

УДК 539.3

Ю.В. Ворона<sup>1</sup>, канд. техн. наук  
І.Д. Кара<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Київський національний університет будівництва і архітектури  
Повітрофлотський пр. 31, Київ, Україна, 03680

## РОЗПОВСЮДЖЕННЯ ЦИЛІНДРИЧНИХ ХВИЛЬ У ПОРОПРУЖНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Досліджується розв'язок задачі про поширення в поропружному середовищі осесиметричних хвиль. Запропоновані розрахункові співвідношення, які дозволяють обчислювати параметри НДС в широкому діапазоні частот.

**Ключові слова:** пористість, модель Біо, потенціал переміщень, функція Ганкеля.

Удосконалення процесу розрахунку та проектування сучасних конструкцій, спрямоване на більш реалістичне відтворення умов їх роботи, значною мірою пов'язане із ускладненням моделей поведінки матеріалів. Останнім часом багато уваги приділяється використанню моделей поропружного середовища, які дозволяють урахувати наявність пор в багатьох реальних будівельних матеріалах і, в той же час, залишитись в межах гіпотези про суцільність [1], [2].

Усталені гармонічні коливання двофазного поропружного середовища згідно із моделлю Біо [3] описуються системою диференціальних рівнянь

$$\mu u_{j,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,kj} + \rho^* \omega^2 u_j - \gamma^* p_{,j} = 0, \quad (1)$$

$$p_{,kk} + \frac{i\omega}{\kappa^*} p + i\omega \eta^* u_{k,k} = 0, \quad (2)$$

де через  $u_k$  позначена  $k$ -а компонента вектора переміщень пружного скелету середовища, а через  $p$  – середнє нормальне напруження, яке сприймається водою, що заповнює пори; крім того використані наступні позначення:  $\omega$  – частота коливань,  $\lambda$  і  $\mu$  – константи Ламе, які характеризують пружні властивості скелету,  $\rho^*$  – параметр, який характеризує інерційні властивості середовища в процесі коливань:

$$\rho^* = \frac{\omega^2 (\rho_{11}\rho_{22} - \rho_{12}^2) + i\omega b (\rho_{11} + \rho_{22} + 2\rho_{12})}{i\omega b + \omega^2 \rho_{22}},$$

причому ефективні щільності

середовища  $\rho_{11}$ ,  $\rho_{12}$ ,  $\rho_{22}$  пов'язані між собою співвідношеннями  $\rho_{11} + \rho_{12} = (1 - \beta)\rho_s$ ,  $\rho_{12} + \rho_{22} = \beta\rho_f$ ,  $\rho_{12} = -\rho_a$ , і в свою чергу,  $\beta$  – коефіцієнт

пористості,  $\rho_s$  – щільність каркасу,  $\rho_f$  – щільність рідкого заповнювача,  $\rho_a$  – щільність приєднаної маси.

Також використані позначення

$$\gamma^* = -\frac{Q}{R} - \frac{i\omega b - \omega^2 \rho_{12}}{i\omega b + \omega^2 \rho_{22}}, \quad \kappa^* = \frac{R}{b - i\omega \rho_{22}}, \quad \eta^* = -b \left( 1 + \frac{Q}{R} \right) - i\omega \left( \rho_{12} - \rho_{22} \frac{Q}{R} \right), \quad (3)$$

де  $b$  є сталою затухання,  $Q$  і  $R$  – модулі поропружного матеріалу, які виражаються через коефіцієнт пористості  $\beta$ , коефіцієнти стисливості каркасу  $C_s$  та рідини  $C_f$  і модуль об'ємного стиснення  $K$ .

