УДК 539.3

П.П. Лізунов[1]**,** д-р техн. наук

[1]*Київский національний університет будівництва і архітектури, Київ*
Повітрофлотський просп., 31, м. Київ. 03680

КОЛИВАННЯ СФЕРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ В ЦЕНТРАЛЬНОМУ СИЛОВОМУ ПОЛІ

Отримані співвідношення, які описують коливання безмоментної сферичної оболонки, що рухається за круговою траєкторією в центральному силовому полі.
Ключові слова: гравітаційне навантаження, стаціонарний рух, центр мас, вільні коливання.

Розглянемо задачу про коливання безмоментної сферичної оболонки, що є частиною споруди, центр мас якої рухається за круговою траєкторією в центральному силовому полі. Вільні коливання споруди в площині руху її центру мас призводять до вимушених коливань оболонки, що збуджуються кінематично. Прийнято, що коливання оболонки не змінюють моменти інерції споруди і не впливають на її вільні коливання.

Введемо наступні праві прямокутні системи координат: $O_aX_aY_aZ_a$ – абсолютну систему координат з початком в центрі гравітації; $OXYZ$ – орбітальну систему координат, вісь OZ якої є продовженням радіуса-вектора $\vec{\rho}_{(o)}$, проведеного з гравітаційного центру O_a в центр мас споруди, а вісь OX лежить в площині, що проходить через радіус-вектор $\vec{\rho}_{(o)}$ та вектор швидкості центру мас споруди. Будемо застосовувати також систему координат O_{xyz}, осі якої направлені вздовж головних центральних осей інерції споруди. У випадку стаціонарного руху споруди в центральному силовому полі осі OZ та O_z співпадають. Вимушені коливання в оболонці виникають в результаті відхилення осі симетрії споруди O_z від осі OZ на кут ψ. Введемо також криволінійну систему координат $O_1x_1x_2x_3$, пов'язану з недеформованою поверхнею оболонки.

Визначимо навантаження, що діють на елементи сферичної оболонки у випадку, коли споруда здійснює вільні коливання відносно стану стаціонарного руху. Під час руху в центральному силовому полі на кожний елемент оболонки діє навантаження, що складається з гравітаційних та інерційних сил

$$\vec{q}=\vec{q}^{\,g}+\vec{q}^{\,j}. \tag{1}$$

Вектор гравітаційного навантаження, що діє на одиничний елемент поверхні оболонки, визначається за формулою

$$\vec{q}^{\,g} = -\frac{\gamma\rho h \vec{r}^{\,*}}{r^2}, \tag{2}$$

де $\gamma = fM_0$; f – гравітаційна стала; M_0 – маса гравітаційного центру; ρ – щільність матеріалу оболонки; h – її товщина; $\vec{r}^{\,*}$ – одиничний вектор, який визначається співвідношенням $\vec{r} = \vec{r} \cdot \vec{r}^{\,*}$; $\vec{r}$ – радіус-вектор елемента оболонки в системі координат $O_aX_aY_aZ_a$; $r = |\vec{r}|$.

Складові гравітаційної сили, що діють в напрямі координатних ліній x_1, x_2, x_3 криволінійної системи координат, мають такий вигляд [1, 2]:

$$q_{x_1}^g = \frac{\gamma\rho h}{\rho_{(o)}^2}(\cos x_1 \cos x_2 \sin\psi - \sin x_1 \cos\psi)\left\{1 + \frac{2}{\rho_{(0)}}\left[(R\cos x_1 - e)\cos\psi + \right.\right.$$

$$\left.\left. + R\sin x_1 \cos x_2 \sin\psi\right]\right\};$$

$$q_{x_2}^g = -\frac{\gamma\rho h}{\rho_{(o)}^2}\sin x_2 \sin\psi\left\{1 + \frac{2}{\rho_0}\left[(R\cos x_1 - e)\cos\psi + R\sin x_1 \cos x_2 \sin\psi\right]\right\};$$

$$q_{x_3}^g = -\frac{\gamma\rho h}{\rho_{(o)}^2}(\sin x_1 \cos x_2 \sin\psi + \cos x_1 \cos\psi)\left\{1 + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\rho_{(0)}}\left[(R\cos x_1 - e)\cos\psi + R\sin x_1 \cos x_2 \sin\psi\right]\right\}, \tag{3}$$

де R – радіус кривизни оболонки; e – відстань між центром кривизни оболонки і центром мас споруди.

