

УДК 539.3

Ю.В. Ворона¹, канд. техн. наук
А.А. Козак¹
О.С. Черненко¹

¹Київський національний університет будівництва і архітектури
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680

ГРАНИЧНОЕЛЕМЕНТНА МЕТОДИКА ДОСЛІДЖЕННЯ ДИНАМІЧНОГО НДС ПРУЖНИХ МАСИВІВ

Запропоновано та реалізовано наближений підхід до обчислення сингулярних складових граничних інтегральних рівнянь в задачах про двовимірні гармонічні коливання пружних масивних об'єктів. Показана працездатність такого підходу при визначенні компонент ядер інтегральних рівнянь в широкому діапазоні частот. Наведено приклад застосування розробленої чисельної методики.

Ключові слова: граничні інтегральні рівняння, сингулярність, двовимірні періодичні коливання, функції Ганкеля.

Наявність в складі сучасних будівельних конструкцій масивних елементів складної форми та прагнення до зниження їх матеріалоемності зумовлюють розвиток сучасних чисельних методів розрахунку таких елементів на впливи різної природи. Важливе місце серед сучасних універсальних методів чисельного аналізу конструкцій займає метод граничних інтегральних рівнянь (ГІР), який дозволяє знайти амплітуди переміщень і напружень на границі, не піддаючи дискретизації саму розрахункову область. Оскільки при вивченні напружено-деформованого стану (НДС) масивів досить часто трапляються випадки, коли достатньо знати переміщення і напруження тільки на границі та в деякій обмеженій кількості точок всередині розрахункової області, то відповідно коло задач, для розв'язання яких може ефективно застосовуватись метод ГІР, є досить широким [1, 2]. В той же час алгоритми, які чисельно реалізують цей метод для розв'язання задач динаміки, ще потребують допрацювання і вдосконалення.

В даній статті наводяться результати роботи по створенню і застосуванню ефективної чисельної методики для дослідження вимушених усталених коливань пружних двовимірних об'єктів складної форми. В якості алгоритмічної основи обчислювального процесу використовується граничний аналог формули Соміліани для амплітуд переміщень, які виникають при двовимірних гармонічних коливаннях:

$$\frac{1}{2}u_j^*(\vec{x}, \omega) = \int_{\Gamma} \tau_k^*(\vec{y}, \omega) U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) d\Gamma_y - \int_{\Gamma} u_k^*(\vec{y}, \omega) T_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) d\Gamma_y, \quad j, k = 1, 2, \quad (1)$$

де $u_j^*(\vec{x}, \omega)$ – j -а компонента комплексної амплітуди коливань з круговою частотою ω ; $\vec{x}\{x_1, x_2\}, \vec{y}\{y_1, y_2\} \in \Gamma$; Γ – границя області V ;

$$\tau_j^*(\vec{y}, \omega) = \lambda n_j(\vec{y}) \frac{\partial u_m^*(\vec{y}, \omega)}{\partial x_m} + \mu \left(\frac{\partial u_j^*(\vec{y}, \omega)}{\partial y_k} + \frac{\partial u_k^*(\vec{y}, \omega)}{\partial y_j} \right) n_k(\vec{y}) \quad - \quad \text{компоненти}$$

комплексної амплітуди напружень на площинці з нормаллю $\vec{n}\{n_1, n_2\}$; $U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega)$ – фундаментальний розв'язок задачі (амплітуди переміщення в пружному двовимірному просторі від дії зосередженої сили, одиничної амплітуди, яка прикладена в точці \vec{x} в напрямку осі (θx_j) [2]:

$$U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) = \frac{i}{4\mu} \left[\delta_{jk} U_0(r, \omega) + r_{,j} r_{,k} U_2(r, \omega) \right]; \quad (2)$$

$$U_0(r, \omega) = H_0^{(1)}(k_1 r) - \frac{H_1^{(1)}(k_2 r)}{k_2 r} + \alpha \frac{H_1^{(1)}(k_1 r)}{k_1 r}; \quad (3)$$

$$U_2(r, \omega) = H_2^{(1)}(k_2 r) - \alpha H_2^{(1)}(k_1 r); \quad (4)$$

$$k_j = \frac{\omega}{C_j}; \quad C_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}}; \quad C_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}}; \quad \alpha = \frac{C_2^2}{C_1^2}; \quad r_{,j} = \frac{\partial r}{\partial y_j} = \frac{y_j - x_j}{r};$$