Фізичні співвідношення між напруженнями і деформаціями мають наступний вигляд

$$\sigma_{kj} = \lambda \delta_{kj} e_s + 2\mu \varepsilon_{kj} + \frac{Q}{R} \delta_{kj} p, \quad p = Q e_s + R e_f, \quad (4)$$

де  $\varepsilon_{kj} = 0.5(u_{k,j} + u_{j,k})$  та  $e_s = u_{j,j}$  – відповідно деформація і дилатація в пружному каркасі,  $e_f = U_{j,j}$  – дилатація в рідині,  $U_j$  – компонента вектора переміщень рідкої фази, що визначається через переміщення у каркасі  $u_j$  та напруження у воді  $p$  за формулою

$$U_j = \frac{u_j (i\omega b - \omega^2 \rho_{12}) - p_{,j}}{i\omega b + \omega^2 \rho_{22}}. \quad (5)$$

Неважко помітити подібність рівнянь рівноваги (1), (2) до диференціальних співвідношень, які описують усталені коливання однорідного термопружного середовища

$$\mu u_{j,kk} + (\lambda + \mu) u_{k,kj} + \rho \omega^2 u_j - \gamma \theta_{,j} = 0, \quad (6)$$

$$\theta_{,kk} + \frac{i\omega}{\kappa} \theta + i\omega \eta u_{k,k} = 0, \quad (7)$$

де  $\rho$  – щільність середовища,  $\theta$  – його температура,  $\gamma = 3K\alpha_t$ ,  $\alpha_t$  – коефіцієнт теплового розширення,  $\kappa$  – коефіцієнт температуропровідності,  $\eta = \frac{\gamma T_0}{\lambda_0}$ ,  $T_0$  – температура в ненапруженому стані,  $\lambda_0$  – коефіцієнт теплопровідності.

На жаль, фізичні співвідношення задачі термопружності (співвідношення Дюгамеля-Неймана)  $\sigma_{kj} = \delta_{kj} (\lambda e - \gamma \theta) + 2\mu \varepsilon_{kj}$  помітно відрізняються від першого з рівнянь (4), тому безпосередньо використовувати розв'язки конкретних задач термопружності, замінюючи в них  $\rho$  на  $\rho^*$ ,  $\gamma$  на  $\gamma^*$ ,  $\kappa$  на  $\kappa^*$  і  $\eta$  на  $\eta^*$  не можна.

Тим не менш, при розв'язанні задачі про розповсюдження циліндричних поропружних хвиль від порожнини кругового перерізу доцільно скористатись загальною методикою та деякими проміжними результатами, отриманими в [4].

Скориставшись поданням вектора переміщень у вигляді потенціальної і соленоїдальної частин

$$u_j = \Phi_{,j} + \epsilon_{jkl} \Psi_{l,k} \quad (8)$$

отримаємо замість (1), (2) наступні рівняння

$$\Delta \Phi + \frac{\rho^* \omega^2}{\lambda + 2\mu} \Phi = \frac{\gamma^*}{\lambda + 2\mu} p, \quad (9)$$

$$\Delta \Psi + \frac{\rho^* \omega^2}{\lambda + 2\mu} \Psi = 0, \quad (10)$$

$$\Delta p + \frac{i\omega}{\kappa^*} p + i\omega \eta^* \Delta \Phi = 0, \quad (11)$$

де  $\Delta$  - оператор Лапласа ( $\Delta \Phi = \Phi_{,kk}$ ).

У випадку розповсюдження циліндричних хвиль напружено-деформований стан є вісесиметричним, тобто залежить тільки від радіальної координати  $r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}$ . Тоді  $\Delta \equiv \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}$ ,  $\Psi = 0$ ,  $u_r = \frac{d\Phi}{dr}$ .