Вектор інерційного навантаження, діючого на елемент оболонки, визначається за формулою

$$\vec{q}^{\,j} = -\rho h \vec{a}, \tag{4}$$

де $\vec{a}$ – вектор абсолютного прискорення елемента оболонки, який є геометричною сумою переносного $\vec{a}^{\,e}$, відносного $\vec{a}^{\,r}$ та коріолісова $\vec{a}^{\,c}$ прискорень

$$\vec{a} = \vec{a}^{\,e} + \vec{a}^{\,r} + \vec{a}^{\,c}. \tag{5}$$

Вектор переносного прискорення дорівнює

$$\vec{a}^{\,e} = \vec{a}_0 + \vec{\varepsilon} \times \vec{r}_n + \Omega(\vec{\Omega} \times \vec{r}_n), \tag{6}$$

де $\vec{a}_0$ – вектор прискорення центру мас споруди; $\vec{\varepsilon}$ – вектор кутового прискорення системи координат O_{xyz}; $\vec{\Omega}$ – вектор її кутової швидкості, який складається з векторів кутової швидкості руху центру мас за круговою траєкторією $\vec{\omega}_0$ та кутової швидкості власного обертання $\vec{\dot{\psi}}$; $\vec{r}_n$ – радіус-вектор елемента оболонки в системі координат O_{xyz}.

Складові вектора переносного прискорення в напрямі координатних ліній x_1, x_2, x_3 мають вигляд [1]

$$a^e_{x_1} = \left[\omega_0^2\rho_{(0)}\sin\psi + \left(e - R\cos x_1\right)\ddot{\psi} - R\left(\omega_0 + \dot{\psi}\right)^2 \sin x_1 \cos x_2\right]\cos x_1 \cos x_2 -$$
$$-\left[\omega_0^2\rho_{(0)}\cos\psi + R\ddot{\psi}\sin x_1\cos x_2 + \left(e - R\cos x_1\right)\left(\omega_0 + \dot{\psi}\right)^2\right]\sin x_1;$$
$$a^e_{x_2} = \left[R\left(\omega_0 + \dot{\psi}\right)^2 \sin x_1\cos x_2 - \omega_0^2\rho_{(0)}\sin\psi - \left(e - R\cos x_1\right)\ddot{\psi}\right]\sin x_2;$$
$$a^e_{x_3} = \left[R\left(\omega_0 + \dot{\psi}\right)^2 \sin x_1\cos x_2 - \left(e - R\cos x_1\right)\ddot{\psi} - \omega_0^2\rho_{(0)}\sin\psi\right]\sin x_1 \cos x_2 -$$
$$-\left[\omega_0^2\rho_{(0)}\cos\psi + R\ddot{\psi}\sin x_1\cos x_2 + \left(e - R\cos x_1\right)\left(\omega_0 + \dot{\psi}\right)^2\cos x_2. \qquad (7)$$

Вектор відносного прискорення $\vec{a}^r$ елемента оболонки визначається формулою

$$\vec{a}^r = \ddot{\vec{U}}\,, \qquad (8)$$

де $\vec{U}$ – вектор переміщення елемента оболонки.

Складові вектора відносного прискорення в напрямі координатних ліній x_1, x_2, x_3 дорівнюють

$$a^r_{x_1} = \ddot{u};\; a^r_{x_2} = \ddot{v};\; a^r_{x_3} = \ddot{w}, \qquad (9)$$

де u, v, w – компоненти вектора переміщення $\vec{U}$ елемента оболонки.

Коріолісово прискорення елемента оболонки визначається формулою

$$\vec{a}^c = 2\vec{\Omega}\times\vec{V}^r, \qquad (10)$$

де $\vec{V}^r$ – вектор відносної швидкості елемента оболонки.

Складові вектора коріолісова прискорення в напрямі координатних ліній x_1, x_2, x_3 мають вигляд:

$$a^c_{x_1} = 2\left(\omega_0 + \dot{\psi}\right)\left(\dot{w}\cos x_2 + \dot{\upsilon}\sin x_1\cos x_2\right);$$
$$a^c_{x_2} = -2\left(\omega_0 + \dot{\psi}\right)\left(\dot{w}\cos x_1 + \dot{u}\sin x_1\right)\sin x_2;$$
$$a^c_{x_3} = 2\left(\omega_0 + \dot{\psi}\right)\left(\dot{v}\cos x_1\sin x_2 - \dot{u}\cos x_2\right). \qquad (11)$$