$r = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$ – відстань між точками \vec{x} і \vec{y} ; ρ – густина

матеріалу; λ і μ – константи Ламе; $H_k^{(1)}$ – функція Ганкеля 1-го роду порядку k ; $T_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega)$ – узагальнена похідна фундаментального розв'язку, тобто напруження на площинках з компонентами нормалі, які виникають в пружному двовимірному просторі від дії вищезгаданої одиничної сили [3]:

$$T_{kj}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) = \lambda n_j(\vec{y}) \frac{\partial U_{km}(\vec{x}, \vec{y}, \omega)}{\partial y_m} + \mu \left(\frac{\partial U_{km}(\vec{x}, \vec{y}, \omega)}{\partial y_j} + \frac{\partial U_{kj}(\vec{x}, \vec{y}, \omega)}{\partial y_m} \right) n_m(\vec{y}) =$$

$$= \frac{i}{4} \left[r_{,k} n_j T_1 + (\delta_{jk} \frac{\partial r}{\partial n} + r_{,j} n_k) T_2 + r_{,k} r_{,j} \frac{\partial r}{\partial n} T_3 \right]; \quad (5)$$

$$T_1 = \frac{2}{r} \left[H_2^{(1)}(k_2 r) - \alpha H_2^{(1)}(k_1 r) \right] - \frac{\lambda}{\mu} \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} k_1 H_1^{(1)}(k_1 r); \quad (6)$$

$$T_2 = \frac{1}{r} \left[2H_2^{(1)}(k_2 r) - k_2 r H_1^{(1)}(k_2 r) - 2\alpha H_2^{(1)}(k_1 r) \right]; \quad (7)$$

$$T_3 = \frac{2}{r} \left[k_2 r H_1^{(1)}(k_2 r) - 4H_2^{(1)}(k_2 r) - \alpha k_1 r H_1^{(1)}(k_1 r) + 4\alpha H_2^{(1)}(k_1 r) \right]. \quad (8)$$

Чисельна процедура розв'язання системи ГПР (1) базується на представленні границі розрахункової області сукупністю граничних

елементів (ГЕ), в межах кожного з яких задані точки колокації, а невідомі змінюються за призначеним законом. В результаті система (1) перетворюється на систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно значень незаданих граничними умовами переміщень і напружень у вузлах колокації. Коефіцієнти матриці системи обчислюються шляхом інтегрування по окремим ГЕ при послідовному суміщенні т. \vec{x} з кожним колокаційним вузлом. Ситуація значно ускладнюється, коли інтегрування проводиться по тому самому елементу, на якому розташована т. \vec{x} . В цьому випадку відстань між точками \vec{x} і \vec{y} може стати нескінченно малою, а підінтегральні вирази набути нескінченно великих значень, що робить неможливим безпосереднє обчислення діагональних коефіцієнтів алгебраїчного аналога системи. Для подолання вказаної перешкоди функції Ганкеля, що входять до складу ядер ГР, наближено замінюються початковими відрізками ряду Маклорена. При цьому компоненти ядер набувають вигляду сум, перший доданок яких виявляється рівним компоненті відповідного статичного потенціалу, тоді як інші доданки при $r = 0$ мають скінченні значення:

$$\begin{aligned}
 U_0(r, \omega) = & \frac{i}{\pi} \left\{ (1+\alpha) \ln(r) + \frac{1-\alpha}{2} + \gamma(1+\alpha) + \alpha \ln\left(\frac{k_1}{2}\right) + \ln\left(\frac{k_2}{2}\right) - \right. \\
 & - \frac{1}{2} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \left[\gamma(3+\alpha^2) - \frac{11+5\alpha^2}{4} + \alpha^2 \ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) + 3 \ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) - \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{6} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \left(\gamma(5+\alpha^3) - \frac{22+5\alpha^2}{3} + \alpha^3 \ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) + 5 \ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) \right) \right] \right\} + \\
 & + \frac{(1+\alpha)}{2} - \left(\frac{k_2 r}{4}\right)^2 \left[(3+\alpha^2) - \frac{1}{6} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 (5+\alpha^3) \right] + O(r^6), \quad (9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_2(r, \omega) = & \frac{i}{\pi} \left\{ (\alpha-1) + \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \left[\left(\gamma - \frac{3}{4}\right)(1-\alpha^2) - \alpha^2 \ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) + \ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{1}{3} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \left(\left(\gamma - \frac{17}{12}\right)(1-\alpha^3) - \alpha^3 \ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) + \ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) \right) \right] \right\} + \\
 & + \frac{1}{2} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 \left[(1-\alpha^2) - \frac{1}{3} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 (1-\alpha^3) \right] + O(r^6), \quad (10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T_1(r, \omega) = & \frac{i}{\pi r} \left\{ -2\alpha + \frac{1}{2} (rk_2)^2 \left[\gamma(1-2\alpha+3\alpha^2) - \frac{3-4\alpha+5\alpha^2}{4} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \alpha(2-3\alpha) \ln\left(\frac{k_1 r}{2}\right) + \ln\left(\frac{k_2 r}{2}\right) - \frac{1}{3} \left(\frac{k_2 r}{2}\right)^2 (\gamma(1-3\alpha^2+5\alpha^3) - \right. \right.
 \end{aligned}$$