Виразимо  $p$  за допомогою рівняння (9) через потенціал  $\Phi$ , підставимо в (11) і отримаємо звичайне диференціальне рівняння

$$\left[ \Delta \Delta + \left( \frac{\rho^* \omega^2}{\lambda + 2\mu} + \frac{i\omega}{\kappa^*} + \frac{i\omega \eta^* \gamma^*}{\lambda + 2\mu} \right) \Delta + \frac{\rho^* \omega^2}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{i\omega}{\kappa^*} \right] \Phi = 0, \quad (12)$$

$$\text{або} \quad (\Delta + \lambda_1^2)(\Delta + \lambda_2^2)\Phi = 0, \quad (13)$$

причому величини  $\lambda_1^2$  і  $\lambda_2^2$  задовольняють співвідношенням

$$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = \frac{\rho^* \omega^2}{\lambda + 2\mu} + \frac{i\omega}{\kappa^*} + \frac{i\omega \eta^* \gamma^*}{\lambda + 2\mu}, \quad \lambda_1^2 \cdot \lambda_2^2 = \frac{\rho^* \omega^2}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{i\omega}{\kappa^*}. \quad (14)$$

Розв'язок рівняння (13) має вигляд

$$\Phi(r) = A_1 H_0^{(1)}(\lambda_1 r) + A_2 H_0^{(1)}(\lambda_2 r), \quad (15)$$

і, в свою чергу,

$$u_r = \frac{d\Phi}{dr} = - \left[ A_1 \lambda_1 H_1^{(1)}(\lambda_1 r) + A_2 \lambda_2 H_1^{(1)}(\lambda_2 r) \right], \quad (16)$$

де  $H_k^{(1)}$  - функція Ганкеля 1-го роду порядку  $k$ , а константи  $A_1$  і  $A_2$  знаходимо, задовольняючи граничні умови.

Напруження в рідині можна визначити, виходячи з виразу (9)

$$p = \frac{\lambda + 2\mu}{\gamma^*} \Delta\Phi + \frac{\rho^* \omega^2}{\gamma^*} \Phi =$$

$$= \frac{A_1 H_0^{(1)}(\lambda_1 r)}{\gamma^*} \left[ \rho^* \omega^2 - (\lambda + 2\mu) \lambda_1^2 \right] + \frac{A_2 H_0^{(1)}(\lambda_2 r)}{\gamma^*} \left[ \rho^* \omega^2 - (\lambda + 2\mu) \lambda_2^2 \right], \quad (17)$$

а напруження в каркасі - за допомогою рівнянь

$$\sigma_{rr} = (\lambda + 2\mu) \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \lambda \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} + \frac{Q}{R} p = A_1 \lambda_1 \left[ 2\mu \frac{H_1^{(1)}(\lambda_1 r)}{r} - (\lambda + 2\mu) \lambda_1 H_0^{(1)}(\lambda_1 r) \right] +$$

$$+ A_2 \lambda_2 \left[ 2\mu \frac{H_1^{(1)}(\lambda_2 r)}{r} - (\lambda + 2\mu) \lambda_2 H_0^{(1)}(\lambda_2 r) \right] + \frac{Q}{R} p, \quad (18)$$

$$\sigma_{\theta\theta} = (\lambda + 2\mu) \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} + \lambda \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{Q}{R} p = -A_1 \lambda_1^2 \left[ 2\mu \frac{H_1^{(1)}(\lambda_1 r)}{\lambda_1 r} + \lambda H_0^{(1)}(\lambda_1 r) \right] -$$

$$- A_2 \lambda_2^2 \left[ 2\mu \frac{H_1^{(1)}(\lambda_2 r)}{\lambda_2 r} + \lambda H_0^{(1)}(\lambda_2 r) \right] + \frac{Q}{R} p. \quad (19)$$

Нарешті, за формулою (5) можна знайти переміщення в рідині:

$$U_r = \frac{u_r(i\omega b - \omega^2 \rho_{12}) - \frac{dp}{dr}}{i\omega b + \omega^2 \rho_{22}} = \frac{A_1 \lambda_1 H_1^{(1)}(\lambda_1 r)}{i\omega b + \omega^2 \rho_{22}} \left[ \frac{\rho^* \omega^2 - (\lambda + 2\mu) \lambda_1^2}{\gamma^*} - (i\omega b - \omega^2 \rho_{12}) \right] +$$

$$+ \frac{A_2 \lambda_2 H_1^{(1)}(\lambda_2 r)}{i\omega b + \omega^2 \rho_{22}} \left[ \frac{\rho^* \omega^2 - (\lambda + 2\mu) \lambda_2^2}{\gamma^*} - (i\omega b - \omega^2 \rho_{12}) \right]. \quad (20)$$

що вичерпує перелік параметрів поропружного осесиметричного НДС.

