища шк., 1982. – 480 с.
11. *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640с.
12. *Anderson T.L.* Fracture mechanics: Fundamentals and Applications, Third Edition.-CRC Press, 2005. - 640p.

REFERENCES

1. *Atluri S.* Vichislitelnye metody v mechanice razrusheniya(Computation Methods in the Mechanics of Fracture). M.: Mir, 1990. – 392 c.
2. *Bazhenov V.A., Gulyar A.I., Piskunov S.O., Saharov A.S.* Napivanalitichniy metod skinchennih elementiv v zadachah ruynuvannya prostorovih til (Semianalitic finite element method in problems of fracture spatial bodies): Monografiya – K.: KNUBA, 2005. – 298 c.
3. *Bazhenov V.A., Gulyar A.I., Piskunov S.O., Saharov A.S., Shkril' A.A.,,Maksimyuk Yu.V.* Reshenie lineynih i nelineynih prostranstvennyh zadach mehaniki razrusheniya na osnove poluaniticheskogo metoda konechnyh elementov. Soobchenie 1. Teoreticheskie osnovi I issledovanie efectivnosti konechno-elementnoy metodiki resheniya prostranstvennih zadach mehaniki razrusheniya (Linear

and nonlinear fracture mechanic's problem solution using semianalytic finite element method: Part 1. Theoretical foundation and research of efficience of finite element technique for fracture mechanic's problem solution). Strengths of materials, 2011, № 1, 27−39.

4. *Bazhenov V.A., Gulyar A.I., Piskunov S.O., Saharov A.S., Shkril' A.A., Maksimyuk Yu.V.* Reshenie lineynih i nelineynih prostranstvennyh zadach mehaniki razrusheniya na osnove poluanaliticheskogo metoda konechnyh elementov. Soobchenie 2. Metodika opredeleniya invariantnogo J-integrala v discretnih modeliyah MKE(Linear and nonlinear fracture mechanic's problem solution using semianalytic finite element method: Part 2. A technique for calculation of invariant of J-integtral value in finite element model). Strengths of materials, 2011, № 2, 17−32.
5. *Bazhenov V.A., Gulyar A.I., Piskunov S.O., Saharov A.S., Shkril' A.A.* Metod opredeleniya invariantnogo J-integrala v konechno-elementnih modelyah prizmaticheskih tel (Method for the determination of the invariant J-integral in the finite element model of prismatic bodies) // Prikladnaya mehanika. 2008, 44, №12– c.70-82.
6. *Bazhenov V.A., Gulyar A.I., Piskunov S.O., Shkril' A.A., Bogdan D.V.* Modificovaniy metod reaksiy dlya viznachennya J-integrala v zadachah pruzhnoplastichnogo deformuvannya prostorovih prizmatichnih til (A modified method for the determination of reaction J-integral in problems of elastoplastic deformation space pryzmatychnsyh bodies) // Opir materialiv i teoriya sporud. 2011. – Vip. 88. – C.18-23
7. *Piskunov S.O., Grechuh N.A., Ostapenko R.M.* Obchislennya KIN v prostorovih tilah obertannya pri temperaturnomu navantazhenni (Calculation of SIF in spatial bodies of revolution under thermal load) // Opir materialiv i teoriya sporud., 2006. – Vip. 80. – C.38-53
8. Morozov *E.M., Nikishkov G.P.* Metod konechnih elementov v mehanike razrusheniya (Finite element method in fracture mechanics). – Moskow.: "Librocom", 2010, 256 c.
9. *Morozov E.M., Muyzemnek A.Yu., Shadski A.S.* ANSYS v rukah inzhenera. Mehanika razrusheniya (ANSYS in the hands of the engineer: Fracture Mechanics). – M.: Lenand, 2008.-456p.
10. *Saharov A.S.* Metod konechnih elementov v mehanike tverdih tel (The Finite Element Method in Mechanics of Solids) – K. : Bisha shk., 1982. – 480 c.
11. *Cherepanov G.P.* Mechanika hrupkogo razrusheniya(Mechanics of brittle fracture). – Moskow.: Nauka, 1974. – 640 p
12. *Anderson T.L.* Fracture mechanics: Fundamentals and Applications, Third Edition.-CRC Press, 2005. - 640p.

Стаття надійшла до редакції 29.08.2014 р.

Шкрыль А.А.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФИЦИЕНТОВ ИНТЕНСИВНОСТИ НАПРЯЖЕНИЙ В ДВУМЕРНІХ ТЕЛАХ ПРИ ТЕМПЕРАТУРНОЙ НАГРУЗКЕ

На основе моментной схемы конечных элементов (МКЭ) реализована методика определения коэфициентов интенсивности напряжений (КИН) в двумерных телах под действием температурной нагрузки. Результаты решения тестовых задач показали, что энергетические методы определения КИН являются более эфективными по сравнению с прямым методом.

Ключевые слова: Двумерная задача, коэфициент интенсивности напряжений, температурная нагрузка, метод конечных элементов.

Shkril' A.

DEFINITION STRESS INTENSITY COEFFICIENT TWO-DIMENSIONAL BODIES UNDER THERMAL LOAD

On the basis of the finite element scheme of the moment method (FEM) implemented method of determining the coefficients of stress intensity (*K*) in two-dimensional bodies under the action of temperature load. Results of test problems showed that the methods for determining the energy of *K* are more effeciency compared with the.

Keywords: two-dimensional bodies, stress intensity coefficient, thermal load, finite element method.