$$-\frac{17-45\alpha^2+73\alpha^3}{12}-\alpha^2(3-5\alpha)\ln\left(\frac{k_1r}{2}\right)+\ln\left(\frac{k_2r}{2}\right)\Bigg]\Bigg\}+ \\ +r\left(\frac{k_2}{2}\right)^2\left[(1-2\alpha+3\alpha^2)-\frac{1}{3}\left(\frac{k_2r}{2}\right)^2(1-3\alpha^2+5\alpha^3)\right]+O(r^5), \quad (11)$$

$$T_2(r, \omega) = \frac{i}{\pi r} \left\{ 2\alpha + \frac{1}{2}(rk_2)^2 \left[-\gamma(1+\alpha^2) + \frac{1+3\alpha^2}{4} - \alpha^2 \ln\left(\frac{k_1r}{2}\right) - \ln\left(\frac{k_2r}{2}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{k_2r}{2}\right)^2 \left(-\gamma(2+\alpha^3) + \frac{28+17\alpha^3}{12} - \alpha^3 \ln\left(\frac{k_1r}{2}\right) - 2 \ln\left(\frac{k_2r}{2}\right) \right) \right] \right\} + \\ -r\left(\frac{k_2}{2}\right)^2 \left[(1+\alpha^2) - \frac{1}{3}\left(\frac{k_2r}{2}\right)^2(2+\alpha^3) \right] + O(r^5), \quad (12)$$

$$T_3(r, \omega) = \frac{i}{\pi r} \left\{ 4(1-\alpha) + \frac{1}{2}(rk_2)^2 \left[(1-\alpha^2) + \frac{1}{6}\left(\frac{k_2r}{2}\right)^2 \left(\frac{11-12\gamma}{3}(1-\alpha^3) + 4\alpha^3 \ln\left(\frac{k_1r}{2}\right) - 4 \ln\left(\frac{k_2r}{2}\right) \right) \right] \right\} + \\ + \frac{k_2}{3} \left(\frac{k_2r}{2}\right)^3 (\alpha-1)(1+\alpha+\alpha^2) + O(r^5), \quad \gamma=0.5772156649 \text{ - ейлерова стала.} \quad (13)$$

Оскільки інтегрування ядер статичної задачі труднощів не викликає, то проблему алгебраїзації системи ГІР можна вважати вирішеною, і лишається тільки з'ясувати межі застосування наближених представлень (9) – (13). Для цього кожен з компонент ядер обчислюємо при різних значеннях аргументів безпосередньо за однією з формул (3) – (7), а потім – за відповідним наближеним представленням, утримуючи один, або два, або три члени ряду. Результати обчислень містяться в таблицях 1-5, причому значення параметра N відповідає кількості утриманих членів ряду в наближеному представленні.

Таблиця 1

k_2r	$\text{Re}U_0(r, \omega)$				$\text{Im}U_0(r, \omega)$			
	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$
0.02	0.643	0.643	0.643	0.643	-1.592	-1.592	-1.592	-1.592
0.2	0.635	0.643	0.635	0.635	-0.636	-0.649	-0.636	-0.636
0.5	0.596	0.643	0.595	0.596	-0.222	-0.274	-0.221	-0.222
1.0	0.463	0.643	0.450	0.463	0.126	0.093	0.139	0.126
1.5	0.272	0.643	0.210	0.276	0.309	0.175	0.355	0.305