Якщо, наприклад, на границі порожнини радіусу  $a$  задані наступні граничні умови:

$$\sigma_{rr} \Big|_{r=a} = -q_0, \quad p=0, \quad (21)$$

тобто прикладений тиск сприймається тільки пружним каркасом, то за формулами (17), (18) отримуємо

$$A_1 = -q_0 \frac{(k - \lambda_2^2) H_0^{(1)}(\lambda_2 a)}{(k - \lambda_2^2) H_0^{(1)}(\lambda_2 a) g_1 - (k - \lambda_1^2) H_0^{(1)}(\lambda_1 a) g_2}, \quad (22)$$

$$A_2 = q_0 \frac{(k - \lambda_1^2) H_0^{(1)}(\lambda_1 a)}{(k - \lambda_2^2) H_0^{(1)}(\lambda_2 a) g_1 - (k - \lambda_1^2) H_0^{(1)}(\lambda_1 a) g_2}, \quad (23)$$

$$\text{де } k = \frac{\rho^* \omega^2}{(\lambda + 2\mu)}, \quad g_\alpha = \lambda_\alpha^2 \left[ 2\mu \frac{H_1^{(1)}(\lambda_\alpha a)}{\lambda_\alpha a} - (\lambda + 2\mu) H_0^{(1)}(\lambda_\alpha a) \right], \quad \alpha = 1, 2.$$

Чисельні розрахунки проводились при значеннях параметрів матеріалу, характерних для піщаника [6]:  $\lambda=4 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ,  $\mu=6 \cdot 10^9 \text{ Па}$ ,  $b=0.19 \cdot 10^9 \text{ кг}/(\text{с} \cdot \text{м}^3)$ ,  $\rho_{11}=2418 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $\rho_{22}=340 \text{ кг}/\text{м}^3$ ,  $\rho_{12}=-150 \text{ кг}/\text{м}^3$ .

В процесі проведення чисельних розрахунків виявилось, що одночасно із зростанням частоти коливань  $\omega$  досить швидко зростає модуль комплексного параметру  $\lambda_1$ , внаслідок чого величини  $H_0^{(1)}(\lambda_1 a)$  і  $H_1^{(1)}(\lambda_1 a)$  стають близькими до нуля. В свою чергу, близькі до нуля значення приймають знаменники виразів (22), (23), що негативно позначається на точності розв'язання задачі.

Для подолання вказаної перешкоди при обчисленні значень  $u_r$  і  $\sigma_{\theta\theta}$  на границі порожнини запропоновано одночасно поділити чисельник і знаменник розрахункових співвідношень для вказаних параметрів на  $H_1^{(1)}(\lambda_1 a)$ . Беручи до уваги вирази (16), (19), а також граничні умови (21), запишемо

$$u_r|_{r=a} = q_0 \frac{(k-\lambda_2^2)\lambda_1 H_0^{(1)}(\lambda_2 a) - (k-\lambda_1^2)\lambda_2 H_1^{(1)}(\lambda_2 a) B(\lambda_1 a)}{(k-\lambda_2^2)H_0^{(1)}(\lambda_2 a) f - (k-\lambda_1^2)B(\lambda_1 a) g_2}, \quad (24)$$

де

$$B(\lambda_1 a) = \frac{H_0^{(1)}(\lambda_1 a)}{H_1^{(1)}(\lambda_1 a)}, \quad f = \lambda_1^2 \left[ \frac{2\mu}{\lambda_1 a} - (\lambda + 2\mu) B(\lambda_1 a) \right].$$