Проекції інерційного навантаження, що діє на елемент оболонки, в напрямі координатних ліній x_1, x_2, x_3, з урахуванням (4), (7), (9), (11), мають вигляд:

$$q^j_{x_1} = -\rho h\Big\{\left[\omega_0^2\,\rho_{(o)}\sin\psi + (e - R\cos x_1)\ddot{\psi} - R(\omega_0 + \dot{\psi})^2\sin x_1\cos x_2\right]\times$$
$$\times\cos x_1\cos x_2 - \left[\omega_0^2\,\rho_{(o)}\cos\psi + R\ddot{\psi}\sin x_1\cos x_2 + (e - R\cos x_1)(\omega_0 + \dot{\psi})^2\right]\sin x_1 +$$
$$+\ddot{u} + 2\left(\omega_0 + \dot{\psi}\right)\left(\dot{w}\cos x_2 + \dot{v}\sin x_1\sin x_2\right)\Big\};$$
$$q^j_{x_2} = -\rho h\Big\{\left[R(\omega_0 + \dot{\psi})^2\sin x_1\cos x_2 - \omega_0^2\rho_{(o)}\sin\psi - (e - R\cos x_1)\ddot{\psi}\right]\sin x_2 +$$

$$+\ddot{v}-2(\omega_0+\dot{\psi})\left(\dot{w}\cos x_1+\dot{u}\sin x_1\right)\sin x_2\Big\};$$

$$q_{x_3}^j=-\rho h\Big\{\left[R(\omega_0+\dot{\psi})^2\sin x_1\cos x_2-(e-R\cos x_1)\ddot{\psi}-\omega_0^2\rho_{(o)}\sin\psi\right]\sin x_1\cos x_2-$$
$$-\left[\omega_0^2\,\rho_{(o)}\cos\psi+R\ddot{\psi}\sin x_1\cos x_2+(e-R\cos x_1)\,(\omega_0+\dot{\psi})^2\right]\cos x_2+$$
$$+\ddot{w}+2(\omega_0+\dot{\psi})\left(\dot{v}\cos x_1\sin x_2-\dot{u}\cos x_2\right)\Big\}. \quad (12)$$

Підставивши в (1) вирази для гравітаційного (3) та інерційного (12) навантажень, з урахуванням умови $\gamma/\rho_{(o)}^3=\omega_o^2$ рівноваги гравітаційних та інерційних навантажень в центрі мас споруди, отримуємо складові вектора повного навантаження, що діє на елемент оболонки вздовж координатних ліній x_1, x_2, x_3:

$$q_{x_1}=\rho h\Big\{2\omega_0^2\left[(R\cos x_1-e)\cos\psi+R\sin x_1\cos x_2\sin\psi\right](\cos x_1\cos x_2\sin\psi-$$
$$-\sin x_1\cos\psi)-\left[(e-R\cos x_1)\ddot{\psi}-R(\omega_0+\dot{\psi})^2\sin x_1\cos x_2\right]\cos x_1\cos x_2+$$
$$+\left[R\ddot{\psi}\sin x_1\cos x_2+(e-R\cos x_1)(\omega_0+\dot{\psi})^2\right]\sin x_1-\ddot{u}-$$
$$-2\left[(\omega_0+\dot{\psi})(\dot{w}\cos x_2+\dot{v}\sin x_1\sin x_2)\right]\Big\};$$

$$q_{x_2}=\rho h\Big\{\left[(e-R\cos x_1)\,\ddot{\psi}-R(\omega_0+\dot{\psi})^2\sin x_1\cos x_2\right]\sin x_2-$$
$$-2\omega_0^2\left[(R\cos x_1-e)\cos\psi+R\sin x_1\cos x_2\sin\psi\right]\sin x_2\sin\psi-$$
$$-\ddot{v}+2\left[(\omega_0+\dot{\psi})(\dot{w}\cos x_1+\dot{u}\sin x_1)\sin x_2\right]\Big\};$$

$$q_{x_3}=\rho h\Big\{\left[(e-R\cos x_1)\,\ddot{\psi}-R(\omega_0+\dot{\psi})^2\sin x_1\cos x_2\right]\sin x_1\cos x_2-$$
$$-2\omega_0^2\left(\sin x_1\cos x_2\sin\psi+\cos x_1\cos\psi\right)\left[(R\cos x_1-e)\cos\psi+\right.$$
$$\left.+R\sin x_1\cos x_2\sin\psi\right]+\left[R\ddot{\psi}\sin x_1\cos x_2+(\omega_0+\dot{\psi})^2(e-R\cos x_1)\right]\cos x_2-$$
$$-\ddot{w}-2\left[\left(\omega_0+\dot{\psi}\right)\left(\dot{v}\cos x_1\sin x_2-\dot{u}\cos x_2\right)\right]\Big\}. \quad (13)$$