Таблиця 2

$k_2 r$	$\text{Re}U_2(r, \omega)$				$\text{Im}U_2(r, \omega)$			
	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$
0.02	$4.6 \cdot 10^{-5}$	0.	$4.6 \cdot 10^{-5}$	$4.6 \cdot 10^{-5}$	-0.228	-0.227	-0.228	-0.228
0.2	$4.6 \cdot 10^{-3}$	0.	$4.6 \cdot 10^{-3}$	$4.6 \cdot 10^{-3}$	-0.234	-0.227	-0.234	-0.234
0.5	0.028	0.	0.029	0.028	-0.254	-0.227	-0.255	-0.254
1.0	0.105	0.	0.115	0.105	-0.277	-0.227	-0.287	-0.277
1.5	0.210	0.	0.258	0.207	-0.261	-0.227	-0.294	-0.258

Таблиця 3

$k_2 r$	$\text{Re}T_1(r, \omega)$				$\text{Im}T_1(r, \omega)$			
	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$
0.02	$3.4 \cdot 10^{-5}$	0.	$3.4 \cdot 10^{-5}$	$3.4 \cdot 10^{-5}$	-0.091	-0.091	-0.091	-0.091
0.2	$3.4 \cdot 10^{-3}$	0.	$3.4 \cdot 10^{-3}$	$3.4 \cdot 10^{-3}$	-0.096	-0.091	-0.096	-0.096
0.5	0.0205	0.	0.021	0.0205	-0.108	-0.091	-0.109	-0.108
1.0	0.0754	0.	0.084	0.0751	-0.118	-0.091	-0.216	-0.118
1.5	0.147	0.	0.189	0.143	-0.093	-0.091	-0.121	-0.090

Таблиця 4

$k_2 r$	$\text{Re}T_2(r, \omega)$				$\text{Im}T_2(r, \omega)$			
	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$
0.02	$-5.4 \cdot 10^{-5}$	0.	$-5.4 \cdot 10^{-5}$	$-5.4 \cdot 10^{-5}$	0.0911	0.0910	0.0911	0.0911
0.2	$-5.4 \cdot 10^{-3}$	0.	$-5.4 \cdot 10^{-3}$	$-5.4 \cdot 10^{-3}$	0.0980	0.0910	0.098	0.0980
0.5	-0.0325	0.	-0.0338	-0.0325	0.114	0.0910	0.116	0.114
1.0	-0.115	0.	-0.135	-0.114	0.113	0.0910	0.130	0.112
1.5	-0.208	0.	-0.304	-0.198	0.048	0.0910	0.100	0.039

Таблиця 5

$k_2 r$	$\text{Re}T_2(r, \omega)$				$\text{Im}T_2(r, \omega)$			
	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$	Точне	$N=1$	$N=2$	$N=3$
0.02	$-3.3 \cdot 10^{-9}$	0.	0.	$-3.3 \cdot 10^{-9}$	0.455	0.455	0.455	0.455
0.2	$-3.2 \cdot 10^{-3}$	0.	0.	$-3.3 \cdot 10^{-3}$	0.458	0.455	0.458	0.458
0.5	$-1.3 \cdot 10^{-3}$	0.	0.	$-1.3 \cdot 10^{-3}$	0.474	0.455	0.473	0.474
1.0	-0.019	0.	0.	-0.020	0.540	0.455	0.528	0.541
1.5	-0.089	0.	0.	-0.103	0.648	0.455	0.619	0.659

Як свідчать дані, наведені в таблицях, в переважній кількості випадків при значеннях параметра $k_2 r \leq 1$ похибка обчислення компонент ядер за наближеними формулами не перевищує 1%, якщо у виразах (9)-(13) утримуються три члени ($N=3$). Таким чином, проблему обчислення діагональних коефіцієнтів матриці алгебраїчного аналога системи (1) можна вважати вирішеною.

Розглянемо задачу про двовимірний динамічний НДС ґрунтового масиву під трубопроводом у процесі його ущільнення двома плоскими поверхнями, що рухаються одна проти одної за напівсинусоїдальним законом із частотою $f=25$ Гц (рис. 1).