Формула для визначення нормальних тангенціальних напружень набуває вигляду

$$\sigma_{\theta\theta} = q_0 \frac{(k-\lambda_2^2)H_0^{(1)}(\lambda_2 a)\lambda_1^2 h_1 - (k-\lambda_1^2)\lambda_2^2 B(\lambda_1 a)h_2}{(k-\lambda_2^2)H_0^{(1)}(\lambda_2 a)f_1 - (k-\lambda_1^2)B(\lambda_1 a)g_2}, \quad (25)$$

де  $h_1 = \frac{2}{\lambda_1 a} + \lambda B(\lambda_1 a)$ ,  $h_2 = \frac{2}{\lambda_2 a} H_1^{(1)}(\lambda_2 a) + \lambda H_0^{(1)}(\lambda_2 a)$ .

Для обчислення функції  $B(t)$  при великих значеннях аргумента скористаємось наближеними виразами для модифікованих функцій Бесселя [6]:

$$K_n(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \left[ 1 + \frac{\mu-1}{8z} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2!(8z)^2} - \frac{(\mu-1)(\mu-9)(\mu-25)}{3!(8z)^3} + \dots \right], \quad \mu = 4n^2. \quad (26)$$

Оскільки функції Ганкеля пов'язані із модифікованими функціями Бесселя співвідношеннями

$$H_0^{(1)}(t) = -\frac{2i}{\pi} K_0(-it), \quad H_1^{(1)}(t) = -\frac{2}{\pi} K_1(-it)$$

то, зберігаючи в розвиненнях (26) п'ять перших членів, маємо

$$B(\lambda_1 a) = \frac{iK_0(s)}{K_1(s)} \approx i \frac{32s\{8s[9-16s(1-8s)]-75\}+3675}{32s\{8s[16s(3+8s)-15]+105\}-4725}, \quad (27)$$

де  $s = -i\lambda_1 a$ .

Результати обчислення в точках границі нормованих параметрів НДС  $\frac{u_r \mu}{a q_0}$  та  $\frac{\sigma_{\theta\theta}}{q_0}$  (формули (24) і (25) відповідно) при різних значеннях частоти коливань  $\omega$  наведені на рис. 1, 2.