Диференціальні рівняння руху безмоментної сферичної оболонки мають вигляд [1, 3]

$$\frac{1}{\sin x_2}\frac{\partial N_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{12}}{\partial x_2}+2N_{12}\operatorname{ctg}x_2+Rq_{x_1}=0,$$
$$\frac{1}{\sin x_2}\frac{\partial N_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{22}}{\partial x_2}+(N_{22}-N_{11})\operatorname{ctg}x_2+Rq_{x_2}=0,$$
$$-N_{11}-N_{22}+Rq_{x_3}=0, \quad (14)$$

де N_{11}, N_{22}, N_{12} – зусилля в серединній поверхні оболонки, які визначаються наступними формулами:

$$N_{11}=\frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_{11}+\nu\varepsilon_{22});\quad N_{22}=\frac{Eh}{1-\nu^2}(\varepsilon_{22}+\nu\varepsilon_{11});\quad N_{12}=\frac{Eh}{2(1+\nu)}\varepsilon_{12},\qquad(15)$$

де ε_{11}, ε_{22}, ε_{12} – компоненти тензора деформацій, які виражаються через складові вектора переміщень елемента оболонки *u, v, w* вздовж координатних ліній x_1, x_2, x_3 таким чином:

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{R}\left(\frac{1}{\sin x_2}\frac{\partial u}{\partial x_1}+\upsilon\,\mathrm{ctg}x_2+w\right);\quad \varepsilon_{22}=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial\upsilon}{\partial x_2}+w\right);$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{1}{R}\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}-u\,\mathrm{ctg}x_2+\frac{1}{\sin x_2}\frac{\partial\upsilon}{\partial x_1}\right);\qquad(16)$$

E – модуль пружності матеріалу оболонки; υ – коефіцієнт Пуассона.

Система диференціальних рівнянь, що описують коливання безмоментної сферичної оболонки в центральному силовому полі, з урахуванням виразів (13) – (16), має вигляд:

$$\frac{E}{R^2(1-\upsilon^2)}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}-(1+\upsilon)\frac{\partial w}{\partial x_1}+\frac{1+\upsilon}{2\sin x_1}\frac{\partial^2 v}{\partial x_1\partial x_2}+\mathrm{ctg}x_1\frac{\partial u}{\partial x_1}+\right.$$

$$\left.+\frac{\upsilon-3}{2}\frac{\mathrm{ctg}x_1}{\sin x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2}-(\upsilon+\mathrm{ctg}^2x_1)u+\frac{1-\upsilon}{2\sin^2 x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\right]+2\omega_0^2\left[(R\cos x_1-e)\cos\psi+\right.$$

$$\left.+R\sin x_1\cos x_2\sin\psi\right](\cos x_1\cos x_2\sin\psi-\sin x_1\cos\psi)-\left[(e-R\cos x_1)\ddot{\psi}-\right.$$

$$\left.-R(\omega_0+\dot{\psi})^2\sin x_1\cos x_2\right]\cos x_1\cos x_2+\left[R\ddot{\psi}\sin x_1\cos x_2+\right.$$

$$\left.+(e-R\cos x_1)(\omega_0+\dot{\psi})^2\right]\sin x_1-\ddot{u}-2\left[(\omega_0+\dot{\psi})(\dot{w}\cos x_2+\dot{v}\sin x_1\sin x_2)\right]=0,$$

$$\frac{E}{R^2(1-\upsilon^2)}\left[\frac{1+\upsilon}{2\sin x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1\partial x_2}+\frac{1-\upsilon}{2}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\mathrm{ctg}x_1\frac{\partial\upsilon}{\partial x_1}v\right)+\frac{1}{\sin^2 x_1}\frac{\partial^2 v}{\partial x_2^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{3-\upsilon}{2}\frac{\mathrm{ctg}x_1}{\sin x_1}\frac{\partial u}{\partial x_2}-\frac{1+\upsilon}{\sin x_1}\frac{\partial w}{\partial x_2}+\frac{(1-\upsilon)(1-2\cos^2 x_1)}{2\sin^2 x_1}v\right]+\left[(e-R\cos x_1)\ddot{\psi}-\right.$$