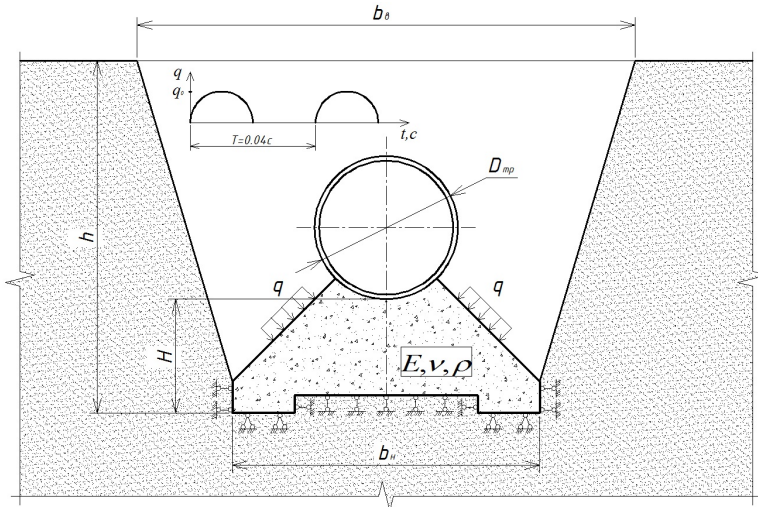


Рис. 1

Стінки траншеї мають значно більший модуль пружності, ніж масив ґрунту під трубою, тому їх поверхні вважаються недеформівними. Для діаметра трубопроводу $D_{mp}=1,22$ м висота ґрунтового масиву становитиме $H=0,82$ м; геометричні розміри траншеї $h=3,0$ м, $b_e=4,4$ м, $b_n=2,62$ м [4]. Механічні властивості насипного ґрунту характеризуються модулем пружності $E=20$ МПа, коефіцієнтом Пуассона $\nu=0,3$ та густиною $\rho=1760$ кг/м³.

Відомо, що з технологічних причин підйом труби в процесі ущільнення є неприпустимим [5], тому мета розрахунку полягає перш за все в перевірці знаків вертикальних переміщень точок верхньої викривленої ділянки контуру. Розрахунок проводиться в два етапи. Впродовж першого етапу аналізуються усталені коливання пружного

масиву під дією тиску на бокові поверхні, що має вигляд періодичних імпульсів, причому в межах кожного періоду тривалістю $T=0,04$ с інтенсивність тиску змінюється за законом

$$q(t) = \begin{cases} q_0 \sin(\omega t), & nT < t \leq nT + \frac{T}{2} \\ 0, & nT + \frac{T}{2} < t \leq (n+1)T \end{cases}, \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (14)$$

де $\omega = 2\pi f$, $q_0 = 0,2$ МПа.

Напівсинусоїдальний імпульс можна подати у вигляді ряду Фур'є

$$q(t) = \frac{q_0}{\pi} \left[1 + \frac{\sin(\omega t)}{2} - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k\omega t)}{4k^2 - 1} \right], \quad (15)$$

після чого задача зводиться до багаторазового розв'язання системи ГР (1) при різних значеннях частоти коливань $k\omega$.

Слід зазначити, що на верхню криволінійну поверхню ґрунтового масиву передаються додаткові вертикальні навантаження, спричинені силами інерції, що виникають внаслідок нерівномірного вертикального руху труби. Якщо прийняти наближену модель про заміну приєднаної маси труби незв'язаними між собою точковими масами, то в кожній точці зони контакту

$$\tau_2^{\partial\partial}(\vec{y}, t) = -m_{mp} \ddot{u}_2(\vec{y}, t),$$

де $m_{mp} = \frac{q_{mp}}{\Gamma_{on}}$; q_{mp} - погонна маса труби; Γ_{on} - довжина дуги кола,

вздовж якої відбувається контакт труби та ґрунтової основи.

Оскільки розв'язок задачі шукається у вигляді суми стаціонарних гармонічних станів, то в кожному такому стані

$$\tau_2^{\partial\partial}(\vec{y}, t) = -m_{mp} \omega^2 u_2^*(\vec{y}, t).$$

Таким чином, між додатковими інерційними навантаженнями і переміщеннями точок границі існує лінійна залежність. Тоді ГР (1) набуває вигляду

$$\frac{1}{2} u_j^*(\vec{x}, \omega) - \int_{\Gamma/\Gamma_{on}} u_k^*(\vec{y}, \omega) T_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) d\Gamma_y + \int_{\Gamma_{on}} u_k^*(\vec{y}, \omega) [T_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) - m\omega^2 U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega)] d\Gamma_y = \int_{\Gamma} \tau_k^*(\vec{y}, \omega) U_{jk}(\vec{x}, \vec{y}, \omega) d\Gamma_y. \quad (16)$$

Погонну масу труби знаходимо за формулою [4]:

$$q_{mp} = \pi [t_{mp} (D_{mp} - t_{mp}) \rho_{cm} + t_{iz} (D_{mp} - t_{iz}) \rho_{iz}],$$

де $t_{mp.} = 0,012$ м - товщина стінки трубопроводу; $\rho_{cm.} = 7800$ кг/м³ - густина матеріалу труби; $t_{iz.} = 0,03$ м - товщина ізоляційного шару; $\rho_{iz.} = 1100$ кг/м³ - густина ізоляції.