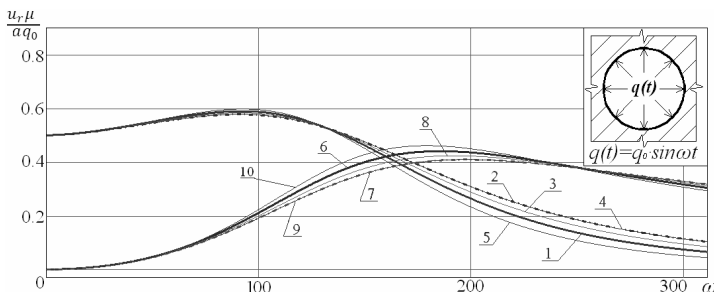


Рис. 1. Нормовані радіальні переміщення точок границі

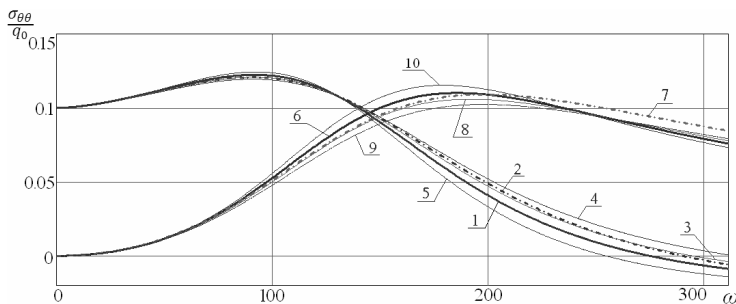


Рис. 2. Нормовані тангенціальні нормальні напруження на границі отвору

На рисунках цифрами 1 і 6 позначені графіки дійсних і уявних частин відповідних параметрів НДС, обчислених за умови, що  $\beta=0.19$ ,  $Q/R=0.32$ . Цифрами 2 і 7 позначені криві, що відповідають параметрам НДС пружної області, в якій пори відсутні. Позначки 3 і 8 відповідають графікам, побудованим при  $\beta=0.1$ ,  $Q/R=5$ , а позначки 4 і 9 – при  $\beta=0.01$ ,  $Q/R=800$ . Нарешті, криві з позначками 5 і 10 отримані при значеннях параметрів  $\beta=0.4$ ,  $Q/R=0.32$ . Як бачимо, найбільший вплив пористість середовища справляє на дійсні частини параметрів НДС в діапа-

зоні частот  $140 \div 200 \text{ рад/с}$ , а на уявні частини – при частотах коливань  $180 \div 280 \text{ рад/с}$ .

Отже, наведені результати наочно свідчать про можливість застосування отриманих розрахункових співвідношень для визначення параметрів НДС пороупругого середовища в широкому діапазоні частот.

#### СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Detournay E., Cheng A.H.-D.* Fundamentals of poroelasticity, in Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects, vol. II, Analysis and Design Method, Pergamon Press (1993), pp. 113-171,
2. *Ковтун А.А.* Об уравнениях модели Био и их модификациях // Вопросы геофизики. – 2011. – 44. – С. 3-24
3. *Bio M.A.* Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 28, no. 2 (1956), pp. 168-178.
4. *Новацкий В.* Динамические задачи термоупругости / Под ред. Г.С. Шапиро. – М: Мир, 1970. – 256 с.
5. *Dominguez J.* Boundary elements in dynamics. – Wit Press, 1993.
6. Справочник по специальным функциям. Под ред. М.Абрамовица, И.Стигана. М.: Наука, 1979. – 830 с.

#### REFERENCES

1. *Detournay E., Cheng A.H.-D.* Fundamentals of poroelasticity, in Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects, vol. II, Analysis and Design Method, Pergamon Press (1993), pp. 113-171,
2. *Kovtun A.A.* Ob uravneniiah modeli Bio i ih modifikatsiyah (On the equations of Biot's theory and their modifications // Voprosy geofiziki (Problems of geophysics). – 2011. – 44. – С. 3-24
3. *Bio M.A.* Theory of Propagation of Elastic Waves in a Fluid-Saturated Porous Solid. I. Low-Frequency Range. *The Journal of the Acoustical Society of America*, 28, no. 2 (1956), pp. 168-178.
4. *Nowacki W.* Dinamicheskiye zadachi termouprugosti (Dynamic problems of thermoelasticity) / Edited by G.S. Shapiro. – M: Mir, 1970. – 256 s.
5. *Dominguez J.* Boundary elements in dynamics. – Wit Press, 1993.
6. Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam (Handbook of mathematical functions). Edited by M.Abramovitz and I.Stegun. M.: Nauka, 1979. – 830 s.

*Стаття надійшла до редакції 29.09.2014 р.*

*Vorona Yu.V., Kara I.D.*

#### **РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛН В ПОРОУПРУГОЙ СРЕДЕ**

Исследуется решение задачи о распространении в пороупругой среде осесимметричных волн. Предложены расчетные соотношения, позволяющие вычислять параметры НДС в широком диапазоне частот.

**Ключевые слова:** пористость, модель Био, потенциал перемещений, функция Ханкеля.

*Vorona Yu.V., Kara I.D.*

#### **PROPAGATION OF CYLINDRICAL WAVES IN POROELASTIC MEDIA**

The paper investigates the harmonic axisymmetric wave propagation in poroelastic media. The computational formulas for the study of displacements and stresses that occur during vibrations in a wide frequency range are proposed.

**Keywords:** porosity, Biot's theory, displacement potential, Hankel function