$$\left.-R(\omega_0+\dot{\psi})^2\sin x_1\cos x_2\right]\sin x_2-2\omega_0^2\left[(R\cos x_1-e)\cos\psi+\right.$$

$$\left.+R\sin x_1\cos x_2\sin\psi\right]\sin x_2\sin\psi-\ddot{v}+2\left[(\omega_0+\dot{\psi})(\dot{w}\cos x_1+\dot{u}\sin x_1)\sin x_2\right]=0,$$

$$\frac{E}{R^2(1-\upsilon^2)}\left\{\left[\frac{\partial u}{\partial x_1}+v\left(\frac{1}{\sin x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2}+u\,\mathrm{ctg}x_1\right)(1+\upsilon)w\right]\left(1+\frac{1}{R}\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)+\right.$$

$$\left.+\left[v\frac{\partial u}{\partial x_1}+\frac{1}{\sin x_1}\frac{\partial v}{\partial x_2}+u\,\mathrm{ctg}x_1-(1+\upsilon)w\right]\left[1+\frac{1}{R}\left(\frac{1}{\sin^2 x_1}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\mathrm{ctg}x_1\frac{\partial w}{\partial x_1}\right)\right]\right\}+$$

$$+\left[\left(e-R\cos x_1\right)\ddot{\psi}-R(\omega_0+\dot{\psi})^2\sin x_1\cos x_2\right]\sin x_1\cos x_2-$$
$$-2\omega_0^2\left(\sin x_1\cos x_2\sin\psi+\cos x_1\cos\psi\right)\left[\left(R\cos x_1-e\right)\cos\psi+\right.$$
$$\left.+R\sin x_1\cos x_2\sin\psi\right]+\left[R\ddot{\psi}\sin x_1\cos x_2+\left(\omega_0+\dot{\psi}\right)^2(e-R\cos x_1)\right]\cos x_2-$$
$$-\ddot{w}-2\left[\left(\omega_0+\dot{\psi}\right)\left(\dot{v}\cos x_1\sin x_2-\dot{u}\cos x_2\right)\right]=0. \qquad (17)$$

Інтегруючи рівняння (17), можна визначати геометричні параметри та амплітуди вільних коливань споруди, при яких сферична оболонка, що рухається за круговою траєкторією в центральному силовому полі, зберігає задану форму.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. *Гуляев В.И., Лизунов П.П.* Колебания систем твердых и деформируемых тел при сложном движении. – К.: Вища школа, 1989. –199 с.
2. *Лізунов П.П.* Пружна рівновага сферичної оболонки в центральному силовому полі. – Опір матеріалів і теорія споруд: Науково-технічний збірник. – Вип. 91. –К.: КНУБА, 2013. – С. 84-87.
3. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластин и оболочек. – М.: Наука, 1972. –314 с.

REFERENCES

1. *Gulyaev V.I., Lizunov P.P.* Kolebaniya sistem tverdyih i deformiruemyih tel pri slozhnom dvizhenii (Vibrations of rigid and deformable bodies under complex motion). – K.: Vischa shkola, 1989. –199 p.
2. *Lizunov P.P.* Pruzhna rivnovaha sferychnoyi obolonky v tsentral'nomu sylovomu poli (Elastic equilibrium of a spherical shell in a central force field). – Opir materialiv i teoriya sporud: Naukovo-tekhnichnyy zbirnyk. – Vyp. 91. –K.: KNUBA, 2013. – P. 84-87.
3. *Volmir A.S.* Nelineynaya dinamika plastin i obolochek (Nonlinear dynamics of plates and shells). – M.: Nauka, 1972. –314 p.

Стаття надійшла до редакції 22.01.2014 р.

Лизунов П.П.

КОЛЕБАНИЯ СФЕРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ В ЦЕНТРАЛЬНОМ СИЛОВОМ ПОЛЕ

Получены соотношения, описывающие колебания безмоментной сферической оболочки, движущейся по круговой траектории в центральном силовом поле.

Ключевые слова: гравитационная нагрузка, стационарное движение, центр масс, свободные колебания.

Lizunov P.

OSCILLATIONS SPHERICAL SHELL IN THE CENTRAL FORCE FIELD

These ratios, which describe the oscillations moment free spherical shell that moves on a circular path in a central force field.

Key words: gravity load, steady motion, center of mass, free vibrations.