З урахуванням наведених значень маємо $m_{mp.} = 480$ кг/м². Крім того, демпфірування, зумовлене внутрішнім тертям в матеріалі, враховується за так званою комплексною гіпотезою [6], причому коефіцієнт непружного опору дорівнює 0,12.

На рис. 2 наведений графік залежності від часу вертикального

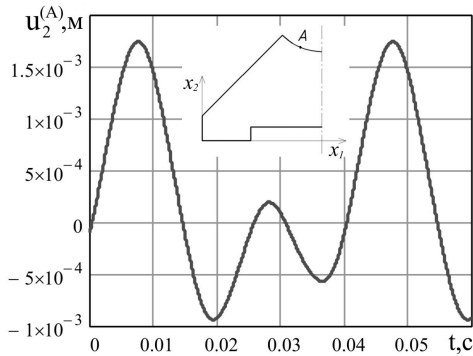


Рис. 2

переміщення в т. А на верхній викривленій ділянці контуру.

Найбільшого значення $u_2 = 1,75 \cdot 10^{-3}$ м переміщення в цій точці досягає в момент часу $t = 0,0076$ с. В той же час другий етап розрахунку показав, що від дії власної ваги ґрунту та ваги трубопроводу точка А переміщується вниз на величину $1,92 \cdot 10^{-3}$ м, що

більше за значення, знайдене при динамічному розрахунку. Така сама картина спостерігається і в інших точках на верхній ділянці контуру. Отже, вимога щодо недопущення підйому труби задовольняється.

На рис. 3 показані графіки залежності від часу напружень σ_{11} в точках на осі симетрії перерізу масиву. Бачимо, що найбільші значення напруження σ_{11} в усіх точках на вертикалі під центром труби спостерігаються в момент часу $t = 0,031$ с, коли $\sigma_{11}^{(B)} = 59,6$ кПа, $\sigma_{11}^{(C)} = 86,3$ кПа, а $\sigma_{11}^{(D)} = 107,7$ кПа. Зазначимо, що всі ці напруження є додатними, тобто відповідають розтягу.

З іншого боку, напруження в зазначених точках, спричинені дією власної ваги ґрунту та ваги трубопроводу є від'ємними і більшими за модулем ніж при динамічному розрахунку - $\sigma_{11}^{(B)} = 117,8$ кПа, $\sigma_{11}^{(C)} = 131,4$ кПа, $\sigma_{11}^{(D)} = 122,5$ кПа. Таким чином, сумарні напруження σ_{11} в точках під трубою є стискаючими, тобто ґрунт зазнає ущільнення.

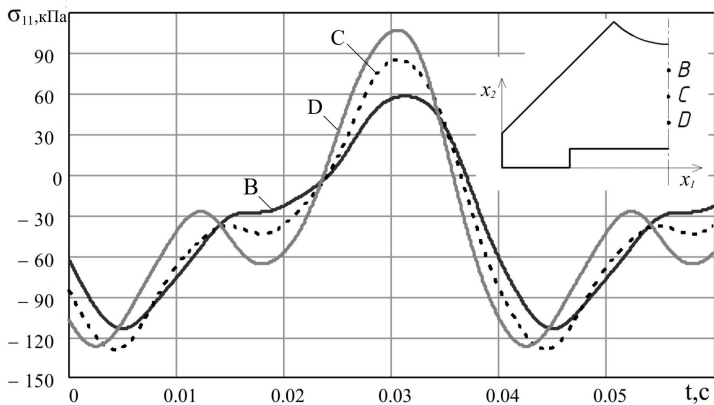


Рис. 3

Отже, наведені результати свідчать про те, що розроблена чисельна методика може бути успішно застосована для аналізу динамічного двовимірного НДС пружних масивів складної форми при періодичному навантаженні.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бреббиа К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. М.: Мир, 1987. - 524 с.
2. Бенерджи П., Баттерфилд Р. Методы граничных элементов в прикладных науках. – М.: Мир, 1984. – 494 с.
3. Ворона Ю.В., Черненко О.С., Козак А.А. Дослідження за методом граничних інтегральних рівнянь усталених коливань пластин з послабленнями // Опір матеріалів і теорія споруд. – 2012. – Вип. 89. – С.158–164
4. Напружено-деформований стан будівельних матеріалів в технологічних процесах виробництва / Сівко В.Й., Поляченко В.А., Кузьмінєць М.П., Сівко Є.В., Науменко Ю.В. – К.: НТУ, 2010. – 352 с.
5. Технологія капітального ремонту магістральних нафтопроводів діаметром 530-1220 мм із заміною ізоляції без підняття трубопроводу з використанням машин підвищеної продуктивності. ВБН В.3.1-320.20077720.01-2001. – К.: НАК «Нафтогаз України», 2001. – 189 с.
6. Цетлин А.И., Кусаинов А.А. Методы учета внутреннего трения в динамических расчетах конструкций. – Алма-Ата: Наука, 1987. – 240 с.

REFERENCES

1. Brebbia C.A., Telles J.C.F., Wrobel L.C. Metody granichnykh elementov (Boundary Elements Techniques). M.: Mir, 1987. - 524 p.
2. Banerjee P.K., Butterfield R. Metody granichnykh elementov v prikladnykh naukakh (Boundary Elements Methods in Engineering Science). – M.: Mir, 1984. – 494 p.
3. Vorona Yu.V., Chernenko O.S., Kozak A.A. Doslidzhennya za metodom granychnykh intehral'nykh rivnyan' ustalenykh kolyvan' plastyn z poslablennyamy (Boundary Integral

- Equation Method Analysis of Plates with Holes Steady Vibrations) // *Opir materialiv i teoriya sporud.* – 2012. – Vyp. 89. – P.158–164
4. Napruzhenno-deformovanny stan budivel'nykh materialiv v tekhnolohichnykh protsesakh vyrobnytstv (Stress-Strain State of Building Materials in Processes of Production). Sivko V.Y., Polyachenko V.A., Kuz'minets' M.P., Sivko Ye.V., Naumenko Yu.V. – K.: NTU, 2010. – 352 p.
 5. Tekhnolohiya kapital'noho remontu mahistral'nykh naftoprovidiv diametrom 530-1220 mm iz zaminoyu izolyatsiyi bez pidnyattya truboprovodu z vykorystannyam mashyn pidvyshchenoyi produktyvnosti (Capital Repairs Technology of Trunk Pipelines of a 530-1220 mm Diameter with Insulation Replacement and without Pipeline Lifting using a High-Performance Machines). VBN V.3.1-320.20077720.01-2001. – K.: NAK «Naftohaz Ukrainy», 2001. – 189 p.
 6. Tseytlyn A.Y., Kusaynov A.A. Metody ucheta vnutrenneho trennyu v dynamycheskykh raschetakh konstruktsyyi (Methods of Internal Friction Accounting in Dynamic Structural Analysis). – Alma-Ata: Nauka, 1987. – 240 p.

Стаття надійшла до редакції 28.01.2014 р.

Vorona Yu.V., Kozak A.A., Chernenko E.S.,

ГРАНИЧНОЭЛЕМЕНТНАЯ МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО НДС УПРУГИХ МАССИВОВ

Предложен и реализован приближенный подход к вычислению сингулярных составляющих граничных интегральных уравнений в задачах про двумерные гармонические колебания упругих массивных объектов. Показана работоспособность такого подхода при определении компонент ядер интегральных уравнений в широком диапазоне частот. Приведен пример применения разработанной численной методики.

Ключевые слова: граничные интегральные уравнения, сингулярность, двумерные периодические колебания, функции Ханкеля.

Vorona Yu.V., Kozak A.A., Chernenko O.S.

BEM TECHNIQUE FOR THE ANALYSIS OF 2D ELASTIC SOLIDS DYNAMICS

A numerical approach to calculating the singular parts of the Boundary Integral Equations for 2D elastic solids harmonic vibration is proposed. The validation of the approach in wide range of frequencies is demonstrated. The developed numerical BEM technique is applied to the problem of elastic solids periodical vibration.

Keywords: boundary integral equations, singularity, 2D periodical oscillations, Hankel functions.